L. Landau e E. Lifshitz

Fisica teorica

Tomo 4

Teoria quantistica relativistica

Editori Riuniti Edizioni Mir

Fisica teorica 4

Editori Riuniti Edizioni Mir

Teoria quantistica relativistica

Editori Riuniti Edizioni Mir

II edizione: luglio 1991
Titolo originale: *Reljativistskaja kvantovaja teorija*
Traduzione di Valento Pedrocchi
© Copyright by Edizioni Mir, Mosca
© Copyright by Editori Riuniti, 1978
Via del Tritone 61/62 - 00187 Roma
CL 63-3475-X
ISBN 88-359-3475-3

Prefazione all'edizione italiana . . . . . p. 10

Alcune notazioni 12

Introduzione 15

§ *1. Principio di indeterminazione nel campo relativistico* 15

CAPITOLO I. FOTONI

§ *2. Quantizzazione del campo elettromagnetico libero* 20
§ *3. Fotoni* 26
§ *4. Invarianza di gauge* 28
§ *5. Campo elettromagnetico nella teoria quantistica* 30
§ *6. Momento angolare e parità del fotone* 32
§ *7. Onde sferiche di fotoni* 36
§ *8. Polarizzazione del fotone* 41
§ *9. Sistema a due fotoni* 48

CAPITOLO II. BOSONI

§ *10. Equazione d'onda per particelle a spin* 0 52
§ *11. Particelle e antiparticelle* 57
§ *12. Particelle realmente neutre* 62
§ *13. Trasformazioni* C, P T 64
§ *14. Equazione d'onda per particelle a spin* 1 71
§ *15. Equazione d'onda per particelle a spin superiore intero* 74
§ *16. Stati di elicità delle particelle* 76

CAPITOLO III. FERMIONI

§ *17. Spinori quadridimensionali* 83
§ *18. Connessione degli spinori con i quadrivettori* 86
§ *19. Inversione spaziale degli spinori* 90
§ *20. Equazione di Dirac in rappresentazione spinoriale* 96
§ *21. Forma simmetrica dell equazione di Dirac* 98
§ *22. Algebra delle matrici di Dirac* 104
§ *23. Onde piane* 108

§ 24. *Onde sferiche* . . . . . p. 112
§ 25. *Legame dello spin con la statistica* 116
§ 26. *Coniugazione di carica e inversione temporale degli spinori* . . . 119
§ 27. *Simmetria intrinseca di particelle e antiparticelle* 124
§ 28. *Forme bilineari* 127
§ 29. *Matrice densità di polarizzazione* 132
§ 30. *Neutrino* 138
§ 31. *Equazione d'onda per particelle a spin* 3/2 142

CAPITOLO IV. PARTICELLE IN UN CAMPO ESTERNO

§ 32. *Equazione di Dirac per un elettrone in un campo esterno* . . . 146
§ 33. *Sviluppo in potenze di* 1/c 151
§ 34. *Struttura fina dei livelli dell'atomo di idrogeno* 155
§ 35. *Moto in un campo a simmetria centrale* 157
§ 36. *Moto in un campo coulombiano* 162
§ 37. *Diffusione in un campo a simmetria centrale* 169
§ 38. *Diffusione nel caso ultrarelativistico* 171
§ 39. *Sistema di funzioni d'onda dello spettro continuo per la diffusione in un campo coulombiano* 174
§ 40. *Elettrone nel campo di un'onda elettromagnetica piana* 178
§ 41. *Moto dello spin in un campo esterno* 181
§ 42. *Diffusione di neutroni in un campo elettrico* 188

CAPITOLO V. RADIAZIONE

§ 43. *Operatore di interazione elettromagnetica* 190
§ 44. *Emissione e assorbimento* 193
§ 45. *Radiazione di dipolo* 196
§ 46. *Radiazione di multipolo elettrico* 198
§ 47. *Radiazione di multipolo magnetico* 203
§ 48. *Distribuzione angolare e polarizzazione della radiazione* 206
§ 49. *Radiazione di atomi. Tipo elettrico* 214
§ 50. *Radiazione di atomi. Tipo magnetico* 220
§ 51. *Radiazione di atomi. Effetto Zeeman e effetto Stark* 223
§ 52. *Radiazione di atomi. Atomo di idrogeno* 226
§ 53. *Radiazione di molecole biatomiche. Spettri elettronici* 230
§ 54. *Radiazione di molecole biatomiche. Spettri oscillazionali e rotazionali* 238
§ 55. *Radiazione di nuclei* 239
§ 56. *Effetto fotoelettrico. Caso non relativistico* 243
§ 57. *Effetto fotoelettrico. Caso relativistico* 247
§ 58. *Fotodisintegrazione del deutone* 251
§ 59. *Radiazione di frenamento magnetico* 255

CAPITOLO VI. DIFFUSIONE DELLA LUCE

§ 60. *Tensore di diffusione* 268
§ 61. *Diffusione da parte di sistemi liberamente orientabili* 276

§ 62. *Diffusione su molecole* . . . . . p. 283
§ 63. *Larghezza naturale delle righe spettrali* 287
§ 64. *Fluorescenza di risonanza* 292

CAPITOLO VII. MATRICE DI DIFFUSIONE

§ 65. *Ampiezza di diffusione* 298
§ 66. *Reazioni con particelle polarizzate* 303
§ 67. *Invarianti cinematici* 307
§ 68. *Domini fisici* 310
§ 69. *Sviluppo in ampiezze parziali* 316
§ 70. *Simmetria delle ampiezze di diffusione nella rappresentazione delle elicità* 320
§ 71. *Ampiezze invarianti* 327
§ 72. *Condizione di unitarietà* 332

CAPITOLO VIII. TEORIA INVARIANTE DELLE PERTURBAZIONI

§ 73. *Prodotto cronologico* 337
§ 74. *Diagrammi di Feynman per la diffusione di elettroni* 341
§ 75. *Diagrammi di Feynman per la diffusione di un fotone* 348
§ 76. *Propagatore elettronico* 351
§ 77. *Propagatore fotonico* 356
§ 78. *Regole generali della tecnica dei diagrammi* 360
§ 79. *Invarianza di crossing* 367
§ 80. *Particelle virtuali* 368

CAPITOLO IX. INTERAZIONE DI ELETTRONI

§ 81. *Diffusione di un elettrone in un campo esterno* 374
§ 82. *Diffusione di elettroni e di positroni su un elettrone* 378
§ 82a. *Perdite per ionizzazione da parte di particelle veloci* 388
§ 83. *Equazione di Breit* 395
§ 84. *Positronio* 402
§ 85. *Interazione di atomi a grandi distanze* 406

CAPITOLO X. INTERAZIONE DI ELETTRONI CON FOTONI

§ 86. *Diffusione di un fotone su un elettrone* 414
§ 87. *Diffusione di un fotone su un elettrone. Effetti di polarizzazione* 419
§ 88. *Annichilazione in due fotoni di una coppia elettronica* 429
§ 89. *Annichilazione del positronio* 433
§ 90. *Radiazione di frenamento di un elettrone diffuso su un nucleo. Caso non relativistico* 437
§ 91. *Radiazione di frenamento di un elettrone diffuso su un nucleo. Caso relativistico* 446
§ 92. *Produzione di coppie da parte di un fotone nel campo di un nucleo* 456
§ 93. *Teoria esatta della produzione di coppie e della radiazione di frenamento nel caso ultrarelativistico* 460

§ 94. *Radiazione di frenamento nella diffusione elettrone-elettrone nel caso ultrarelativistico* p.474
§ 95. *Emissione di fotoni molli negli urti* 479
§ 96. *Metodo dei fotoni equivalenti* 487
§ 97. *Produzione di coppie negli urti di particelle* 493
§ 98. *Emissione di un fotone da parte di un elettrone nel campo di un'onda elettromagnetica intensa* 499

CAPITOLO XI. PROPAGATORI ESATTI E PARTI DI VERTICE

§ 99. *Operatori di campo nella rappresentazione di Heisenberg* . . . 506
§ 100. *Propagatore fotonico esatto* 509
§ 101. *Funzione di autoenergia del fotone* 517
§ 102. *Propagatore elettronico esatto* 520
§ 103. *Operatore di vertice* 525
§ 104. *Equazioni di Dyson* 530
§ 105. *Identità di Ward* 532
§ 106. *Propagatore elettronico in un campo esterno* 536
§ 107. *Condizioni fisiche della rinormalizzazione* 542
§ 108. *Proprietà di analicità del propagatore fotonico* 549
§ 109. *Regolarizzazione degli integrali di Feynman* 552

CAPITOLO XII. CORREZIONI RADIATIVE

§ 110. *Calcolo dell'operatore di polarizzazione* 558
§ 111. *Correzioni radiative alla legge di Coulomb* 561
§ 112. *Calcolo della parte immaginaria dell operatore di polarizzazione secondo l'integrale di Feynman* 565
§ 113. *Fattori di forma elettromagnetici dell'elettrone* 570
§ 114. *Calcolo dei fattori di forma dell'elettrone* 574
§ 115. *Momento magnetico anomalo dell'elettrone* 579
§ 116. *Calcolo dell'operatore di massa* 582
§ 117. *Emissione di fotoni molli di massa non nulla* 587
§ 118. *Diffusione di un elettrone in un campo esterno in seconda approssimazione di Born* 593
§ 119. *Correzioni radiative alla diffusione di un elettrone in un campo esterno* 599
§ 120. *Spostamento radiativo dei livelli atomici* 603
§ 121. *Spostamento radiativo dei livelli di atomi mesici* 611
§ 122. *Equazione relativistica per gli stati legati* 612
§ 123. *Doppia relazione di dispersione* 620
§ 124. *Diffusione fotone-fotone* 627
§ 125. *Diffusione coerente di un fotone nel campo di un nucleo* . . . 638
§ 126. *Correzioni radiative alle equazioni del campo elettromagnetico* 639
§ 127. *Calcolo di integrali su domini quadridimensionali* 649

CAPITOLO XIII. FORMULE ASINTOTICHE DELL'ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

§ 128. Comportamento asintotico del propagatore fotonico per grandi impulsi 653
§ 129. Separazione dei termini bilogaritmici nell'operatore di vertice 660
§ 130. Asintoto bilogaritmico dell'operatore di vertice 666
§ 131. Asintoto bilogaritmico dell'ampiezza di diffusione elettrone-muone 669

CAPITOLO XIV. ELETTRODINAMICA DEGLI ADRONI

§ 132. Fattori di forma elettromagnetici degli adroni 676
§ 133. Diffusione di elettroni da parte di adroni 682
§ 134. Teorema delle basse energie per la radiazione di frenamento . . . 685
§ 135. Teorema delle basse energie per la diffusione di un fotone su un adrone 690
§ 136. Momenti di multipolo degli adroni 693

Indice analitico 700

Prefazione all'edizione italiana

La teoria quantistica relativistica attualmente è ancora lontana dall'essere compiuta anche in rapporto ai princìpi fisici, che ne sono alla base. Questo si riferisce in particolare alla teoria delle interazioni forti e deboli.

Già secondo la prima intenzione di L. D. Landau, in questo corso dovevano venir esposti solo quei risultati teorici che, con un ragionevole grado di sicurezza, sono fissati in modo certo e si collocano in un determinato sistema. In altre parole, l'esposizione non deve avvicinarsi troppo alla « prima linea » della fisica teorica. Avendo presente lo stato attuale della teoria, con questa impostazione ci si è dovuti in sostanza limitare all'elettrodinamica quantistica.

Nell'esaminare le applicazioni concrete della teoria non ci siamo proposti di abbracciare tutta l'enorme quantità degli effetti relativi al tema trattato, ma ci siamo limitati solo ai fenomeni principali, rimandando ad alcuni lavori originali, contenenti uno studio piú dettagliato. Nei calcoli lunghi e complessi spesso abbiamo tralasciato alcune formule intermedie, cercando sempre però di indicare tutti i punti rilevanti. Contemporaneamente occorre tener presente che, in confronto agli altri volumi di questo corso, il presente presuppone un piú alto livello di preparazione da parte del lettore.

Questo volume è stato scritto senza la partecipazione diretta del nostro maestro L. D. Landau, ma abbiamo cercato di attenerci a quello spirito ed a quel rapporto verso la fisica teorica, che egli ci ha sempre insegnato e che sono stati alla base degli altri volumi di questo corso. Spesso ci siamo domandati come si sarebbe comportato Landau davanti a questo o quel problema e abbiamo cercato di rispondere cosí, come ci suggeriva il pluriennale contatto con lui.

L'edizione russa di questo volume ha visto la luce in due parti negli anni 1968-1971. Non ci è stato possibile apportare aggiunte per l'edizione italiana e ci siamo dovuti limitare solo ad alcune riduzioni ed a correggere piccoli errori.

Mosca, luglio 1975

V. B. Berestetskij,
E. M. Lifšits,
L. P. Pitaevskij

Alcune notazioni

Notazioni quadridimensionali

Gli indici dei tensori quadridimensionali sono designati con lettere dell'alfabeto greco λ, μ, ν, . . ., suscettibili dei valori 0, 1, 2, 3
La metrica adottata ha la segnatura $(+---)$. Tensore metrico: $g_{\mu\nu}$ $(g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1)$
Componenti di un 4-vettore: $a^\mu = (a^0,\ \boldsymbol{a})$
Per semplificare la scrittura delle formule l'indice delle componenti di un 4-vettore viene spesso omesso[1]). In tal modo, i prodotti scalari di 4-vettori vengono scritti semplicemente come (ab) oppure ab: $ab \equiv a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$
Raggio quadrivettore: $x^\mu = (t,\ \boldsymbol{r})$. Elemento di quadrivolume: d^4x
Operatore di derivazione rispetto alle coordinate quadridimensionali: $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$
4-tensore antisimmetrico unità: $e^{\lambda\mu\nu\rho}$, definito come segue: $e^{0123} = -e_{0123} = +1$
Funzione delta quadridimensionale: $\delta^{(4)}(a) = \delta(a_0)\,\delta(\boldsymbol{a})$

Notazioni tridimensionali

Gli indici dei tensori tridimensionali sono designati con lettere dell'alfabeto latino i, k, l, . . ., suscettibili dei valori x, y, z
I vettori tridimensionali sono designati con lettere corsive in grassetto
Elemento di volume tridimensionale: d^3x

Operatori

Gli operatori sono designati con lettere in carattere diritto
Gli operatori ψ sono designati con la relativa lettera in grassetto $\boldsymbol{\psi}$

---

[1]) Questa forma di notazione è largamente usata nella letteratura scientifica contemporanea. Questo « compromesso » tra le risorse dell'alfabeto e le necessità della fisica richiede, naturalmente, un'attenzione particolare da parte del lettore.

Commutatori o anticommutatori di due operatori: $\{f, g\}_{\pm} = fg \pm gf$
Operatore trasposto: $\tilde{f}$
Operatore aggiunto: f^{+}
Operatore di coniugazione di carica: C[1])
Operatore di inversione spaziale: P[1])
Operatore di inversione temporale: T[2])

Elementi di matrice

Elemento di matrice di un operatore F relativo alla transizione da uno stato iniziale i allo stato finale f: F_{fi} oppure $\langle f \mid F \mid i \rangle$
Il simbolo $\mid i \rangle$ viene usato per indicare uno stato a prescindere dalla rappresentazione concreta in cui può essere espressa la funzione d'onda. Con il simbolo $\langle f \mid$ viene indicato lo stato finale (« coniugato complesso »)[3])
Corrispondentemente, con $\langle s \mid r \rangle$ vengono indicati i coefficienti dello sviluppo di un sistema di stati a numero quantico r in una sovrapposizione di stati a numeri quantici s: $\mid r \rangle = \sum_s \mid s \rangle \langle s \mid r \rangle$
Elementi di matrice ridotti di tensori sferici: $\langle f \parallel F \parallel i \rangle$

Equazione di Dirac

Matrici di Dirac: γ^{μ}, per le quali valgono le uguaglianze $(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$. Matrici $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\beta = \gamma^0$. Espressioni in rappresentazione spinoriale e in rappresentazione standard: (21,3), (21,16), (21,20) (pagg. 99, 102)
$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $(\gamma^5)^2 = 1$ (formula (22,18) a pag. 107)
$\sigma^{\mu\nu} = 1/2\,(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})$ (formula (28,2) a pag. 127)
Prodotto di un quadrivettore con le matrici di Dirac: $\hat{a} = (a\gamma) \equiv a_{\mu}\gamma^{\mu}$
Coniugazione di Dirac: $\bar{\psi} = \psi^{*}\gamma^0$
Matrici di Pauli: $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$; definizione a pag. 98
Indici degli spinori quadridimensionali: $\alpha, \beta, \ldots$ e $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ldots$ suscettibili dei valori 1, 2 e $\dot{1}, \dot{2}$
Indici bispinoriali: $i, k, l, \ldots$ suscettibili dei valori 1, 2, 3, 4

---

[1]) Dalle parole carica e parità.
[2]) La lettera T viene usata anche come simbolo di cronologizzazione di prodotti di operatori.
[3]) Simboli di Dirac.

Trasformata di Fourier

Trasformata tridimensionale

$$f(\boldsymbol{r}) = \int f(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

$$f(\boldsymbol{k}) = \int f(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\, d^3x$$

e analogamente per il caso quadridimensionale

Unità

Ovunque, se non è specificato il contrario, sono usate unità relativistiche nelle quali $\hbar = 1$, $c = 1$. In queste unità per la carica elementare si ha: $e^2 = 1/137$
Unità atomiche: $e = 1$, $\hbar = 1$, $m = 1$. In queste unità $c = 137$.
Unità atomiche di lunghezza, di tempo e di energia: $\hbar^2/me^2$, $\hbar^3/me^4$ e $me^4/\hbar^2$ (la quantità $\mathrm{Ry} = me^4/2\hbar^2$ è chiamata rydberg)
Unità ordinarie: sistema assoluto di unità (sistema di Gauss)

Costanti

Velocità della luce: $c = 2{,}998 \cdot 10^{10}$ cm/s
Carica elementare: $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ CGSE
Massa dell'elettrone: $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g
Costante di Planck: $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-27}$ erg·s
Costante della struttura fina: $\alpha = e^2/\hbar c$; $1/\alpha = 137{,}04$
Raggio di Bohr: $\hbar^2/me^2 = 5{,}292 \cdot 10^{-9}$ cm
Raggio classico dell'elettrone: $r_e = e^2/mc^2 = 2{,}818 \cdot 10^{-13}$ cm
Lunghezza d'onda Compton dell'elettrone: $\hbar/mc = 3{,}86 \cdot 10^{-11}$ cm
Massa di quiete dell'elettrone $mc^2 = 0{,}5110 \cdot 10^6$ eV
Unità atomica d'energia: $me^4/\hbar^2 = 4{,}36 \cdot 10^{-11}$ erg $= 27{,}21$ eV
Magnetone di Bohr: $e\hbar/2mc = 9{,}27 \cdot 10^{-21}$ erg·Gs^{-1}
Massa del protone: $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-24}$ g
Lunghezza d'onda Compton del protone: $\hbar/m_p c = 2{,}10 \cdot 10^{-14}$ cm
Magnetone nucleare: $e\hbar/2m_p c = 5{,}05 \cdot 10^{-24}$ erg·Gs^{-1}

I *rimandi* agli altri volumi di questo corso sono indicati mediante i numeri relativi ai volumi stessi: I (« Meccanica », 1975), II (« Teoria dei Campi », 1975), III (« Meccanica Quantistica », 1976)

Introduzione

§ 1. *Principio di indeterminazione nel campo relativistico*

Tutta la teoria quantistica esposta nel terzo volume di questo corso ha un carattere essenzialmente non relativistico, ed è applicabile a fenomeni correlati con moti a velocità piccole rispetto alla velocità della luce. A prima vista si potrebbe pensare di realizzare il passaggio alla teoria relativistica mediante una piú o meno diretta generalizzazione del formalismo della meccanica quantistica non relativistica. Considerando il problema piú attentamente, ci si accorge però, che per la costruzione di una teoria relativistica logicamente chiusa è necessario ricorrere a princípi fisici del tutto nuovi.

Ricordiamo qui alcune idee fisiche che sono alla base della meccanica quantistica non relativistica (III, § 1). Abbiamo visto che un ruolo fondamentale è svolto dal concetto di misura, e cioè il processo di interazione di un sistema quantistico con un « oggetto classico » (« strumento »), a seguito del quale certe variabili dinamiche del sistema quantistico (coordinate, velocità, ecc.) assumono valori determinati. Abbiamo visto inoltre le restrizioni che la meccanica quantistica impone alla possibilità di determinazione simultanea delle diverse variabili dinamiche di un elettrone[1]). Ad esempio, gli intervalli di indeterminazione Δq e Δp, nei quali possono esistere simultaneamente la coordinata e l'impulso, sono legati dalla relazione $\Delta q\, \Delta p \sim \hbar$[2]); quanto maggiore è la precisione con cui è misurata una di queste due quantità, tanto minore è la precisione con cui può essere simultaneamente misurata l'altra.

È essenziale, tuttavia, che ciascuna delle variabili dinamiche dell'elettrone possa venire misurata separatamente con una precisione arbitrariamente grande e in un intervallo di tempo arbitrariamente piccolo. Questo fatto ha un'importanza fondamentale in tutta la meccanica quantistica non relativistica. Soltanto grazie ad esso, infatti, è possibile introdurre il concetto di funzione d'onda,

---

[1]) Come nel vol. III, per brevità, si parla qui dell'elettrone, intendendo riferirsi ad un qualsiasi sistema quantistico.

[2]) In questo paragrafo usiamo le stesse unità di misura dei volumi precedenti.

concetto che è fondamentale nel formalismo di questa teoria. Il senso fisico della funzione d'onda $\psi(q)$ è costituito dal fatto che il quadrato del suo modulo determina la probabilità che, in seguito ad una misura eseguita in un dato istante di tempo, le coordinate dell'elettrone assumano certi determinati valori. È chiaro che premessa indispensabile per l'introduzione del concetto di probabilità, inteso come è stato appena specificato, è che sia possibile, in linea di principio, fare misure arbitrariamente precise e rapide; in caso contrario questo concetto si svuoterebbe di contenuto e perderebbe il suo senso fisico.

L'esistenza di una velocità limite (la velocità della luce c) comporta nuove limitazioni fondamentali alla possibilità di misura delle diverse grandezze fisiche (*L. D. Landau*, *R. Peierls*, 1930).

Nel vol. III, § 44 è stata ottenuta la relazione

$$(v' - v)\,\Delta p\,\Delta t \sim \hbar \tag{1,1}$$

che lega l'indeterminazione Δp della misura dell'impulso dell'elettrone con la durata del processo stesso di misura Δt; v e v' sono le velocità dell'elettrone rispettivamente prima e dopo la misura. Da questa relazione segue che per ottenere una misura sufficientemente precisa dell'impulso in un intervallo di tempo sufficientemente breve (cioè per ottenere un Δp sufficientemente piccolo in un Δt sufficientemente breve) è necessaria una variazione sufficientemente grande della velocità dovuta allo stesso processo di misura. Nella teoria non relativistica questa circostanza porta all'impossibilità di ripetere le misure dell'impulso a piccoli intervalli di tempo, ma non intacca minimamente la possibilità di principio di eseguire un'unica misura dell'impulso con una precisione arbitrariamente grande, poiché la differenza $v' - v$ può essere resa grande a piacere.

L'esistenza di una velocità limite cambia radicalmente la situazione. La differenza $v' - v$, come le velocità stesse, non può ora essere maggiore di c (piú esattamente di $2c$). Sostituendo nella (1,1) $v' - v$ con c, si ottiene la relazione

$$\Delta p\,\Delta t \sim \frac{\hbar}{c} \tag{1,2}$$

che determina la massima precisione ottenibile nel processo di misura dell'impulso per una data durata del processo stesso (Δt). Nella teoria relativistica risulta quindi impossibile per principio una misura dell'impulso arbitrariamente precisa e rapida. Una misura precisa dell'impulso ($\Delta p \to 0$) è possibile solo nel caso limite di una durata infinita del processo di misura.

Cambiamenti non meno profondi subisce anche la possibilità di misura della coordinata: nella teoria relativistica essa risulta misurabile solo con una precisione che non supera un determinato limite

minimo. Con ciò il concetto di localizzazione dell'elettrone è soggetto ad ulteriori limitazioni del proprio senso fisico.

Nel formalismo matematico della teoria questo fatto si manifesta nella incompatibilità di una misura esatta della coordinata con l'affermazione che l'energia di una particella libera è positiva. Come si vedrà in seguito, il sistema completo delle autofunzioni dell'equazione d'onda relativistica di una particella libera include (accanto alle soluzioni con una « giusta » dipendenza dal tempo) anche soluzioni di « frequenza negativa ». Nel caso generale, queste funzioni entreranno nello sviluppo del pacchetto d'onde che descrive un elettrone localizzato in una piccola regione dello spazio.

Le funzioni d'onda di « frequenza negativa » sono legate, come verrà mostrato in seguito, all'esistenza di antiparticelle: i positroni. La comparsa di queste funzioni nello sviluppo del pacchetto d'onde significa, nel caso generale, l'inevitabile generazione della coppia elettrone-positrone nel processo di misura delle coordinate dell'elettrone. La comparsa di nuove particelle, non controllabile mediante il processo stesso, in modo evidente priva di senso la misura delle coordinate dell'elettrone.

Nel sistema di quiete dell'elettrone l'errore minimo nella misura delle sue coordinate è dato dalla relazione

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{mc}. \tag{1,3}$$

A questo valore (l'unico ammissibile anche per considerazioni dimensionali) corrisponde l'indeterminazione dell'impulso $\Delta p \sim mc$, che, a sua volta, corrisponde all'energia di soglia per la generazione di una coppia particella-antiparticella.

Nel sistema di riferimento nel quale l'elettrone possiede l'energia ε, in luogo della (1,3) si avrà

$$\Delta q \sim \frac{\hbar c}{\varepsilon}. \tag{1,4}$$

In particolare, nel caso limite ultrarelativistico, l'energia è legata all'impulso dalla relazione $\varepsilon \approx cp$, e allora

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{p}, \tag{1,5}$$

cioè l'errore Δq coincide con la lunghezza d'onda di De Broglie della particella.

Per i fotoni ha sempre luogo il caso ultrarelativistico; per essi vale sempre dunque la relazione (1,5). Questo significa che parlare di coordinate di un fotone ha senso solo in quei casi in cui le quantità che caratterizzano il problema sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda. Questo non è altro che il caso limite « classico », corrispondente all'ottica geometrica, nella quale si può parlare di propagazione della luce lungo traiettorie raggio. Nel caso quantistico, dove la

lunghezza d'onda non può essere considerata piccola, il concetto di coordinate di un fotone non ha senso. Vedremo piú avanti (§ 4) che nel formalismo matematico della teoria, la non misurabilità delle coordinate del fotone si manifesta già nell'impossibilità di formare, mediante la sua funzione d'onda, una quantità che possa venire interpretata come densità di probabilità che soddisfi la condizione di invarianza relativistica.

Da quanto detto risulta chiaro che, in una meccanica quantistica relativistica coerente, le coordinate delle particelle non possono figurare in qualità di variabili dinamiche, che, per loro stessa natura, devono avere un significato preciso. Nemmeno il concetto di impulso può essere conservato senza cambiamenti. Poiché la misura esatta dell'impulso richiede un tempo sufficientemente lungo, risulta impossibile seguire l'andamento delle sue variazioni durante il processo di misura.

Ricordando quanto detto all'inizio di questo paragrafo, si arriva alla conclusione che tutto il formalismo della meccanica quantistica non relativistica diventa inadeguato nel passaggio al campo relativistico. Le funzioni d'onda $\psi(q)$, intese nel loro senso primitivo, in quanto portatrici di una informazione non osservabile, non possono figurare nell'apparato di una teoria relativistica coerente.

L'impulso può figurare in una teoria coerente solo nel caso di particelle libere, per le quali esso si conserva e può venire dunque misurato con una precisione arbitraria. Si può quindi pensare che la futura teoria dovrà rinunciare, in generale, a seguire l'evoluzione dei processi di interazione di particelle. Essa dimostrerà che in questi processi non esistono caratteristiche fisiche determinabili esattamente (neanche nei limiti di una precisione quantomeccanica « classica »), e quindi una descrizione nel tempo di un processo risulterà altrettanto illusoria quanto si sono rivelate illusorie le traiettorie classiche nella meccanica quantistica non relativistica. Le uniche grandezze osservabili saranno le caratteristiche (impulsi, polarizzazioni) delle particelle libere: le particelle iniziali che entrano in interazione e quelle che compaiono a risultato del processo (*L. D. Landau*, *R. Peierls*, 1930).

Il problema specifico della teoria quantistica relativistica consiste nella determinazione delle ampiezze di probabilità delle transizioni che legano stati iniziali e stati finali dati (per $t \to \mp\infty$) di un sistema di particelle. L'insieme di queste ampiezze di transizione tra tutti gli stati possibili forma la *matrice di diffusione* o *matrice S*. In questa matrice sarà tutta l'informazione circa i processi di interazione di particelle, informazione che ha un significato fisico osservabile (*W. Heisenberg*, 1938).

Notiamo inoltre che in questa teoria devono perdere il loro primitivo significato anche i concetti di « elementarità » e di « complessità » delle particelle, cioè la questione della costituzione degli

oggetti. Questo problema non può essere formulato senza considerare i processi di interazione delle particelle; non prendere in considerazione questi processi equivale, quindi, a svuotare di contenuto il problema posto. Tutte le particelle che figurano come iniziali o come finali in qualsiasi fenomeno fisico di collisione devono entrare nella teoria con « parità di diritti ». In questo senso, la differenza tra particelle che vengono di solito definite « composte » o « elementari » ha un carattere puramente quantitativo e si riduce alla grandezza relativa del difetto di massa rispetto alla disintegrazione nelle « parti componenti ». Per esempio, l'affermazione che il deutone è una particella composta (l'energia di legame è relativamente piccola rispetto alla disintegrazione in protone e neutrone) differisce solo quantitativamente dall'affermazione che il neutrone è « composto » da un protone e da un mesone π.

Fino ad oggi una teoria quantistica relativistica completa, logicamente chiusa, non è ancora stata costruita. Avremo modo di vedere che la teoria esistente introduce aspetti fisici nuovi nella descrizione dello stato delle particelle, che arriva ad assumere i tratti caratteristici della teoria dei campi (vedi § 10). Tuttavia la teoria viene oggi costruita, in larga misura, per analogia e con l'aiuto delle nozioni della meccanica quantistica. Una tale costruzione della teoria ha dato risultati positivi nel campo dell'elettrodinamica quantistica. Il fatto che questa teoria non sia logicamente chiusa si manifesta nell'apparizione di espressioni divergenti quando si applica direttamente il suo formalismo matematico. Esistono, però, metodi assolutamente univoci che permettono di eliminare queste divergenze. Ciononostante questi metodi conservano per lo piú un carattere di criteri semiempirici, e la sicurezza sull'esattezza dei risultati ottenuti in questo modo è fondata solo sulla loro concordanza con i risultati sperimentali, e non su una concordanza interna e su un'eleganza logica dei princípi fondamentali della teoria.

Una situazione completamente differente si ha nella teoria dei fenomeni connessi con le cosiddette interazioni forti delle particelle (forze nucleari). In questo campo, i tentativi di costruire una teoria, basata sugli stessi metodi, non hanno portato a risultati fisici di una qualche importanza. La costruzione di una teoria completa che includa anche le interazioni forti richiederà presumibilmente princípi fisici completamente nuovi.

Capitolo I

FOTONI

§ 2. *Quantizzazione del campo elettromagnetico libero*

Per poter considerare il campo elettromagnetico come un oggetto quantistico, conviene partire dalla descrizione classica del campo, in cui esso è caratterizzato da un insieme discreto, anche se infinito, di variabili; questo metodo permette di usare direttamente il formalismo solito della meccanica quantistica. Per quel che concerne la rappresentazione del campo mediante potenziali dati in ogni punto dello spazio essa è, in sostanza, una descrizione mediante un insieme continuo di variabili.

Sia $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ il potenziale vettore del campo elettromagnetico libero che soddisfa la « condizione di trasversalità »

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{2,1}$$

Allora il potenziale scalare $\Phi = 0$ e per i campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ si ha

$$\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}}, \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{2,2}$$

Le equazioni di Maxwell si riducono ad un'equazione d'onda per $\boldsymbol{A}$:

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{2,3}$$

Come è noto (vedi II, § 52), in elettrodinamica classica il passaggio ad una descrizione mediante un insieme discreto di variabili si realizza considerando il campo in una regione grande ma finita dello spazio V[1]). Ricordiamo qui il procedimento senza entrare nel dettaglio dei calcoli.

In un volume di spazio finito il campo può essere scomposto in onde piane progressive, cosí che il suo potenziale è rappresentato mediante una serie del tipo

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^* e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}), \tag{2,4}$$

dove i coefficienti $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}$ dipendono dal tempo secondo la legge

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}} \sim e^{-i\omega t}, \quad \omega = |\boldsymbol{k}|. \tag{2,5}$$

---

[1]) Per evitare di caricare le formule di indici, porremo $V = 1$.

Per la condizione (2,1) i vettori complessi $\boldsymbol{a}_k$ sono ortogonali ai corrispondenti vettori d'onda: $\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{k} = 0$.

La sommatoria nella (2,4) viene fatta su un insieme infinito e discreto di valori del vettore d'onda (le cui tre componenti sono k_x, k_y, k_z). Il passaggio all'integrazione su una distribuzione continua può essere effettuato mediante l'espressione

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

che dà il numero dei possibili valori di $\boldsymbol{k}$ riferiti all'elemento di volume dello spazio $\boldsymbol{k}$, ossia $d^3k = dk_x\, dk_y\, dk_z$.

Nel volume considerato il campo è determinato completamente dai vettori $\boldsymbol{a}_k$. In tal modo, queste grandezze si possono considerare come un insieme discreto di « variabili classiche di campo ». Per realizzare il passaggio alla teoria quantistica è necessario, tuttavia, fare ancora una trasformazione di queste variabili, in conseguenza della quale le equazioni di campo assumano forma analoga a quella delle equazioni canoniche (equazioni di Hamilton) della meccanica classica. Le variabili canoniche del campo sono determinate dalle relazioni

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(a_k + a_k^*), \\ P_k &= \frac{-i\omega}{\sqrt{4\pi}}(a_k - a_k^*) = \dot{Q}_k \end{aligned} \tag{2,6}$$

(queste variabili sono, evidentemente, reali). Il potenziale vettore si esprime attraverso le variabili canoniche secondo la relazione

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{4\pi}\sum_k \left(Q_k \cos \boldsymbol{kr} - \frac{1}{\omega} P_k \operatorname{sen} \boldsymbol{kr}\right). \tag{2,7}$$

Per trovare la funzione di Hamilton H occorre calcolare l'energia totale del campo

$$\frac{1}{8\pi}\int (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)\, d^3x,$$

esprimendola attraverso $\boldsymbol{Q}_k$, $\boldsymbol{P}_k$. Rappresentando $\boldsymbol{A}$ nella forma (2,7), calcolando $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ secondo la (2,2) e integrando, otteniamo

$$H = \frac{1}{2}\sum_k (P_k^2 + \omega^2 Q_k^2).$$

Ciascun vettore $\boldsymbol{P}_k$ e $\boldsymbol{Q}_k$ è perpendicolare al vettore d'onda $\boldsymbol{k}$, cioè ha due componenti indipendenti. La direzione di questi vettori determina la direzione della polarizzazione dell'onda corrispondente. Indicando le due componenti dei vettori $\boldsymbol{Q}_k$, $\boldsymbol{P}_k$ (nel piano perpendicolare a $\boldsymbol{k}$) con $Q_{k\alpha}$, $P_{k\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$), trascriviamo la funzione di

Hamilton nella forma

$$H = \sum_{k\alpha} \frac{1}{2} (P_{k\alpha}^2 + \omega^2 Q_{k\alpha}^2). \tag{2,8}$$

In tal modo, la funzione di Hamilton si scinde nella somma di membri indipendenti, ognuno dei quali contiene una coppia delle quantità $Q_{k\alpha}$, $P_{k\alpha}$. Ogni membro di questo tipo corrisponde ad un'onda progressiva con un dato vettore d'onda e una data polarizzazione ed ha la forma della funzione di Hamilton di un oscillatore armonico unidimensionale. Per questa ragione, si parla della scomposizione ottenuta come di una scomposizione del campo in *oscillatori*.

Passiamo ora alla quantizzazione del campo elettromagnetico libero. Il metodo classico di descrizione del campo, appena esposto, rende evidente il modo in cui si può realizzare il passaggio alla teoria quantistica. Le variabili canoniche, cioè le coordinate generalizzate $Q_{k\alpha}$ e gli impulsi generalizzati $P_{k\alpha}$, devono ora essere considerati come operatori con la seguente regola di commutazione

$$P_{k\alpha}Q_{k\alpha} - Q_{k\alpha}P_{k\alpha} = -i \tag{2,9}$$

(gli operatori con $k\alpha$ differenti commutano tra di loro). Insieme ad essi diventano operatori anche il potenziale **A** e (in accordo con la (2,2)) i campi **E** e **H**.

La determinazione dell'hamiltoniano del campo richiede il calcolo dell'integrale

$$\mathrm{H} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\, d^3x, \tag{2,10}$$

in cui **E** e **H** sono espressi mediante gli operatori $P_{k\alpha}$ e $Q_{k\alpha}$. In pratica, tuttavia, la non commutabilità di questi ultimi non si manifesta in alcun modo, poiché i prodotti $Q_{k\alpha} P_{k\alpha}$ entrano con il fattore cos kr sen kr, che si annulla nell'integrazione su tutto il volume. Per l'hamiltoniano si ottiene quindi l'espressione

$$\mathrm{H} = \sum_{k\alpha} \frac{1}{2} (P_{k\alpha}^2 + \omega^2 Q_{k\alpha}^2), \tag{2,11}$$

che corrisponde esattamente alla funzione classica di Hamilton, come era naturale attendersi.

La determinazione degli autovalori di questo hamiltoniano non richiede calcoli particolari, poiché si riduce al noto problema della determinazione dei livelli energetici di oscillatori lineari (vedi III, § 23). Quindi, per i livelli energetici del campo possiamo scrivere immediatamente

$$E = \sum_{k\alpha} \left(N_{k\alpha} + \frac{1}{2}\right) \omega, \tag{2,12}$$

dove $N_{k\alpha}$ sono numeri interi.

Esamineremo questa formula nel paragrafo seguente; ora scriviamo gli elementi di matrice delle quantità $Q_{k\alpha}$, cosa che si può fare usando direttamente le note formule per gli elementi di matrice delle coordinate di un oscillatore (vedi III, § 23). Gli elementi di matrice diversi da zero sono

$$\langle N_{k\alpha} | Q_{k\alpha} | N_{k\alpha}-1\rangle = \langle N_{k\alpha}-1 | Q_{k\alpha} | N_{k\alpha}\rangle = \sqrt{\frac{N_{k\alpha}}{2\omega}}. \qquad (2,13)$$

Gli elementi di matrice delle quantità $P_{k\alpha} = \dot{Q}_{k\alpha}$ differiscono dagli elementi di matrice di $Q_{k\alpha}$ soltanto per il fattore $\pm i\omega$.

Nei calcoli che seguiranno risulterà piú comodo, tuttavia, usare al posto delle quantità $Q_{k\alpha}$, $P_{k\alpha}$ le loro combinazioni lineari $\omega Q_{k\alpha} \pm \pm iP_{k\alpha}$, che hanno elementi di matrice diversi da zero solo per le transizioni $N_{k\alpha} \to N_{k\alpha} \pm 1$. In relazione a questo introduciamo gli operatori

$$\mathrm{c}_{k\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega \mathrm{Q}_{k\alpha} + i\mathrm{P}_{k\alpha}), \qquad \mathrm{c}^{+}_{k\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega \mathrm{Q}_{k\alpha} - i\mathrm{P}_{k\alpha}) \qquad (2,14)$$

(le grandezze classiche $c_{k\alpha}$, $c^{*}_{k\alpha}$ coincidono, a meno del fattore $\sqrt{2\pi/\omega}$, con i coefficienti $a_{k\alpha}$, $a^{*}_{k\alpha}$ nello sviluppo (2,4)). Gli elementi di matrice di questi operatori sono

$$\langle N_{k\alpha}-1 | \mathrm{c}_{k\alpha} | N_{k\alpha}\rangle = \langle N_{k\alpha} | \mathrm{c}^{+}_{k\alpha} | N_{k\alpha}-1\rangle = \sqrt{N_{k\alpha}}. \qquad (2,15)$$

La regola di commutazione degli operatori $\mathrm{c}_{k\alpha}$ e $\mathrm{c}^{+}_{k\alpha}$ si ottiene mediante le relazioni (2,14) e le regole (2,9):

$$\mathrm{c}_{k\alpha}\mathrm{c}^{+}_{k\alpha} - \mathrm{c}^{+}_{k\alpha}\mathrm{c}_{k\alpha} = 1. \qquad (2,16)$$

Per il potenziale vettore ritorniamo alla scomposizione (2,4), dove, però, i coefficienti sono ora degli operatori. Scriviamo la (2,4) nella forma

$$\mathbf{A} = \sum_{k\alpha} (\mathrm{c}_{k\alpha}\boldsymbol{A}_{k\alpha} + \mathrm{c}^{+}_{k\alpha}\boldsymbol{A}^{*}_{k\alpha}), \qquad (2,17)$$

dove

$$\boldsymbol{A}_{k\alpha} = \sqrt{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}. \qquad (2,18)$$

Abbiamo qui introdotto le notazioni $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ per i versori, che indicano la direzione della polarizzazione degli oscillatori. I versori $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ sono perpendicolari al vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ e per ogni $\boldsymbol{k}$ si hanno due polarizzazioni indipendenti.

In modo analogo per gli operatori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ scriviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{k\alpha} (\mathrm{c}_{k\alpha}\boldsymbol{E}_{k\alpha} + \mathrm{c}^{+}_{k\alpha}\boldsymbol{E}^{*}_{k\alpha}), \\ \mathbf{H} &= \sum_{k\alpha} (\mathrm{c}_{k\alpha}\boldsymbol{H}_{k\alpha} + \mathrm{c}^{+}_{k\alpha}\boldsymbol{H}^{*}_{k\alpha}), \end{aligned} \qquad (2,19)$$

dove

$$\boldsymbol{E}_{k\alpha} = i\omega \boldsymbol{A}_{k\alpha}, \quad \boldsymbol{H}_{k\alpha} = [\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}_{k\alpha}] \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega). \tag{2,20}$$

I vettori $\boldsymbol{A}_{k\alpha}$ sono mutuamente ortogonali nel senso che

$$\int \boldsymbol{A}_{k\alpha}\boldsymbol{A}^*_{k'\alpha'}\, d^3x = \frac{2\pi}{\omega}\,\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{kk'}. \tag{2,21}$$

In effetti, se $\boldsymbol{A}_{k\alpha}$ e $\boldsymbol{A}^*_{k'\alpha'}$ si differenziano per i vettori d'onda, il loro prodotto conterrà allora il fattore $e^{i(k-k')r}$, che si annulla nell'integrazione su tutto il volume; se invece essi si differenziano solo per le polarizzazioni, si ha allora $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}\boldsymbol{e}^{(\alpha')*} = 0$, poiché le due direzioni indipendenti della polarizzazione sono tra loro perpendicolari. Relazioni analoghe sono valide per i vettori $\boldsymbol{E}_{k\alpha}$, $\boldsymbol{H}_{k\alpha}$. È comodo scrivere la condizione di normalizzazione di queste ultime quantità nella forma

$$\frac{1}{4\pi}\int (\boldsymbol{E}_{k\alpha}\boldsymbol{E}^*_{k'\alpha'} + \boldsymbol{H}_{k\alpha}\boldsymbol{H}^*_{k'\alpha'})\, d^3x = \omega\delta_{kk'}\delta_{\alpha\alpha'}. \tag{2,22}$$

Sostituendo gli operatori (2,19) nella (2,10) e integrando usando la (2,22), otteniamo l'hamiltoniano del campo espresso mediante gli operatori $c_{k\alpha}$, $c^+_{k\alpha}$:

$$\mathrm{H} = \sum_{k\alpha} \frac{1}{2}(c_{k\alpha}c^+_{k\alpha} + c^+_{k\alpha}c_{k\alpha})\frac{1}{4\pi}\int (|\boldsymbol{E}_{k\alpha}|^2 + |\boldsymbol{H}_{k\alpha}|^2)\, d^3x =$$

$$= \sum_{k\alpha} \frac{1}{2}\omega\,(c_{k\alpha}c^+_{k\alpha} + c^+_{k\alpha}c_{k\alpha}). \tag{2,23}$$

Questo operatore, nella rappresentazione considerata (gli elementi di matrice degli operatori c, c^+ sono dati dalla (2,15)), è diagonale e i suoi autovalori coincidono, ovviamente, con la (2,12).

Nella teoria classica l'impulso del campo è determinato dall'integrale

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{4\pi}\int [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]\, d^3x.$$

Nel passaggio alla teoria quantistica si opera la sostituzione di $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ con gli operatori (2,19) e si arriva facilmente all'espressione

$$\mathbf{P} = \sum_{k\alpha} \frac{1}{2}(\mathrm{P}^2_{k\alpha} + \omega^2\mathrm{Q}^2_{k\alpha})\,\boldsymbol{n} \tag{2,24}$$

in corrispondenza con la nota relazione classica tra energia e impulso di onde piane. Gli autovalori di questo operatore sono

$$\boldsymbol{P} = \sum_{k\alpha} \boldsymbol{k}\left(N_{k\alpha} + \frac{1}{2}\right). \tag{2,25}$$

La rappresentazione di operatori, realizzata mediante gli elementi di matrice (2,15), è la « rappresentazione dei numeri di occupazione »; essa risponde alla descrizione degli stati del sistema (del campo) mediante l'assegnazione dei numeri quantici $N_{k\alpha}$ (*numeri di occupazione*). In questa rappresentazione gli operatori di campo (2,19) (e con essi anche l'hamiltoniano (2,11)) agiscono sulla funzione d'onda del sistema, espressa in funzione dei numeri di occupazione $N_{k\alpha}$; indichiamo questa funzione con $\Phi(N_{k\alpha}, t)$. Gli operatori di campo (2,19) non dipendono esplicitamente dal tempo. Questo corrisponde alla rappresentazione di Schrödinger degli operatori, usata di solito nella meccanica quantistica non relativistica. Dipendente dal tempo risulta lo stato del sistema $\Phi(N_{k\alpha}, t)$, e questa dipendenza è determinata dall'equazione di Schrödinger

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mathrm{H}\Phi.$$

Questa descrizione del campo è relativisticamente invariante, poiché si basa sulle equazioni invarianti di Maxwell. Questa invarianza non è però esplicita, innanzitutto perché le coordinate spaziali e il tempo compaiono in questa descrizione in modo molto asimmetrico.

Nella teoria relativistica è opportuno dare alla descrizione una forma piú chiaramente invariante. A questo scopo occorre ricorrere alla cosiddetta rappresentazione di Heisenberg, nella quale la dipendenza esplicita dal tempo passa agli operatori (vedi III, § 13). In tal modo, il tempo e le coordinate compariranno in modo simmetrico nelle espressioni degli operatori di campo, e lo stato del sistema Φ sarà funzione soltanto dei numeri di occupazione.

Per l'operatore **A** il passaggio alla rappresentazione di Heisenberg si riduce alla sostituzione in ogni membro della somma (2,17) del fattore e^{ikr} con il fattore $e^{i(kr-\omega t)}$, si riduce cioè al fatto che per $A_{k\alpha}$ occorre intendere la seguente funzione dipendente dal tempo

$$A_{k\alpha} = \sqrt{4\pi}\,\frac{e^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\,e^{-i(\omega t - kr)}. \tag{2,26}$$

Di questo è facile convincersi notando che l'elemento di matrice di un operatore di Heisenberg per la transizione $i \to f$ deve contenere il fattore $\exp\{-i(E_i - E_f)t\}$, dove E_i e E_f sono, rispettivamente, l'energia dello stato iniziale e finale (vedi III, § 13). Per transizioni con diminuzione o aumento di N_k di 1 questo fattore si riduce a $e^{-i\omega t}$ oppure a $e^{i\omega t}$ rispettivamente. La sostituzione sopraindicata soddisfa questa richiesta.

In seguito (sia se si considererà il campo elettromagnetico che i campi di particelle) si intenderà ovunque che si lavora nella rappresentazione di Heisenberg degli operatori.

§ 3. *Fotoni*

Esaminiamo ora le formule della quantizzazione del campo che abbiamo ottenuto.

Notiamo innanzitutto che la formula (2,12) per l'energia del campo presenta la seguente difficoltà: il livello energetico piú basso del campo si ha quando i numeri quantici $N_{k\alpha}$ di tutti gli oscillatori sono uguali a zero (questo stato è chiamato stato di *vuoto del campo elettromagnetico*). Anche in questo stato però ogni oscillatore possiede un'« energia di punto zero » $\omega/2$ diversa da zero. Sommando sul numero infinito di oscillatori otteniamo infinito. In tal modo incontriamo una delle « divergenze » che conseguono dal fatto che la teoria esistente non è del tutto logicamente chiusa.

Finché si tratta degli autovalori dell'energia del campo, questa difficoltà può essere eliminata semplicemente cancellando le energie delle oscillazioni di punto zero, ossia scrivendo l'energia e l'impulso del campo come segue[1]):

$$E = \sum_{k\alpha} N_{k\alpha}\omega, \quad P = \sum_{k\alpha} N_{k\alpha}\boldsymbol{k}. \tag{3,1}$$

Queste formule permettono di introdurre il concetto, fondamentale per tutta l'elettrodinamica quantistica, di *quanti di luce* o *fotoni*[2]). Ossia, noi possiamo considerare il campo elettromagnetico libero come un insieme di particelle, ognuna delle quali possiede l'energia ω $(=\hbar\omega)$ e l'impulso $\boldsymbol{k}$ $(=n\hbar\omega/c)$. La relazione fra energia e impulso di un fotone è la stessa che esiste in meccanica relativistica per le particelle di massa di quiete nulla che si muovono alla velocità della luce. I numeri di occupazione $N_{k\alpha}$ prendono il significato del numero di fotoni con i dati impulsi $\boldsymbol{k}$ e le date polarizzazioni $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$. La proprietà di polarizzazione del fotone è analoga al concetto di spin per le altre particelle (le proprietà specifiche del fotone a questo riguardo verranno esaminate piú avanti nel § 6).

È facile vedere che tutto il formalismo matematico, sviluppato nel paragrafo precedente, risulta pienamente corrispondente alla rappresentazione del campo elettromagnetico come di un insieme di fotoni; questo non è altro che l'apparato del metodo della seconda quantizzazione applicato ad un sistema di fotoni[3]). In questo metodo (vedi III, § 64) il ruolo di variabili indipendenti è svolto dai numeri di occupazione degli stati e gli operatori agiscono sulle funzioni di

---

[1]) Questa cancellatura può essere fatta formalmente, in maniera non contraddittoria, convenendo di intendere i prodotti nella (2,10) come prodotti « normali », ossia tali che gli operatori c^+ si trovino sempre a sinistra degli operatori c. La formula (2,23) si scriverà allora nella forma $H = \sum_{k\alpha} \omega c^+_{k\alpha} c_{k\alpha}$.

[2]) Il concetto di fotone fu introdotto da *A. Einstein* (1905).

[3]) Il metodo della seconda quantizzazione nell'applicazione alla teoria della radiazione fu sviluppato da *P. A. M. Dirac* (1927).

questi numeri. Il ruolo fondamentale è svolto dagli operatori di « annichilazione » e di « creazione » di particelle, operatori che diminuiscono o aumentano di un'unità il numero di occupazione. Di questo tipo sono gli operatori $c_{k\alpha}$, $c^{+}_{k\alpha}$: l'operatore $c_{k\alpha}$ distrugge un fotone nello stato $k\alpha$, e $c^{+}_{k\alpha}$ crea un fotone in questo stesso stato.

La regola di commutazione (2,16) corrisponde al caso di particelle che obbediscono alla statistica di Bose. Quindi i fotoni sono dei bosoni, come era da aspettarsi sin dall'inizio: il numero ammissibile di fotoni in qualsiasi stato deve essere arbitrario (ritorneremo ancora sull'importanza di questo fatto nel § 5).

Le onde piane $\boldsymbol{A}_{k\alpha}$ (2,26), che figurano nell'operatore **A** (2,17) in qualità di coefficienti davanti agli operatori di annichilazione di fotoni, possono essere considerate come funzioni d'onda di fotoni che hanno determinati impulsi $\boldsymbol{k}$ e determinate polarizzazioni $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$. Questa trattazione corrisponde allo sviluppo dell'operatore ψ in serie di funzioni d'onda degli stati stazionari di una particella nel formalismo non relativistico di seconda quantizzazione (a differenza di quest'ultimo, tuttavia, nello sviluppo (2,17) entrano sia gli operatori di annichilazione che gli operatori di creazione di particelle; il significato di questa differenza verrà chiarito piú avanti; vedi § 12).

La funzione d'onda (2,26) è normalizzata con la condizione

$$\int \frac{1}{4\pi} (|\boldsymbol{E}_{k\alpha}|^2 + |\boldsymbol{H}_{k\alpha}|^2)\, d^3x = \omega. \tag{3,2}$$

Questa è la normalizzazione su « un fotone per il volume $V = 1$ ». In effetti, l'integrale nella parte sinistra dell'uguaglianza rappresenta il valore quantomeccanico medio dell'energia di un fotone nello stato con la data funzione d'onda (questa interpretazione risulta evidente dalla rappresentazione dell'hamiltoniano nella forma della (2,23) alla prima riga)[1]. Nel membro a destra dell'uguaglianza (3,2) c'è l'energia di un fotone.

Il ruolo dell'« equazione di Schrödinger » per il fotone è svolto dalle equazioni di Maxwell. Nel caso considerato (per il potenziale $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ che soddisfa la condizione (2,1)) l'equazione d'onda è

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{A} = 0.$$

Le « funzioni d'onda » del fotone nel caso generale di stati stazionari qualsiasi sono date dalle soluzioni complesse di questa equazione, la dipendenza dal tempo essendo data dal fattore $e^{-i\omega t}$.

Parlando di funzione d'onda del fotone, sottolineiamo ancora una volta che essa non può essere considerata come l'ampiezza di

[1]) Richiamiamo l'attenzione sul fatto che il coefficiente $1/4\pi$ nell'integrale (3,2) è due volte maggiore del coefficiente $1/8\pi$ nella (2,10). Questa differenza è legata, in ultima analisi, con la complessità dei vettori $\boldsymbol{E}_{k\alpha}$, $\boldsymbol{H}_{k\alpha}$, a differenza degli operatori di campo **E**, **H**, che sono reali.

probabilità della localizzazione spaziale del fotone, contrariamente al significato fondamentale della funzione d'onda nella meccanica quantistica non relativistica. Questo è legato al fatto che (come è stato detto nel § 1) il concetto di coordinate di un fotone non ha senso fisico. Sull'aspetto matematico di questa situazione ritorneremo ancora alla fine del paragrafo seguente.

Le componenti dello sviluppo di Fourier della funzione $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ secondo le coordinate formano la funzione d'onda del fotone nella rappresentazione degli impulsi; la indicheremo con $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})\, e^{-i\omega t}$. Cosí, per uno stato con un dato impulso $\boldsymbol{k}$ e una data polarizzazione $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$, la funzione d'onda nella rappresentazione degli impulsi è data semplicemente dal coefficiente davanti al fattore esponenziale nella (2,26):

$$A_{k\alpha}(\boldsymbol{k}', \alpha') = \sqrt{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\,\delta_{k'k}\delta_{\alpha'\alpha}. \tag{3,3}$$

In relazione alla misurabilità dell'impulso di una particella libera la funzione d'onda nella rappresentazione degli impulsi ha un senso fisico piú profondo che non la funzione d'onda nella rappresentazione delle coordinate: essa dà la possibilità di calcolare le probabilità $w_{k\alpha}$ dei diversi valori dell'impulso e della polarizzazione del fotone che si trova nello stato considerato. Secondo le regole generali della meccanica quantistica $w_{k\alpha}$ è determinata dal quadrato dei moduli dei coefficienti dello sviluppo della funzione $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}')$ secondo le funzioni d'onda di stati con determinati $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$:

$$w_{k\alpha} \sim \Big|\sum_{k'\alpha'} A^*_{k\alpha}(\boldsymbol{k}', \alpha')\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}')\Big|^2$$

(il coefficiente di proporzionalità dipende dalla condizione di normalizzazione). Sostituendo con la (3,3) otteniamo

$$w_{k\alpha} \sim |\boldsymbol{e}^{(\alpha)}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|^2. \tag{3,4}$$

Sommando sulle due polarizzazioni troviamo la probabilità per il fotone di avere l'impulso $\boldsymbol{k}$:

$$w_k \sim |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|^2. \tag{3,5}$$

§ 4. *Invarianza di gauge*

Come è noto, la scelta dei potenziali del campo nell'elettrodinamica classica non è univoca: le componenti del 4-potenziale A_μ possono essere sottoposte a qualsiasi trasformazione di *gauge* (o *gradiente*) del tipo

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi, \tag{4,1}$$

dove χ è una funzione qualsiasi delle coordinate e del tempo (vedi II, § 18).

Per un'onda piana, se ci si limita a trasformazioni che non cambiano la forma del potenziale (la sua proporzionalità al fattore $\exp(-ik_\mu x^\mu)$), la non univocità si riduce alla possibilità di aggiungere all'ampiezza d'onda un quadrivettore qualsiasi, proporzionale al quadrivettore k^μ.

La non univocità del potenziale si conserva, naturalmente, anche nella teoria quantistica relativamente agli operatori di campo o alle funzioni d'onda dei fotoni. Senza precisare il modo con cui si scelgono i potenziali, è necessario scrivere, al posto della (2,17), uno sviluppo analogo per il 4-potenziale operatore

$$A^\mu = \sum_{k\alpha} (c_{k\alpha} A^\mu_{k\alpha} + c^+_{k\alpha} A^{\mu *}_{k\alpha}), \tag{4,2}$$

dove le funzioni d'onda $A^\mu_{k\alpha}$ sono dei quadrivettori del tipo

$$A^\mu_k = \sqrt{4\pi}\, \frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}}\, e^{-ik_\nu x^\nu}, \quad e_\mu e^{\mu *} = -1,$$

oppure, in una forma piú breve, omettendo gli indici dei vettori quadridimensionali

$$A_k = \sqrt{4\pi}\, \frac{e}{\sqrt{2\omega}}\, e^{-ikx}, \quad ee^* = -1, \tag{4,3}$$

dove il 4-impulso $k^\mu = (\omega, \boldsymbol{k})$ (cosí che $kx = \omega t - \boldsymbol{kr}$), e e è il quadrivettore unità di polarizzazione[1]).

Limitandosi alle trasformazioni di gauge, che non cambiano la dipendenza della funzione (4,3) dalle coordinate e dal tempo, queste trasformazioni si riducono alla sostituzione

$$e_\mu \to e_\mu + \chi^k_\mu, \tag{4,4}$$

dove $\chi = \chi(k^\mu)$ è una funzione qualsiasi. La trasversalità della polarizzazione significa che esiste sempre un « gauge » tale che in esso il quadrivettore e ha la forma

$$e^\mu = (0, \boldsymbol{e}), \quad \boldsymbol{ek} = 0 \tag{4,5}$$

(questo gauge lo chiameremo *trasversale tridimensionale*). La formulazione invariante quadridimensionale di questa condizione si scrive

$$ek = 0. \tag{4,6}$$

Notiamo che questa condizione (come anche la condizione di normalizzazione $ee^* = -1$) non viene violata dalla trasformazione (4,4) in conseguenza del fatto che $k^2 = 0$. D'altra parte, l'annullarsi del quadrato del 4-impulso di una particella comporta che quest'ulti-

[1]) L'espressione (4,3) non ha una forma completamente covariante (quadrivettoriale); questo è legato al carattere non invariante della normalizzazione da noi scelta sul volume finito $V = 1$. Questo fatto, tuttavia, non è fondamentale e si riscatta pienamente con i vantaggi offerti da questa condizione di normalizzazione. Vedremo piú avanti che essa assicura un modo semplice e automatico per ottenere le quantità fisiche reali nella forma invariante necessaria.

ma ha massa zero. Si chiarisce cosí il legame tra l'invarianza di gauge e il fatto che il fotone abbia massa zero (altri aspetti di questo legame saranno considerati nel § 14).

Nessuna grandezza fisica misurabile deve cambiare in una trasformazione di gauge delle funzioni d'onda dei fotoni che intervengono nel processo. La condizione di *invarianza di gauge* svolge nell'elettrodinamica quantistica un ruolo ancora piú importante che non nella teoria classica. Vedremo sulla base di numerosi esempi come essa costituisca, insieme alla condizione di invarianza relativistica, un potente principio euristico.

A sua volta l'invarianza di gauge della teoria è strettamente legata con la legge di conservazione della carica elettrica; su questo aspetto ci fermeremo nel § 43.

Abbiamo già accennato nel paragrafo precedente al fatto che la funzione d'onda del fotone, nella rappresentazione delle coordinate, non può essere interpretata come l'ampiezza di probabilità della sua localizzazione spaziale. Matematicamente questo fatto si manifesta nell'impossibilità di comporre mediante la funzione d'onda una grandezza che possa, per le sue proprietà formali, svolgere il ruolo della densità di probabilità. Questa grandezza dovrebbe essere espressa mediante una combinazione bilineare essenzialmente positiva della funzione d'onda A_μ e della sua coniugata complessa. Inoltre essa dovrebbe soddisfare determinate condizioni di covarianza relativistica, rappresentare cioè la componente temporale di un quadrivettore (in effetti, l'equazione di continuità, che esprime la conservazione del numero di particelle, nella forma quadridimensionale si scrive ponendo uguale a zero la divergenza del quadrivettore corrente; la componente temporale di quest'ultima è, nel caso considerato, la densità di probabilità della localizzazione della particella; vedi II, § 29). D'altra parte, in forza della condizione di invarianza di gauge, il quadrivettore A_μ potrebbe entrare nella corrente soltanto in forma del tensore antisimmetrico $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -i\,(k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu)$. In questo modo il quadrivettore corrente dovrebbe essere una combinazione bilineare di $F_{\mu\nu}$ e $F^*_{\mu\nu}$ (e delle componenti del quadrivettore k_μ). Un quadrivettore del genere non si può formare: qualsiasi espressione, che soddisfi le condizioni poste (ad esempio $k^\lambda F^*_{\mu\nu} F^\nu_\lambda$), si annulla in forza della condizione di trasversalità ($k^\lambda F_{\nu\lambda} = 0$) senza poi parlare del fatto che essa non sarebbe essenzialmente positiva (contenendo essa le potenze dispari delle componenti k_μ).

§ 5. *Campo elettromagnetico nella teoria quantistica*

La descrizione del campo come un insieme di fotoni è l'unica descrizione adeguata per quanto concerne il senso fisico del campo elettromagnetico nella teoria quantistica. Essa sostituisce la descri-

zione classica mediante le intensità del campo. Queste, nel formalismo matematico della descrizione fotonica, compaiono come operatori di seconda quantizzazione.

Come è noto, le proprietà di un sistema quantistico diventano simili alle proprietà classiche in quei casi in cui i numeri quantici, che determinano gli stati stazionari del sistema, sono grandi.

Per il campo elettromagnetico libero (in un dato volume) questo significa che devono essere grandi i numeri quantici degli oscillatori, cioè il numero di fotoni $N_{k\alpha}$. In questo senso, il fatto che i fotoni obbediscano alla statistica di Bose ha un significato profondo. Nel formalismo matematico della teoria la connessione della statistica di Bose con le proprietà del campo classico si manifesta nelle regole di commutazione degli operatori $c_{k\alpha}$, $c^{+}_{k\alpha}$. Per $N_{k\alpha}$ grandi, quando sono grandi gli elementi di matrice di questi operatori, si può trascurare l'unità nella parte destra della relazione di commutazione (2,16) e si ottiene quindi

$$c_{k\alpha}c^{+}_{k\alpha} \approx c^{+}_{k\alpha}c_{k\alpha},$$

cioè questi operatori si trasformano nelle grandezze commutative classiche $c_{k\alpha}$, $c^{*}_{k\alpha}$, che determinano le intensità classiche del campo.

La condizione di quasi-classicità del campo richiede, tuttavia, un'ulteriore precisazione. Infatti, se sono grandi tutti i numeri $N_{k\alpha}$, sommando su tutti gli stati $k\alpha$ l'energia del campo risulterà, in ogni caso, infinita, cosí che la condizione si svuota di contenuto.

Un'impostazione fisicamente sensata del problema delle condizioni di quasi-classicità comporta il considerare i valori del campo mediati rispetto ad un piccolo intervallo di tempo Δt. Se si rappresenta il campo elettrico classico $\boldsymbol{E}$ (o il campo magnetico $\boldsymbol{H}$) sotto forma di trasformata di Fourier rispetto al tempo, nell'eseguire la media sull'intervallo di tempo Δt, un contributo significativo nel valore medio $\overline{\boldsymbol{E}}$ è dato soltanto da quelle componenti di Fourier, le cui frequenze soddisfano la condizione $\omega\Delta t \lesssim 1$; in caso contrario, mediando il fattore oscillante $e^{-i\omega t}$ si annulla. Per questa ragione, nel definire le condizioni di quasi-classicità del campo medio occorre considerare solo quegli oscillatori quantistici, le cui frequenze $\omega \lesssim 1/\Delta t$. È sufficiente richiedere allora che siano grandi i numeri quantici di questi oscillatori.

Il numero di oscillatori di frequenza compresa tra lo zero e $\omega \sim 1/\Delta t$ (riferito al volume $V = 1$) è, per ordine di grandezza, uguale a[1])

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \sim \frac{1}{(c\Delta t)^3}. \tag{5,1}$$

L'energia totale del campo nell'unità di volume è $\sim \overline{\boldsymbol{E}}^2$. Dividendo questa quantità per il numero degli oscillatori e per l'energia media

[1]) In questo paragrafo usiamo le unità ordinarie.

di un singolo fotone ($\sim\hbar\omega$) troviamo l'ordine di grandezza dei numeri dei fotoni

$$N_k \sim \frac{\overline{E^2}c^3}{\hbar\omega^4}.$$

Ponendo la condizione che questo numero sia grande, otteniamo la disuguaglianza

$$|E| \gg \frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}. \tag{5,2}$$

Questa è la condizione cercata, che rende ammissibile una trattazione classica del campo medio (su intervalli di tempo Δt). Si vede che il campo deve essere sufficientemente intenso, tanto piú intenso, quanto minore è l'intervallo Δt, sul quale è eseguita la media. Per campi variabili questo intervallo non deve, ovviamente, essere maggiore dei periodi di tempo, nel corso dei quali il campo cambia in maniera notevole. Per questa ragione, campi variabili sufficientemente deboli non possono essere, in ogni caso, quasi-classici. Solo nel caso di campi statici (costanti nel tempo) si può porre $\Delta t \to \infty$, in modo che il membro a destra della disuguaglianza (5,2) si annulli. Questo significa che il campo statico è sempre classico.

Abbiamo già detto che le espressioni classiche del campo elettromagnetico sotto forma di sovrapposizione di onde piane, nella teoria quantistica, si devono considerare come espressioni operatoriali. Il senso fisico di questi operatori, tuttavia, è molto limitato. Effettivamente, un operatore di campo fisicamente sensato dovrebbe portare a valori nulli del campo nello stato di vuoto fotonico. Invece, il valore medio dell'operatore di quadrato del campo $\mathbf{E}^2$ nello stato fondamentale, che coincide, a meno di un fattore di fase, con l'energia di vuoto del campo, risulta infinita (per « valore medio » noi intendiamo il valore medio quantomeccanico, cioè il corrispondente elemento di matrice diagonale dell'operatore). Evitare questo risulta impossibile anche mediante un'operazione formale di eliminazione (come si può fare per l'energia del campo), poiché in questo caso si dovrebbe fare questa operazione cambiando in maniera sensata la forma stessa degli operatori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ (e non dei loro quadrati), cosa che risulta impossibile. In tal modo, contrariamente agli operatori quantomeccanici soliti, agli operatori di campo, in elettrodinamica quantistica, non sono associate grandezze aventi senso fisico.

§ 6. Momento angolare e parità del fotone

Come ogni particella, il fotone può avere un momento angolare determinato. Per chiarire le proprietà di questa grandezza del fotone, ricordiamo preventivamente come sono legati, nel formalismo della meccanica quantistica, le proprietà della funzione d'onda di una particella col suo momento angolare.

Il momento angolare $\boldsymbol{j}$ di una particella si compone del suo momento orbitale $\boldsymbol{l}$ e del suo momento intrinseco o spin $\boldsymbol{s}$. La funzione d'onda di una particella con spin s è uno spinore simmetrico di rango $2s$, rappresenta cioè un insieme di $2s + 1$ componenti, che nelle rotazioni del sistema di coordinate si trasformano tra di loro secondo una determinata legge. Il momento angolare orbitale è legato con la dipendenza spaziale delle funzioni d'onda: a stati con momento angolare orbitale l corrispondono funzioni d'onda le cui componenti si esprimono (linearmente) mediante le funzioni sferiche di ordine l.

La possibilità di separare in modo coerente lo spin e il momento angolare orbitale richiede, di conseguenza, che le proprietà « di spin » e « di coordinate » della funzione d'onda siano indipendenti: la dipendenza dalle coordinate delle componenti di uno spinore (in un dato istante di tempo) non deve essere limitata da nessuna condizione addizionale.

Nella rappresentazione dell'impulso delle funzioni d'onda, alla dipendenza spaziale corrisponde una dipendenza dall'impulso $\boldsymbol{k}$. Funzione d'onda del fotone è (nel gauge trasversale tridimensionale) il vettore $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$. Un vettore è equivalente ad uno spinore di rango 2 e in questo senso si potrebbe assegnare al fotone spin 1. Questa funzione d'onda vettoriale, tuttavia, è sottoposta alla condizione di trasversalità $\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) = 0$, che rappresenta una condizione addizionale imposta alla dipendenza dall'impulso del vettore $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$. Di conseguenza, questa dipendenza non può venire data per tutte le componenti del vettore simultaneamente in maniera arbitraria; questo fatto porta all'impossibilità di separare il momento angolare orbitale dallo spin.

Notiamo che al fotone è inapplicabile anche la definizione di spin come momento angolare della particella in quiete, poiché per il fotone che si muove alla velocità della luce, non esiste un sistema di quiete.

Per il fotone, pertanto, si può parlare solo del suo momento angolare totale. È evidente a priori che il momento angolare totale può prendere solo valori interi. Questo si vede già dal fatto che tra le grandezze, che caratterizzano il fotone, non ci sono spinori di rango dispari.

Come per qualsiasi particella, lo stato del fotone è caratterizzato anche dalla sua parità, legata al comportamento della funzione d'onda nell'inversione del sistema di coordinate (vedi III, § 30). Nella rappresentazione dell'impulso al cambiamento di segno delle coordinate corrisponde il cambiamento di segno di tutte le componenti di $\boldsymbol{k}$. L'azione dell'operatore di inversione P su una funzione scalare $\varphi(\boldsymbol{k})$ consiste solo in questo cambiamento: $P\varphi(\boldsymbol{k}) = \varphi(-\boldsymbol{k})$. Agendo con questo operatore sulla funzione vettoriale $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ è necessario tener conto anche che il cambiamento di direzione degli assi cambia il

segno di tutte le componenti del vettore; ossia si ha[1])

$$\mathrm{P}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{k}). \tag{6,1}$$

Sebbene la suddivisione del momento angolare del fotone in momento angolare orbitale e spin non abbia senso fisico, risulta tuttavia comodo introdurre lo « spin » s e il « momento angolare orbitale » l in modo formale come concetti ausiliari, che esprimono le proprietà della funzione d'onda rispetto alle rotazioni: il valore $s = 1$ risponde alla vettorialità della funzione d'onda mentre il valore di l dà l'ordine delle funzioni sferiche che compaiono in essa. Noi intendiamo qui le funzioni d'onda di stati con valori determinati del momento angolare del fotone, che per una particella libera sono onde sferiche. Il numero quantico l determina, in particolare, la parità di stato del fotone che è

$$P = (-1)^{l+1}. \tag{6,2}$$

In questo stesso senso si può rappresentare l'operatore del momento angolare $\mathbf{j}$ come la somma $\mathbf{s}+\mathbf{l}$. L'operatore del momento angolare è legato, come è noto, con l'operatore di rotazione infinitesima del sistema di coordinate; nel nostro caso è legato con l'azione di questo operatore su un campo vettoriale. Nella somma $\mathbf{s} + \mathbf{l}$ l'operatore $\mathbf{s}$ agisce sull'indice vettoriale trasformando tra di loro le diverse componenti del vettore. L'operatore $\mathbf{l}$ agisce su queste componenti come su funzioni dell'impulso (o delle coordinate).

Determiniamo il numero di stati (con una data energia) che sono possibili per un dato valore j del momento angolare del fotone (senza contare la degenerazione banale di ordine $(2j + 1)$ rispetto alle direzioni del momento angolare).

Per $\boldsymbol{l}$ e $\boldsymbol{s}$ indipendenti questo calcolo si fa facilmente contando il numero dei modi in cui i momenti $\boldsymbol{l}$ e $\boldsymbol{s}$ si possono comporre, secondo le regole della composizione di vettori, in maniera da ottenere il valore dato j. Per una particella a spin $s = 1$ si ottengono cosí (per un dato valore j diverso da zero) tre stati con i seguenti valori di l e della parità:

$$l = j, \quad P = (-1)^{l+1} = (-1)^{j+1}; \quad l = j \pm 1, \quad P = (-1)^{l+1} = (-1)^{j}.$$

Se invece $j = 0$ si ottiene in tutto un solo stato (con $l = 1$) e di parità $P = +1$.

---

[1]) Noi conveniamo di determinare la parità di stato secondo l'azione dell'operatore d'inversione su un vettore polare, quale è $\boldsymbol{A}$ (o il corrispondente vettore elettrico $\boldsymbol{E} = i\omega\boldsymbol{A}$). L'azione su un vettore assiale $\boldsymbol{H} = i\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}]$ si differenzia per il segno poiché l'inversione non cambia la direzione del vettore:

$$\mathrm{P}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{H}(-\boldsymbol{k}).$$

In questo calcolo, tuttavia, non si è tenuto conto della condizione di trasversalità del vettore $\boldsymbol{A}$: le sue tre componenti si sono considerate come indipendenti. Quindi, dal numero ottenuto di stati occorre sottrarre il numero di stati corrispondenti al vettore longitudinale. Un vettore di questo tipo si può scrivere nella forma $\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k})$, da cui si vede che per le sue proprietà di trasformazione (nelle rotazioni) le sue tre componenti sono equivalenti ad un solo scalare φ[1]). Di conseguenza, si può dire che lo stato superfluo, incompatibile con la condizione di trasversalità, corrisponderebbe ad uno stato della particella con funzione d'onda scalare (spinore di rango 0), ossia con « spin 0 »[2]). Il momento angolare j di questo stato coincide perciò con l'ordine delle funzioni sferiche che compaiono in φ. La parità di questo stato come stato di un fotone è determinata dall'azione dell'operatore di inversione sulla funzione vettoriale $\boldsymbol{k}\varphi$:

$$P(\boldsymbol{k}\varphi) = -(-\boldsymbol{k})\,\varphi(-\boldsymbol{k}) = (-1)^j\,\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k}),$$

cioè è uguale a $(-1)^j$. Quindi, dal numero di stati di parità $(-1)^j$ ottenuto prima (due per $j \neq 0$ e uno per $j = 0$) occorre sottrarne uno.

In definitiva siamo giunti al risultato che per un valore j del momento angolare diverso da zero esistono uno stato pari e uno stato dispari. Per $j = 0$ non si ha nessuno stato. Questo significa che il fotone non può, in generale, avere momento angolare zero e quindi questa grandezza assume solo i valori 1, 2, 3, . . . L'impossibilità del valore $j = 0$ è evidente, tra l'altro, anche perché la funzione d'onda di uno stato con momento angolare zero deve avere simmetria sferica, cosa evidentemente impossibile per un'onda trasversale.

Per i differenti stati di un fotone esiste una terminologia convenzionale. Un fotone in uno stato con momento angolare j e parità $(-1)^j$ è detto fotone *elettrico* 2^j*-polare* (o fotone Ej), mentre se la parità è $(-1)^{j+1}$ è detto fotone *magnetico* 2^j*-polare* (o fotone Mj). Cosí ad un fotone di dipolo elettrico corrisponde uno stato dispari con $j = 1$, ad un fotone di quadrupolo elettrico uno stato pari con $j = 2$, ad un fotone di dipolo magnetico uno stato pari con $j = 1$[3]).

---

[1]) In effetti, quando si parla del carattere della trasformazione di una grandezza in una rotazione, si intende una rotazione in un punto dato, cioè per un dato $\boldsymbol{k}$. In una trasformazione del genere $\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k})$, in generale, non cambia, ossia si comporta come uno scalare.

[2]) Sottolineiamo ancora una volta che qui non si parla di uno stato di una qualsiasi particella reale. Il calcolo effettuato ha carattere formale e si riduce, da un punto di vista matematico, alla classificazione di tutto l'insieme di grandezze che si trasformano tra di loro secondo le rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni.

[3]) Queste denominazioni corrispondono alla terminologia della teoria classica della radiazione: vedremo piú avanti (§§ 46, 47) che la radiazione di fotoni di tipo elettrico e di tipo magnetico è determinata dai corrispondenti momenti elettrici e magnetici di un sistema di cariche.

§ 7. *Onde sferiche di fotoni*

Dopo aver determinato i valori possibili del momento angolare del fotone, dobbiamo ora trovare le funzioni d'onda corrispondenti[1].

Consideriamo dapprima il problema formale seguente: trovare le funzioni vettoriali che siano le autofunzioni degli operatori $\mathbf{j}^2$ e $\mathbf{j}_z$; nel fare questo noi non fissiamo a priori quali di queste funzioni compaiono nelle funzioni d'onda del fotone che ci interessano e non terremo conto nemmeno della condizione di trasversalità.

Cercheremo le funzioni nella rappresentazione dell'impulso. Operatore delle coordinate in questa rappresentazione è $\mathbf{r} = i\partial/\partial \boldsymbol{k}$ (vedi III (15,12)). L'operatore del momento angolare orbitale

$$\mathbf{l} = [\mathbf{r}\boldsymbol{k}] = -i\left[\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right],$$

cioè si differenzia dall'operatore del momento angolare nella rappresentazione delle coordinate soltanto per la sostituzione della lettera $\boldsymbol{r}$ con la lettera $\boldsymbol{k}$. Per questo, la soluzione del problema posto è formalmente uguale in ambedue le rappresentazioni.

Indichiamo le autofunzioni cercate con $\boldsymbol{Y}_{jm}$, che chiameremo *vettori sferici*. Essi devono soddisfare le equazioni

$$\mathbf{j}^2\boldsymbol{Y}_{jm} = j(j+1)\,\boldsymbol{Y}_{jm},\quad \mathbf{j}_z\boldsymbol{Y}_{jm} = m\boldsymbol{Y}_{jm} \tag{7,1}$$

(l'asse z è una direzione fissata nello spazio). Mostriamo che di questa proprietà gode qualsiasi funzione del tipo $\boldsymbol{a}Y_{jm}$, dove $\boldsymbol{a}$ è un qualsiasi vettore formato con il versore $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$, e Y_{jm} sono funzioni sferiche ordinarie (scalari). La definizione di queste ultime è data nel vol. III, § 28:

$$Y_{lm}(\boldsymbol{n}) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\, i^l \sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-|m|)!}{4\pi\,(l+|m|)!}}\, P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi} \tag{7,2}$$

(θ, φ sono gli angoli sferici individuati dalla direzione del versore $\boldsymbol{n}$)[2].

Ricordiamo a questo proposito la regola di commutazione III (29,4)

$$\{\mathbf{l}_i,\ a_k\}_- = ie_{ikl}a_l.$$

La parte a destra di questa uguaglianza si può scrivere nella forma $(-\mathbf{s}_i a_k)$, dove $\mathbf{s}$ è l'operatore di spin 1 (l'azione di questo operatore

---

[1]) Questo problema fu considerato per la prima volta da *W. Heitler* (1936). Il metodo di soluzione esposto nel testo è di *V. B. Berestetskij* (1947).

[2]) Per eventuali riferimenti scriviamo il valore di queste funzioni per $\theta = 0$ ($\boldsymbol{n}$ è diretto lungo l'asse z):

$$Y_{lm}(\boldsymbol{n}_z) = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\delta_{m0}. \tag{7,2a}$$

su una funzione vettoriale è determinata dall'uguaglianza $s_i a_k = -ie_{ikl} a_l$; vedi III, § 57, problema 2). Abbiamo quindi

$$l_i a_k - a_k l_i = -s_i a_k.$$

Servendoci di questa uguaglianza troviamo

$$j_i a_k = (l_i + s_i) a_k = a_k l_i.$$

Quindi

$$\mathbf{j}^2 (\boldsymbol{a} Y_{jm}) = \boldsymbol{a} \mathbf{l}^2 Y_{jm}, \quad j_z (\boldsymbol{a} Y_{jm}) = \boldsymbol{a} l_z Y_{jm}.$$

La funzione sferica Y_{jm} è l'autofunzione degli operatori $\mathbf{l}^2$ e l_z, corrispondente agli autovalori $j(j+1)$ e m di queste grandezze; si arriva quindi alle uguaglianze (7,1).

Tre tipi essenzialmente differenti di vettori sferici si otterranno scegliendo nel ruolo di vettore $\boldsymbol{a}$ uno dei vettori seguenti[1]):

$$\frac{\nabla_{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad \frac{[\boldsymbol{n}\nabla_n]}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad \boldsymbol{n}. \tag{7,3}$$

I vettori sferici sono quindi definiti come segue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}_{jm}^{(e)} &= \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \nabla_n Y_{jm}, & P &= (-1)^j; \\ \boldsymbol{Y}_{jm}^{(m)} &= [\boldsymbol{n} \boldsymbol{Y}_{jm}^{(e)}], & P &= (-1)^{j+1}; \\ \boldsymbol{Y}_{jm}^{(l)} &= \boldsymbol{n} Y_{jm}, & P &= (-1)^j. \end{aligned} \tag{7,4}$$

Accanto ad ogni vettore è indicata la sua parità P. I vettori sferici dei tre tipi sono mutuamente ortogonali: $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(l)}$ è longitudinale, mentre $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(e)}$ e $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(m)}$ sono trasversali rispetto a $\boldsymbol{n}$.

I vettori sferici possono essere espressi mediante le funzioni sferiche scalari. I vettori $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(m)}$ si esprimono mediante funzioni sferiche di un solo ordine $l = j$, i vettori $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(e)}$ e $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(l)}$ mediante le funzioni sferiche di ordine $l = j \pm 1$. Questo fatto era già evidente: è sufficiente confrontare le parità dei vettori sferici indicate nella (7,4) con la parità $(-1)^{l+1}$ del campo vettoriale, espressa mediante l'ordine delle funzioni sferiche che vi compaiono.

---

[1]) L'operatore $\nabla_n \equiv |\boldsymbol{k}| \nabla_k$ agisce sulle funzioni dipendenti solo dalla direzione di $\boldsymbol{n}$. In coordinate sferiche questo operatore ha in tutto due componenti

$$\nabla_{\boldsymbol{n}} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

L'operatore, indicato sotto con Δ_n, è la parte angolare del laplaciano:

$$\Delta_n = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

I vettori sferici di ciascun tipo sono mutuamente ortogonali e normalizzati con la condizione

$$\int \boldsymbol{Y}_{jm} \boldsymbol{Y}^*_{j'm'} \, do = \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \tag{7,5}$$

Per i vettori $\boldsymbol{Y}^{(l)}_{jm}$ questo è evidente dalla condizione di normalizzazione delle funzioni sferiche Y_{jm}. Per i vettori $\boldsymbol{Y}^{(e)}_{jm}$ l'integrale di normalizzazione è

$$\frac{1}{j(j+1)} \int \nabla_n Y_{jm} \nabla_n Y^*_{j'm'} \, do = -\frac{1}{j(j+1)} \int Y^*_{j'm'} \Delta_n Y_{jm} \, do,$$

e, essendo $\Delta_n Y_{jm} = -j(j+1) Y_{jm}$, arriviamo alla (7,5). A questo stesso integrale si riduce la normalizzazione dei vettori $\boldsymbol{Y}^{(m)}_{jm}$.

Notiamo che ai vettori sferici (7,4) si sarebbe potuto giungere anche senza la verifica diretta fatta sopra delle equazioni (7,1); sarebbero state sufficienti alcune considerazioni circa le proprietà di trasformazione delle funzioni. Queste considerazioni ci portarono, nel paragrafo precedente, alla conclusione che la funzione vettoriale del tipo $\boldsymbol{n}\varphi$ corrisponde al valore j del momento angolare che coincide con l'ordine delle funzioni sferiche che compaiono in φ; se si pone semplicemente $\varphi = Y_{jm}$, la funzione $\boldsymbol{n}\varphi$ corrisponderà cosí ad un valore determinato m della proiezione del momento angolare. In questo modo si arriva immediatamente ai vettori sferici $\boldsymbol{Y}^{(l)}_{jm}$. Le considerazioni esposte nel paragrafo 6 sulle proprietà di trasformazione non cambiano se nel prodotto $\boldsymbol{n}\varphi$ si sostituisce il fattore $\boldsymbol{n}$ con il vettore ∇_n o $[\boldsymbol{n} \nabla_n]$; in questo modo si ottengono i vettori sferici degli altri due tipi.

Torniamo ora alle funzioni d'onda del fotone. Per un fotone di tipo elettrico (Ej) il vettore $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ deve avere la parità $(-1)^j$. Questa parità caratterizza i vettori $\boldsymbol{Y}^{(e)}_{jm}$ e $\boldsymbol{Y}^{(l)}_{jm}$; di questi due, tuttavia, soltanto il primo soddisfa la condizione di trasversalità. Per un fotone di tipo magnetico (Mj) il vettore $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ deve avere la parità $(-1)^{j+1}$; questa parità caratterizza solo il vettore sferico $\boldsymbol{Y}^{(m)}_{jm}$. Quindi le funzioni d'onda di un fotone con momento angolare determinato j e con una data proiezione di esso m (e avente l'energia ω) sono

$$\boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{k}) = \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|\boldsymbol{k}| - \omega) \boldsymbol{Y}_{jm}(\boldsymbol{n}), \tag{7,6}$$

dove per $\boldsymbol{Y}_{jm}$ si intende $\boldsymbol{Y}^{(e)}_{jm}$ e $\boldsymbol{Y}^{(m)}_{jm}$ nel caso di un fotone di tipo elettrico e di tipo magnetico rispettivamente; del valore dato dell'energia si tiene conto mediante il fattore $\delta(|\boldsymbol{k}| - \omega)$.

Le funzioni (7,6) sono normalizzate con la condizione

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \omega\omega' \boldsymbol{A}^*_{\omega' j' m'}(\boldsymbol{k}) \boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{k}) \, d^3x = \omega\delta(\omega' - \omega) \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \tag{7,7}$$

Per le funzioni d'onda nella rappresentazione delle coordinate la condizione (7,7) è equivalente alla condizione[1])

$$\frac{1}{4\pi}\int \{E^*_{\omega' j' m'}(\boldsymbol{r})\, E_{\omega jm}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{H}^*_{\omega' j' m'}(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{H}_{\omega jm}(\boldsymbol{r})\}\, d^3x = \\ = \omega\delta(\omega' - \omega)\, \delta_{jj'}\delta_{mm'}. \qquad (7,8)$$

In effetti, l'integrale a primo membro dell'uguaglianza, espressa mediante i potenziali, ha la forma

$$\frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{A}^*_{\omega' j' m'}(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{r})\, \omega'\omega\, d^3x.$$

Occorre qui sostituire

$$\boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{r}) = \int \boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \\ \boldsymbol{A}^*_{\omega' j' m'}(\boldsymbol{r}) = \int \boldsymbol{A}^*_{\omega' j' m'}(\boldsymbol{k}')\, e^{-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}. \qquad (7,9)$$

Quindi l'integrazione rispetto a d^3x dà la funzione delta $(2\pi)^3\,\delta(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k})$, che viene rimossa integrando rispetto a d^3k, e l'integrale assume la forma (7,7).

Finora noi abbiamo sempre sottinteso di lavorare nel gauge dei potenziali, nel quale il potenziale scalare $\Phi = 0$. In diverse applicazioni, tuttavia, possono risultare piú comodi altri tipi di gauge dell'onda sferica.

Nella rappresentazione d'impulso la trasformazione ammissibile consiste nella sostituzione

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{n} f(\boldsymbol{k}), \quad \Phi \to \Phi + f(\boldsymbol{k}),$$

dove $f(\boldsymbol{k})$ è una funzione qualsiasi. Nel caso considerato scegliamo questa funzione in modo tale che i nuovi potenziali vengano espressi mediante le stesse funzioni d'onda e abbiano come prima una parità determinata. Per un fotone di tipo elettrico queste condizioni limitano la scelta dei potenziali alle seguenti funzioni:

$$\boldsymbol{A}^{(e)}_{\omega jm}(\boldsymbol{k}) = \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\,\delta(|\boldsymbol{k}| - \omega)\,(\boldsymbol{Y}^{(e)}_{jm} + C\boldsymbol{n}Y_{jm}), \\ \Phi^{(e)}_{\omega jm}(\boldsymbol{k}) = \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\,\delta(|\boldsymbol{k}| - \omega)\, CY_{jm}, \qquad (7,10)$$

dove C è una costante qualsiasi. Per un fotone di tipo magnetico questa aggiunta a $\boldsymbol{A}^{(m)}(\boldsymbol{k})$ priverebbe il potenziale di una parità determinata, e quindi alle stesse condizioni la scelta (7,6) risulta non univoca.

---

[1]) Questa condizione è dello stesso tipo della condizione (2,22). La comparsa del fattore $\delta(\omega' - \omega)$ nel secondo membro dell'uguaglianza è legata al fatto che qui si considera il campo (onda sferica) in tutto lo spazio infinito e non il campo

La probabilità che un fotone con dato momento angolare e di parità determinata sia registrato in moto nella direzione $\boldsymbol{n}$, che giace nell'elemento di angolo solido do, è uguale, secondo la (3,5) e la (7,6), a

$$w(\boldsymbol{n})\,do = |\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(e)}(\boldsymbol{n})\,|^2\,do. \tag{7,11}$$

Noi abbiamo scritto l'espressione per un fotone di tipo E. Essendo, però, $|\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(m)}\,|^2 = |\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(e)}\,|^2$, le distribuzioni di probabilità $w(\boldsymbol{n})$ per fotoni dei due tipi sono uguali.

Il quadrato del modulo $|\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(e)}\,|^2$ non dipende dall'angolo azimutale φ (i fattori esponenziali $e^{\pm im\varphi}$ nelle funzioni sferiche si elidono), quindi la distribuzione delle probabilità $w(\boldsymbol{n})$ è simmetrica rispetto all'asse z. Inoltre, poiché ogni vettore sferico ha una parità determinata, i quadrati dei loro moduli sono pari rispetto all'inversione, cioè rispetto alla sostituzione dell'angolo polare $\theta \to \pi - \theta$; questo significa che se si sviluppa la funzione $w(\theta)$ in polinomi di Legendre, questo sviluppo conterrà polinomi soltanto di ordine pari. La determinazione dei coefficienti di tale sviluppo si riduce al calcolo degli integrali dei prodotti di tre funzioni sferiche e alla successiva somma rispetto alle componenti. Sia l'una che l'altra operazione si fanno secondo le formule ottenute nel vol. III, §§ 107-108, e portano al seguente risultato:

$$w(\theta) = (-1)^{j+1}\frac{(2j+1)^{3/2}}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)\begin{pmatrix} j & j & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix} j & j & 1 \\ j & j & 2n \end{Bmatrix}P_{2n}(\cos\theta). \tag{7,12}$$

Riportiamo qui, infine, le espressioni delle componenti dei vettori sferici in forma di sviluppi secondo funzioni sferiche. Nel fare questo useremo le « componenti sferiche » del vettore, definite come nel vol. III, § 107; le componenti f_λ di un vettore $\boldsymbol{f}$ sono

$$f_0 = if_z,\quad f_{+1} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(f_x + if_y),\quad f_{-1} = \frac{i}{\sqrt{2}}(f_x - if_y). \tag{7,13}$$

Introducendo i « versori circolari »

$$\boldsymbol{e}^{(0)} = i\boldsymbol{e}^{(z)},\quad \boldsymbol{e}^{(+1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}^{(x)} + i\boldsymbol{e}^{(y)}),\quad \boldsymbol{e}^{(-1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}^{(x)} - i\boldsymbol{e}^{(y)}) \tag{7,14}$$

($\boldsymbol{e}^{(x,\,y,\,z)}$ sono i versori degli assi x, y, z), abbiamo

$$\boldsymbol{f} = \sum_\lambda (-1)^{1-\lambda} f_{-\lambda}\boldsymbol{e}^{(\lambda)},\quad f_\lambda = (-1)^{1-\lambda}\boldsymbol{f}\boldsymbol{e}^{(-\lambda)*} = \boldsymbol{f}\boldsymbol{e}^{(\lambda)}. \tag{7,15}$$

Le componenti sferiche dei vettori sferici si esprimono mediante i simboli $3j$ attraverso le funzioni sferiche secondo le formule seguenti:

$$(-1)^{j+m+\lambda+1}(\boldsymbol{Y}^{(e)}_{jm})_\lambda = -\sqrt{j}\begin{pmatrix} j+1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} \times$$
$$\times Y_{j+1,\,m+\lambda} + \sqrt{j+1}\begin{pmatrix} j-1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j-1,\,m+\lambda},$$
$$(-1)^{j+m+\lambda+1}(\boldsymbol{Y}^{(m)}_{jm})_\lambda = -\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j,\,m+\lambda}, \quad (7,16)$$
$$(-1)^{j+m+\lambda+1}(\boldsymbol{Y}^{(l)}_{jm})_\lambda = \sqrt{j+1}\begin{pmatrix} j+1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j+1,\,m+\lambda} +$$
$$+\sqrt{j}\begin{pmatrix} j-1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j-1,\,m+\lambda}.$$

Queste formule si possono dedurre nel modo seguente. Ognuno dei tre vettori d'onda ha la forma $\boldsymbol{Y}_{jm} = \boldsymbol{a}Y_{jm}$, dove $\boldsymbol{a}$ è uno dei tre vettori (7,3). Quindi

$$\boldsymbol{Y}_{jm} = \sum_{lm'} \langle lm' \,|\, \boldsymbol{a} \,|\, jm\rangle\, Y_{lm'},$$

e il problema si riduce a trovare gli elementi di matrice dei vettori $\boldsymbol{a}$ rispetto alle autofunzioni del momento angolare orbitale. Secondo la III (107,6) abbiamo

$$\langle lm' \,|\, a_\lambda \,|\, jm\rangle = i\,(-1)^{j_{\max}-m'}\begin{pmatrix} l & 1 & j \\ -m' & \lambda & m \end{pmatrix} \langle l \,\|\, a \,\|\, j\rangle,$$

dove $j_{\max}$ è il maggiore dei numeri l e j. È sufficiente, quindi, conoscere gli elementi di matrice ridotti diversi da zero $\langle l \,\|\, a \,\|\, j\rangle$. Per questi ultimi si hanno le formule

$$\begin{aligned} &\langle l-1 \,\|\, n \,\|\, l\rangle = \langle l \,\|\, n \,\|\, l-1\rangle^* = i\sqrt{l}, \\ &\langle l \,\|\, \nabla_n \,\|\, l-1\rangle = i\,(l-1)\sqrt{l}, \\ &\langle l-1 \,\|\, \nabla_n \,\|\, l\rangle = i\,(l+1)\sqrt{l}, \\ &\langle l \,\|\, [\boldsymbol{n}\nabla_n] \,\|\, l\rangle = i\sqrt{l\,(l+1)\,(2l+1)}. \end{aligned} \quad (7,17)$$

§ 8. *Polarizzazione del fotone*

Il vettore polarizzazione $\boldsymbol{e}$ ha per il fotone il ruolo di « parte di spin » della funzione d'onda (con quelle precisazioni fatte al § 6 a proposito del concetto di spin di un fotone).

I diversi casi, che possono avere luogo per la polarizzazione di un fotone, non differiscono per niente dai possibili casi di polarizzazione di un'onda elettromagnetica classica (vedi II, § 48).

Una polarizzazione qualsiasi e può essere rappresentata sotto forma di sovrapposizione di due polarizzazioni ortogonali $e^{(1)}$ ed $e^{(2)}$ ($e^{(1)}e^{(2)*} = 0$), scelte in qualche determinato modo. Nella scomposizione

$$e = e_1 e^{(1)} + e_2 e^{(2)} \tag{8,1}$$

i quadrati dei moduli dei coefficienti e_1 ed e_2 determinano la probabilità che il fotone abbia la polarizzazione $e^{(1)}$ oppure $e^{(2)}$.

Nel ruolo di queste due ultime grandezze si possono scegliere due polarizzazioni lineari reciprocamente perpendicolari. Una polarizzazione qualsiasi si può anche scomporre in due polarizzazioni circolari con direzioni rotazionali opposte. I vettori polarizzazione circolare destra e circolare sinistra verranno indicati con $e^{(+1)}$ ed $e^{(-1)}$ rispettivamente. In un sistema di coordinate $\xi\eta\zeta$ con l'asse ζ diretto secondo la direzione di propagazione del fotone $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$

$$e^{(+1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(e^{(\xi)} + ie^{(\eta)}), \quad e^{(-1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{(\xi)} - ie^{(\eta)}). \tag{8,2}$$

La possibilità per un fotone di avere (per una data quantità di moto) due polarizzazioni diverse significa, in altre parole, che ogni autovalore della quantità di moto è doppiamente degenere. Questa circostanza è strettamente legata alla massa nulla del fotone.

Per una particella libera di massa non nulla esiste sempre un sistema di riferimento in quiete. È evidente che proprio in questo sistema di riferimento si vedono le proprietà intrinseche di simmetria della particella come tale. Nello studio di queste proprietà è necessario considerare la simmetria rispetto a tutte le possibili rotazioni attorno al centro (cioè rispetto a tutto il gruppo di simmetria sferica). Parametro caratteristico delle proprietà di simmetria di una particella rispetto a questo gruppo è il suo spin s, che determina l'ordine di degenerazione (cioè il numero $2s + 1$ di funzioni d'onda diverse che si trasformano tra di loro). In particolare, ad una particella associata ad una funzione d'onda vettoriale (tre componenti) corrisponde spin 1.

Per una particella di massa nulla non esiste un sistema di riferimento in quiete: in qualsiasi sistema tale particella si muove alla velocità della luce. Per una particella di questo tipo esiste sempre una direzione privilegiata nello spazio e cioè la direzione del vettore quantità di moto $\boldsymbol{k}$ (l'asse ζ). È chiaro che in questo caso non esiste alcuna simmetria rispetto a tutto il gruppo delle rotazioni tridimensionali e si può parlare soltanto di simmetria assiale attorno all'asse privilegiato.

Nella simmetria assiale si conserva solo la « *elicità* » di una particella e cioè la proiezione del momento angolare sull'asse ζ; indichiamo questa grandezza con λ[1]). Se si richiede che esista anche la simmetria

[1]) Per distinguerla dalla proiezione del momento angolare m su una direzione fissata (l'asse z), della quale si è parlato nel paragrafo precedente.

rispetto alle riflessioni nei piani passanti per l'asse ζ, allora gli stati, che differiscono per il segno di λ, sono reciprocamente degeneri; per $\lambda \neq 0$ si avrà quindi una doppia degenerazione[1]). Lo stato di un fotone con una data quantità di moto corrisponde proprio ad uno dei tipi di questi stati doppiamente degeneri. Esso è descritto da una funzione d'onda « spinoriale », costituita dal vettore $\boldsymbol{e}$ nel piano $\xi\eta$; le due componenti di questo vettore si trasformano tra loro in tutte le rotazioni attorno all'asse ζ e in riflessioni nei piani passanti per questo asse.

Le diverse possibilità di polarizzazione di un fotone hanno una corrispondenza determinata con i valori possibili della sua elicità. Questa corrispondenza si può stabilire usando le formule III (57,9), che legano le componenti di una funzione d'onda vettoriale con le componenti di uno spinore equivalente di rango 2[2]). Alle proiezioni $\lambda = +1$ o $\lambda = -1$ corrispondono vettori $\boldsymbol{e}$, tali che solo la componente $e_\xi - ie_\eta$ oppure $e_\xi + ie_\eta$ è diversa da zero; si ha cioè $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{(+1)}$ o $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{(-1)}$ rispettivamente. In altre parole, i valori $\lambda = +1$ e -1 corrispondono alla polarizzazione circolare destra e circolare sinistra del fotone (nel § 16 questo stesso risultato verrà ottenuto mediante il calcolo diretto delle autofunzioni dell'operatore di proiezione dello spin).

Siamo arrivati, quindi, alla conclusione che la proiezione del momento angolare del fotone sulla direzione del suo moto può avere solo due valori (± 1); il valore 0 è impossibile.

Lo stato di un fotone con data quantità di moto e polarizzazione è uno stato puro (nel senso spiegato nel III, § 14); esso è descritto da una funzione d'onda e corrisponde alla descrizione quantomeccanica globale dello stato della particella (del fotone). Sono possibili anche stati « miscelati » di un fotone, che corrispondono ad una descrizione meno completa, realizzata non da una funzione d'onda, ma da una matrice densità.

Consideriamo lo stato di un fotone, miscelato rispetto alla polarizzazione, ma corrispondente ad un valore assegnato della quantità di moto $\boldsymbol{k}$. In questo stato (chiamato stato di *polarizzazione parziale*) esiste una funzione d'onda « orbitale »[3]).

La matrice densità di polarizzazione di un fotone è un tensore di rango 2 $\rho_{\alpha\beta}$ nel piano perpendicolare al vettore $\boldsymbol{n}$ (piano $\xi\eta$; gli indici α e β assumono in tutto due valori). Questo tensore è hermi-

---

[1]) Ricordiamo che in questo modo vengono classificati i termini elettronici di una molecola biatomica (III, § 78).

[2]) Ricordiamo che alle componenti di una funzione d'onda, come ampiezze di probabilità dei diversi valori della proiezione del momento angolare di una particella (delle quali si parla qui) corrispondono componenti controvarianti di uno spinore.

[3]) La matrice analoga per l'elettrone nella teoria non relativistica è stata studiata nel III, § 59.

tiano

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho^*_{\beta\alpha}, \tag{8,3}$$

e normalizzato con la condizione

$$\rho_{\alpha\alpha} \equiv \rho_{11} + \rho_{22} = 1. \tag{8,4}$$

Dalla (8,3) discende che le componenti diagonali ρ_{11} e ρ_{22} sono reali e legate dalla (8,4). La componente ρ_{12} è complessa e vale la relazione $\rho_{21} = \rho^*_{12}$. In totale, quindi, la matrice densità è caratterizzata da tre parametri reali.

Se è nota la matrice densità di polarizzazione, si può allora trovare la probabilità per un fotone di avere una qualsiasi polarizzazione determinata e. Questa probabilità è determinata dalla « proiezione » del tensore $\rho_{\alpha\beta}$ sulla direzione del vettore e, cioè dalla grandezza

$$\rho_{\alpha\beta} e^*_\alpha e_\beta. \tag{8,5}$$

Quindi le componenti ρ_{11} e ρ_{22} determinano la probabilità delle polarizzazioni lineari lungo gli assi ξ e η. La proiezione sui vettori (8,2) dà la probabilità delle due polarizzazioni circolari:

$$\frac{1}{2}[1 \pm i(\rho_{12} - \rho_{21})]. \tag{8,6}$$

Le proprietà del tensore $\rho_{\alpha\beta}$ coincidono, nella forma e nella sostanza, con le proprietà del tensore $J_{\alpha\beta}$ che descrive la luce parzialmente polarizzata nella teoria classica (vedi II, § 50). Ricordiamo qui alcune di queste proprietà.

Nel caso di uno stato puro con una polarizzazione assegnata e il tensore $\rho_{\alpha\beta}$ si riduce a prodotti delle componenti del vettore e:

$$\rho_{\alpha\beta} = e_\alpha e^*_\beta. \tag{8,7}$$

Per il determinante si ha $|\rho_{\alpha\beta}| = 0$. Nel caso opposto di un fotone non polarizzato tutte le direzione di polarizzazione sono equiprobabili, cioè

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}, \tag{8,8}$$

e si ha $|\rho_{\alpha\beta}| = 1/4$.

Nel caso generale è comodo descrivere la polarizzazione parziale mediante i tre parametri reali di Stokes ξ_1, ξ_2, ξ_3[1]), attraverso i quali la matrice densità si scrive nella forma

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}. \tag{8,9}$$

Tutti e tre i parametri assumono i valori compresi fra -1 e $+1$. In uno stato non polarizzato si ha $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$; per un fotone totalmente polarizzato vale la relazione $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$.

[1]) Non confondere la notazione dei parametri con la notazione dell'asse ξ!

Il parametro ξ_3 caratterizza la polarizzazione lineare lungo l'asse ξ o η; la probabilità che il fotone sia polarizzato lungo questi assi è uguale a $(1 + \xi_3)/2$ o $(1 - \xi_3)/2$, rispettivamente. I valori $\xi_3 = +1$ o -1 corrispondono alla polarizzazione totale in queste direzioni.

Il parametro ξ_1 caratterizza la polarizzazione lineare lungo le direzioni che formano con l'asse ξ l'angolo $\varphi = \pi/4$ o $\varphi = -\pi/4$. La probabilità che il fotone sia linearmente polarizzato lungo queste direzioni è uguale a $(1 + \xi_1)/2$ e $(1 - \xi_1)/2$, rispettivamente; è facile convincersi di questo, proiettando il tensore $\rho_{\alpha\beta}$ sulle direzioni $e = (1, \pm 1)/\sqrt{2}$.

Il parametro ξ_2, infine, è il grado di polarizzazione circolare; secondo la (8,6) la probabilità che il fotone abbia la polarizzazione circolare destra o circolare sinistra è uguale a $(1 + \xi_2)/2$ o $(1 - \xi_2)/2$, rispettivamente. Poiché queste due polarizzazioni corrispondono ai valori di elicità $\lambda = \pm 1$, è chiaro che, nel caso generale, ξ_2 è il valore medio dell'elicità del fotone. Notiamo, anche, che nel caso di uno stato puro con polarizzazione $\boldsymbol{e}$ si ha

$$\xi_2 = i\,[\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^*]\boldsymbol{n}. \tag{8,10}$$

Ricordiamo che per trasformazioni di Lorentz sono invarianti le grandezze ξ_2 e $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$ (vedi II, § 50).

In seguito ci imbatteremo nel problema del comportamento dei parametri di Stokes rispetto all'inversione del tempo. È facile vedere che queste grandezze sono invarianti rispetto a questa trasformazione. Questa proprietà non dipende, ovviamente, dal tipo dello stato di polarizzazione e per questo è sufficiente verificarla anche solo per il caso di uno stato puro. In meccanica quantistica, all'inversione del tempo corrisponde la sostituzione della funzione d'onda con la sua coniugata complessa (III, § 18). Per un'onda polarizzata in un piano questo significa la sostituzione[1])

$$\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{e} \to -\boldsymbol{e}^*. \tag{8,11}$$

Per questa trasformazione la parte simmetrica della matrice densità

$$\frac{1}{2}(e_\alpha e_\beta^* + e_\beta e_\alpha^*),$$

e con essa i parametri ξ_1 e ξ_3, non variano. L'invarianza del parametro ξ_2 per questa stessa trasformazione è evidente dalla (8,10); essa è evidente anche dal senso stesso di ξ_2 come valore medio dell'elicità. In effetti, l'elicità è la proiezione del momento angolare $\boldsymbol{j}$

---

[1]) Il cambiamento addizionale di segno di $\boldsymbol{e}$ è legato al fatto che l'inversione del tempo cambia il segno del potenziale vettore del campo elettromagnetico. Il potenziale scalare, invece, non cambia segno; per questo, per il quadrivettore $\boldsymbol{e}$ l'inversione del tempo significa la trasformazione

$$(e_0, \boldsymbol{e}) \to (e_0^*, -\boldsymbol{e}^*). \tag{8,11a}$$

sulla direzione $\boldsymbol{n}$, cioè è il prodotto $\boldsymbol{jn}$; l'inversione del tempo cambia il segno di ambedue questi vettori.

In calcoli successivi ci sarà necessaria la matrice densità del fotone scritta sotto forma quadridimensionale, cioè sotto forma di un 4-tensore $\rho_{\mu\nu}$. Per un fotone polarizzato, descritto dal quadrivettore e_μ, è naturale definire questo tensore come segue:

$$\rho_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu^*. \tag{8,12}$$

Nel gauge trasversale tridimensionale $e = (0, \boldsymbol{e})$ e se uno degli assi è scelto lungo $\boldsymbol{n}$, le componenti non nulle di questo quadritensore coincidono con la (8,7).

Per un fotone non polarizzato, nel gauge trasversale tridimensionale, si ha il tensore $\rho_{\mu\nu}$ con componenti

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k), \quad \rho_{0i} = \rho_{i0} = \rho_{00} = 0 \tag{8,13}$$

(se uno degli assi coincide con la direzione $\boldsymbol{n}$, si ritorna alla (8,8)). Usare il tensore $\rho_{\mu\nu}$ direttamente in forma tridimensionale sarebbe, tuttavia, scomodo. Noi possiamo, però, ricorrere alle trasformazioni di gauge; per la matrice densità questa trasformazione è del tipo

$$\rho_{\mu\nu} \to \rho_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu, \tag{8,14}$$

dove χ_μ sono funzioni qualsiasi. Ponendo

$$\chi_0 = -\frac{1}{4\omega}, \quad \chi_i = \frac{k_i}{4k^2}$$

invece della (8,13) otteniamo una semplice espressione quadridimensionale

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \tag{8,15}$$

La rappresentazione quadridimensionale della matrice densità di un fotone parzialmente polarizzato si ottiene facilmente trascrivendo preventivamente il tensore bidimensionale (8,9) in forma tridimensionale:

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(1)} + e_i^{(2)} e_k^{(2)}) + \frac{\xi_1}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(2)} + e_i^{(2)} e_k^{(1)}) -$$
$$- \frac{i\xi_2}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(2)} - e_i^{(2)} e_k^{(1)}) + \frac{\xi^3}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(1)} - e_i^{(2)} e_k^{(2)}),$$

dove $\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$ sono i versori degli assi ξ e η. La generalizzazione voluta si ottiene sostituendo questi 3-vettori con i versori quadridimensionali reali di tipo spaziale $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ortogonali fra loro e al 4-impulso del fotone k:

$$\begin{aligned} e^{(1)\,2} = e^{(2)\,2} &= -1, \\ e^{(1)} e^{(2)} &= 0, \\ e^{(1)} k = e^{(2)} k &= 0. \end{aligned} \tag{8,16}$$

In un particolare sistema di riferimento si ha $e^{(1)} = (0, e^{(1)})$, $e^{(2)} = (0, e^{(2)})$. Quindi, la matrice quadridimensionale densità del fotone è

$$\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}) + \frac{\xi_1}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}) - \frac{i\xi_2}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}) + \frac{\xi_3}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}). \qquad (8,17)$$

La comodità di questa o di quella scelta pratica dei quadrivettori $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ dipende dalle concrete condizioni del problema considerato.

Occorre tenere presente che le condizioni (8,16) non fissano la scelta di $e^{(1)}$ ed $e^{(2)}$ in modo univoco. Se un qualsiasi quadrivettore e_μ soddisfa queste condizioni, anche un quadrivettore qualsiasi del tipo $e_\mu + \chi k_\mu$ (per il fatto che $k^2 = 0$) soddisferà queste stesse condizioni.

Questa non univocità è legata con la non univocità di gauge della matrice densità.

Il primo termine nella (8,17) corrisponde ad uno stato non polarizzato. Per questo, secondo la (8,15), lo si potrebbe sostituire con $-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}$. Questa sostituzione è nuovamente equivalente ad una certa trasformazione di gauge.

Operando con i quadritensori del tipo (8,17) decomposti su due quadrivettori indipendenti, risulta comodo ricorrere al metodo formale seguente. Scriviamo il tensore (8,17) nella forma

$$\rho_{\mu\nu} = \sum_{a,b=1}^{3} \rho^{(ab)} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)},$$

e rappresentiamone i coefficienti di sviluppo $\rho^{(ab)}$ mediante una matrice a due righe

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^{(11)} & \rho^{(12)} \\ \rho^{(21)} & \rho^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Come ogni matrice hermitiana d'ordine due, può essere scomposta secondo quattro matrici indipendenti di ordine due: le matrici di Pauli σ_x, σ_y, σ_z e la matrice unità 1. Questa scomposizione ha la forma

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \xi\sigma), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \qquad (8,18)$$

come è facile verificare confrontando direttamente con la (8,17) e usando le note espressioni delle matrici di Pauli (18,5) (l'unificazione delle tre grandezze ξ_1, ξ_2, ξ_3 nel vettore ξ ha, naturalmente, un senso puramente formale, che ha come scopo la comodità della scrittura).

PROBLEMA

Scrivere la matrice densità del fotone nella quale « assi » delle coordinate siano i versori circolari (8,2).

Soluzione. Le componenti del tensore $\rho'_{\alpha\beta}$ nei nuovi assi (α, $\beta = \pm 1$) si ottengono proiettando il tensore (8,9) sugli assi (8,2):

$$\rho'_{11} = \rho_{\alpha\beta} e_\alpha^{(+1)*} e_\beta^{(+1)}, \quad \rho'_{1-1} = \rho_{\alpha\beta} e_\alpha^{(+1)*} e_\beta^{(-1)}, \ldots$$

$$\rho' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_2 & -\xi_3+i\xi_1 \\ -\xi_3-i\xi_1 & 1-\xi_2 \end{pmatrix}.$$

§ 9. *Sistema a due fotoni*

Ragionamenti analoghi a quelli fatti nel § 6 permettono di determinare il numero degli stati possibili anche nel caso piú complesso di un sistema a due fotoni (*L. Landau*, 1948).

Consideriamo i fotoni nel sistema di riferimento del loro baricentro; le quantità di moto dei fotoni sono $\boldsymbol{k}_1 = -\boldsymbol{k}_2 \equiv \boldsymbol{k}$[1]). La funzione d'onda di un sistema a due fotoni può essere rappresentata (nella rappresentazione degli impulsi) sotto forma di un tensore tridimensionale di rango $2\, A_{ik}(\boldsymbol{n})$, formato mediante una combinazione bilineare delle componenti delle funzioni d'onda vettoriali di ambedue i fotoni; ciascuno degli indici di questo tensore corrisponde ad uno dei due fotoni ($\boldsymbol{n}$ è il versore nella direzione di $\boldsymbol{k}$). La trasversalità di ciascuno dei fotoni è espressa dall'ortogonalità del tensore A_{ik} al vettore $\boldsymbol{n}$:

$$A_{il} n_l = 0, \quad A_{lk} n_l = 0. \tag{9,1}$$

Il reciproco scambio dei fotoni significa la permutazione degli indici del tensore A_{ik} simultaneamente al cambiamento di segno di $\boldsymbol{n}$. Poiché i fotoni ubbidiscono alla statistica di Bose, si ha

$$A_{ik}(-\boldsymbol{n}) = A_{ki}(\boldsymbol{n}). \tag{9,2}$$

Il tensore A_{ik} non è, generalmente, simmetrico rispetto ai suoi indici. Scomponiamolo in una parte simmetrica (s_{ik}) e in una parte antisimmetrica (a_{ik}): $A_{ik} = s_{ik} + a_{ik}$. Ciascuna di queste due parti deve, ovviamente, soddisfare separatamente la condizione (9,2) (e anche la condizione di ortogonalità (9,1)), da cui discende che

$$s_{ik}(-\boldsymbol{n}) = s_{ik}(\boldsymbol{n}), \tag{9,3}$$

$$a_{ik}(-\boldsymbol{n}) = -a_{ik}(\boldsymbol{n}). \tag{9,4}$$

L'inversione del sistema di coordinate non cambia, di per se stessa, il segno delle componenti di un tensore di rango 2, ma cambia il

[1]) Tale sistema di riferimento esiste sempre, esclusione fatta per il caso di due fotoni che si muovono parallelamente nella stessa direzione. La quantità di moto totale $\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$ e l'energia totale $\omega_1 + \omega_2$ di questi fotoni sono legate tra loro dalla stessa relazione che vale per un solo fotone, e quindi non esiste un sistema di riferimento in cui valga la relazione $\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = 0$.

segno di $\boldsymbol{n}$. Per questo, dalla (9,3) si vede che la funzione d'onda s_{ik} è simmetrica rispetto all'inversione, cioè è associata agli stati pari del sistema fotonico; la funzione d'onda a_{ik} è associata, invece, agli stati dispari.

Un tensore antisimmetrico di rango 2 è equivalente (duale) ad un vettore assiale $\boldsymbol{a}$, le cui componenti si esprimono attraverso le componenti del tensore mediante la relazione $a_i = \frac{1}{2} e_{ikl} a_{kl}$, dove e_{ikl} è il tensore antisimmetrico unità (vedi II, § 6). L'ortogonalità del tensore a_{kl} al vettore $\boldsymbol{n}$ significa che i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{n}$ sono paralleli[1]). Per questo si può scrivere $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\varphi(\boldsymbol{n})$, dove φ è uno scalare; secondo la (9,4) deve essere $\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{n})$, e quindi

$$\varphi(-\boldsymbol{n}) = \varphi(\boldsymbol{n}).$$

Questa uguaglianza significa che lo scalare φ può essere linearmente formato con funzioni sferiche soltanto di ordine pari L (includendo anche l'ordine zero).

Noi vediamo che il tensore antisimmetrico a_{ik}, per le sue proprietà di trasformazione (rispetto alle rotazioni), è equivalente ad uno scalare (vedi nota a pag. 34). Associando a quest'ultimo « spin » 0, troveremo che il momento angolare di questo stato è $J = L$. Quindi al tensore a_{ik} sono associati gli stati dispari di un sistema fotonico avente momento angolare J.

Esaminiamo ora il tensore simmetrico s_{ik}. Poiché esso è pari rispetto al cambiamento di segno di $\boldsymbol{n}$, a lui sono associati gli stati pari del sistema fotonico. Da qui segue che tutte le componenti s_{ik} si esprimono attraverso le funzioni sferiche di ordine pari L (includendo $L = 0$). Qualsiasi tensore simmetrico di rango 2 s_{ik} si riduce, come è noto, ad uno scalare (s_{ii}) e ad un tensore simmetrico (s'_{ik}) di traccia nulla ($s'_{ii} = 0$).

Allo scalare s_{ii} viene associato « spin » 0, e quindi il momento angolare degli stati corrispondenti è $J = L$, è cioè pari. Al tensore s'_{ik} viene associato « spin » 2 (vedi III, § 57). Sommando secondo la regola di composizione dei momenti angolari questo « spin » col momento « angolare orbitale pari » L, troveremo che, per un $J \neq 0$ assegnato, sono possibili tre stati (con $L = J \pm 2, J$), e per $J \neq 1$ dispari, sono possibili due stati (con $L = J \pm 1$). Un'eccezione è costituita da $J = 0$ con un solo stato ($L = 2$) e $J = 1$ (con $L = 2$).

In questi calcoli, tuttavia, non si è tenuto conto della condizione di ortogonalità del tensore s_{ik} al vettore $\boldsymbol{n}$. Per questo dal numero di stati ottenuto occorre sottrarre il numero di stati ai quali corrisponde il tensore simmetrico di secondo rango, « parallelo » al vettore $\boldsymbol{n}$. Questo tensore (che indicheremo con s''_{ik}) può essere rappresentato

---

[1]) Abbiamo $a_{ik} = e_{ikl} a_l$, e la condizione di ortogonalità dà

$$a_{ik} n_k = e_{ikl} a_l n_k = [\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}]_i = 0.$$

nella forma

$$s''_{ik} = n_i b_k + n_k b_i,$$

dove $\boldsymbol{b}$ è un certo vettore. Secondo la (9,3) questo vettore deve soddisfare la condizione $\boldsymbol{b}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{b}(\boldsymbol{n})$. Quindi, il tensore s''_{ik}, responsabile degli stati « ridondanti », è equivalente ad un vettore dispari. Questo vettore deve quindi esprimersi attraverso funzioni sferiche solo di ordine L dispari. Notando inoltre che al vettore corrisponde lo « spin » 1, troveremo che, per ogni momento angolare $J \neq 0$ pari, sono possibili due stati (con $L = J \pm 1$) e per ogni momento J dispari, è possibile un solo stato (con $L = J$); un caso particolare è costituito da $J = 0$ con un solo stato ($L = 1$).

Riassumendo i risultati ottenuti, otteniamo la seguente tabella, in cui è indicato il numero dei possibili stati pari e dispari di un sistema a due fotoni (per i quali la somma delle quantità di moto è zero) per diversi valori del momento angolare totale J:

J	Pari	Dispari
0	1	1
1	—	—
$2k$	2	1
$2k+1$	1	—

(9,5)

(k è un numero intero positivo diverso da zero). Dalla tabella si vede che per J dispari mancano gli stati dispari, e il valore $J = 1$ è del tutto impossibile.

La funzione d'onda di un sistema a due fotoni A_{ik} determina la correlazione delle due polarizzazioni. La probabilità per i due fotoni di avere simultaneamente i dati valori di polarizzazione $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ è proporzionale a

$$A_{ik} e^*_{1i} e^*_{2k}.$$

In altre parole, se la polarizzazione $\boldsymbol{e}_1$ di un fotone è assegnata, la polarizzazione $\boldsymbol{e}_2$ del secondo fotone è proporzionale a $\boldsymbol{e}_1$

$$e_{2k} \sim A_{ik} e^*_{1i}. \tag{9,6}$$

Negli stati dispari del sistema A_{ik} coincide col tensore antisimmetrico a_{ik}. In questo caso si ha

$$e_2 e^*_1 \sim a_{ik} e^*_{1i} e^*_{1k} = 0,$$

cioè le polarizzazioni dei due fotoni sono reciprocamente ortogonali. Nel caso di polarizzazione lineare questo significa la perpendicolarità delle loro direzioni, e nel caso di polarizzazioni circolari significa che le direzioni di rotazione sono opposte.

Lo stato pari con $J = 0$ è descritto da un tensore simmetrico, che si riduce ad uno scalare

$$s_{ik} = \text{costante} \cdot (\delta_{ik} - n_i n_k).$$

Per questo dalla (9,6) si ottiene $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2^*$. Nel caso di polarizzazione lineare questo significa che le loro direzioni sono parallele, e nel caso di polarizzazioni circolari, che le direzioni di rotazione sono opposte. Quest'ultimo fatto è evidente a priori: per $J = 0$, la somma delle proiezioni del momento angolare dei fotoni su una stessa direzione $\boldsymbol{k}$ deve essere uguale a zero in ogni caso (la proiezione su direzioni opposte $\boldsymbol{k}_1$ e $\boldsymbol{k}_2$, cioè le elicità, sono in questo caso uguali).

Capitolo II

BOSONI

§ 10. *Equazione d'onda per particelle a spin* 0

Nel capitolo I abbiamo mostrato come si può realizzare una descrizione quantistica del campo elettromagnetico libero, partendo dalle note proprietà del campo nel limite classico e sulla base di concetti della meccanica quantistica ordinaria. Tale descrizione del campo in quanto sistema di fotoni, ha già molte peculiarità che si trasferiscono tal quali anche nella descrizione relativistica di particelle nella teoria quantistica.

Il campo elettromagnetico rappresenta un sistema a numero infinito di gradi di libertà. Per tale sistema non esiste la legge di conservazione del numero di particelle (fotoni), e fra i suoi stati possibili esistono stati con un numero qualsiasi di particelle[1]). In una teoria relativistica di questa proprietà devono godere, in generale, anche sistemi di particelle qualsiasi. La conservazione del numero di particelle nella teoria non relativistica è connessa con la legge di conservazione della massa: la somma delle masse (masse di quiete) delle particelle non varia in una loro interazione; la conservazione della somma delle masse, per esempio, in un sistema di elettroni, significa l'invarianza anche del loro numero. Nella meccanica relativistica, invece, la legge di conservazione della massa non esiste; deve conservarsi soltanto l'energia totale del sistema (che include in sé anche l'energia di quiete delle particelle). Quindi il numero di particelle non deve conservarsi; ne segue che ogni teoria relativistica di particelle deve essere una teoria di sistemi ad un numero infinito di gradi di libertà. In altre parole, tale teoria acquista il carattere di una teoria di campo.

Il formalismo matematico adeguato a descrivere sistemi con un numero variabile di particelle è il formalismo della seconda quantizzazione (III, §§ 64, 65). Nella descrizione quantistica del campo elettromagnetico il ruolo di operatore di seconda quantizzazione è svolto dal quadripotenziale A. Esso si esprime mediante le funzioni d'onda delle coordinate delle singole particelle (fotoni) e gli operatori di

---

[1]) Ovviamente, in pratica, il numero dei fotoni cambia soltanto a seguito dei diversi processi di interazione.

creazione e di annichilazione. Il ruolo analogo nella descrizione di un sistema di particelle è svolto dall'operatore ψ della funzione d'onda quantizzata. Per costruire tale operatore occorre innanzitutto conoscere la forma della funzione d'onda di una singola particella e dell'equazione, cui questa funzione soddisfa.

Occorre qui sottolineare il carattere ausiliario del concetto di campo di particelle libere. Le particelle reali interagiscono e il compito della teoria consiste nello studiare queste interazioni. Ogni interazione però si riduce ad una collisione, prima e dopo la quale il sistema può essere considerato come un'assemblea di particelle libere. Nel § 1 è stato notato che queste sono gli unici enti misurabili. Per questo noi ci serviremo dei campi di particelle libere come mezzo per descrivere gli stati iniziali e finali.

Iniziamo la descrizione relativistica delle particelle libere dal caso di particelle a spin 0. La semplicità matematica di questo caso permetterà di chiarire meglio le idee fondamentali e le caratteristiche di tale descrizione.

Lo stato di una particella libera (senza spin) può essere determinato completamente con l'assegnazione della sua quantità di moto $\boldsymbol{p}$. L'energia della particella ε[1]) è determinata dalla relazione $\varepsilon^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ (dove m è la massa della particella), oppure, in forma quadridimensionale

$$p^2 = m^2. \tag{10,1}$$

Come è noto, le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia sono connesse con l'omogeneità dello spazio e del tempo, cioè con la simmetria rispetto a qualsiasi spostamento parallelo nel sistema di coordinate quadridimensionale. In una descrizione quantistica, la richiesta di questa simmetria significa che la funzione d'onda di una particella con un vettore energia-impulso determinato, a seguito di una traslazione sulle coordinate, può venire solo moltiplicato per un fattore di fase (di modulo uguale ad 1). Questa condizione è soddisfatta solo da una funzione esponenziale con esponente lineare rispetto alle 4-coordinate[2]). In altre parole, la funzione d'onda di stato di una particella libera con un dato energia-impulso $p^\mu = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$ deve essere un'onda piana

$$\text{costante} \cdot e^{-ipx}, \qquad px = \varepsilon t - \boldsymbol{pr} \tag{10,2}$$

(la scelta del segno nell'esponente nella teoria relativistica è di per se stessa convenzionale; il segno è scelto qui in accordo col caso non relativistico).

---

[1]) L'energia di una singola particella viene indicata con ε, a differenza dell'energia E di un sistema di particelle.

[2]) Ricordiamo il significato di alcune notazioni usate dagli autori per semplificare la scrittura: 4-coordinate = sistema di coordinate quadridimensionale, 4-impulso = energia-impulso, 4-vettore = quadrivettore, 4-tensore = = tensore quadridimensionale (quadritensore), 4-potenziale = potenziale quadridimensionale (quadripotenziale). (N.d.T.)

L'equazione d'onda deve avere le funzioni (10,2) come soluzioni particolari per un 4-impulso arbitrario p, che soddisfi la condizione (10,1). L'equazione deve essere lineare come espressione del principio di sovrapposizione: ogni combinazione lineare delle funzioni (10,2) descrive uno stato possibile della particella e quindi deve essere una soluzione. L'equazione deve essere, infine, di ordine piú basso possibile; un ordine piú alto comporta soluzioni ridondanti.

Lo spin è il momento angolare della particella nel sistema di riferimento, in cui essa si trova in quiete. Se lo spin di una particella è s, la sua funzione d'onda nel sistema di quiete è uno spinore tridimensionale di rango $2s$. Per descrivere una particella in un sistema di riferimento generico, la sua funzione d'onda deve essere espressa sotto forma di grandezze quadridimensionali.

Una particella a spin 0 nel sistema di quiete è descritta da uno scalare tridimensionale. Questo scalare, tuttavia, può avere una « origine » quadridimensionale varia: può essere uno scalare quadridimensionale ψ, ma può essere anche la quarta componente del 4-vettore ψ_μ (componente di tipo temporale), quadrivettore che nel sistema di quiete ha non nulla solo la componente ψ_0[1]).

Per una particella libera, l'unico operatore che può entrare nell'equazione d'onda è l'operatore di energia-impulso (o di 4-impulso) p. Le sue componenti sono operatori di derivazione rispetto alle coordinate e al tempo:

$$\mathrm{p}^\mu = i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t},\ -i\nabla\right). \tag{10,3}$$

Equazione d'onda deve essere un legame differenziale tra le grandezze ψ e ψ_μ, realizzato mediante l'operatore p. Questo legame deve, ovviamente, essere espresso mediante relazioni relativisticamente invarianti. Tali sono le relazioni

$$m\psi_\mu = \mathrm{p}_\mu\psi, \quad \mathrm{p}^\mu\psi_\mu = m\psi, \tag{10,4}$$

dove m è una costante dimensionale, che caratterizza la particella[2]).

Trasferendo ψ_μ dalla prima alla seconda equazione, otteniamo

$$(\mathrm{p}^2 - m^2)\,\psi = 0 \tag{10,5}$$

(*O. Klein*, *V. A. Fok*, 1926). L'equazione ottenuta si può scrivere nella forma

$$-\partial_\mu\partial^\mu\psi \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\psi = m^2\psi. \tag{10,6}$$

---

[1]) Oppure, in modo analogo, la componente temporale di un 4-tensore di rango superiore; questo caso, tuttavia, porterebbe ad equazioni di ordine superiore.

[2]) Le costanti m sono state introdotte nella (10,4) in modo tale che ψ_μ e ψ abbiano la stessa dimensione. Introdurre in queste due equazioni costanti m_1 e m_2 diverse sarebbe stato privo di senso, poiché sarebbe sempre stato possibile renderle uguali mediante una nuova definizione di ψ o di ψ_μ.

Sostituendo in essa ψ sotto la forma dell'onda piana (10,2), otteniamo $p^2 = m^2$; da qui segue che m è la massa della particella. Notiamo che la forma dell'equazione (10,5) è certamente evidente a priori e segue dal fatto che p^2 è l'unico operatore scalare, che si può formare con p (per questa ragione questa stessa equazione è soddisfatta anche da ognuna delle componenti della funzione d'onda di una particella a spin qualsiasi; nel seguito avremo piú occasioni per convincerci di questo).

In tal modo, una particella a spin 0 è descritta, in sostanza, dallo scalare quadridimensionale ψ, che soddisfa l'equazione del second'ordine (10,5). Nelle equazioni del primo ordine (10,4) il ruolo di funzione d'onda è svolto dall'insieme delle grandezze ψ e ψ_μ, dove il 4-vettore ψ_μ si riduce al gradiente quadridimensionale dello scalare ψ. Nel sistema di quiete la funzione d'onda della particella non dipende dalle coordinate (spaziali) e quindi le componenti spaziali del quadrivettore ψ_μ, come doveva essere, si annullano.

Per la successiva realizzazione della seconda quantizzazione è utile esprimere l'energia e la quantità di moto della particella sotto forma di integrali spaziali di combinazioni bilineari (rispetto a ψ e ψ^*), che rappresentino la densità spaziale di queste grandezze. In altre parole, occorre trovare il tensore di energia-impulso $T_{\mu\nu}$, corrispondente all'equazione (10,5). Attraverso questo tensore la legge di conservazione dell'energia e della quantità di moto è espressa dall'equazione

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0. \tag{10,7}$$

Seguendo le regole generali della teoria del campo (vedi II, § 32), scriviamo il principio variazionale che origina l'equazione (10,5). Questo principio consiste nel richiedere che l'« integrale d'azione »

$$S = \int L d^4x \tag{10,8}$$

del quadriscalare reale L, densità di lagrangiana del campo[1]), sia minimale. Mediante lo scalare ψ (e l'operatore ∂^μ) si può formare uno scalare bilineare reale del tipo

$$L = \partial_\mu \psi^* \cdot \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi, \tag{10,9}$$

dove m è una costante dimensionale. Considerando ψ e ψ^* come variabili indipendenti, descriventi il campo (« coordinate generalizzate » del campo q), è facile vedere che le equazioni di Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} = \frac{\partial L}{\partial q}. \tag{10,10}$$

---

[1]) Il corrispondente operatore di seconda quantizzazione L è detto *lagrangiano* del campo. Per semplificare la terminologia noi useremo questo termine, a seconda della comodità, sia per la densità di lagrangiana « quantizzata » che per la densità non quantizzata ».

($q_{,\mu} \equiv \partial_\mu q$) coincidono effettivamente con le equazioni (10,5) per ψ e ψ^*, dove m è la massa della particella. Notiamo anche che il segno generale dell'espressione (10,9) è stato scelto in modo che il quadrato della derivata rispetto al tempo, $|\partial\psi/\partial t|^2$, entri in L col segno positivo; in caso contrario l'azione non potrebbe avere un minimo (vedi II, § 27). La scelta del coefficiente numerico generale di L è, invece, convenzionale (e si riflette solo sul coefficiente di normalizzazione di ψ; vedi piú avanti).

Il tensore di energia-impulso si calcola ora secondo la formula

$$T_\mu^\nu = \sum q_{,\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{,\nu}} - L\delta_\mu^\nu \tag{10,11}$$

(somma su tutti i q). Sostituendovi la (10,9) otteniamo

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\psi^* \cdot \partial_\nu\psi + \partial_\nu\psi^* \cdot \partial_\mu\psi - Lg_{\mu\nu} \tag{10,12}$$

(queste grandezze sono, come era logico che fosse, reali, il che segue dalla realtà di L). In particolare

$$T_{00} = 2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - L = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + m^2\psi^*\psi, \tag{10,13}$$

$$T_{i0} = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{10,14}$$

Il 4-impulso del campo è dato dall'integrale

$$P_\mu = \int T_{\mu 0}\, d^3x, \tag{10,15}$$

cioè T_{00} e T_{0i} svolgono il ruolo di densità di energia e di quantità di moto. Notiamo che la grandezza T_{00} è definita positiva.

La formula (10,13) può venire usata per la normalizzazione della funzione d'onda. Un'onda piana, normalizzata con una « particella nell'unità di volume $V = 1$ », si scrive nella forma

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ipx}. \tag{10,16}$$

In effetti, per questa funzione $T_{00} = \varepsilon$, e quindi l'energia totale nel volume $V = 1$ coincide con l'energia di una particella.

Il momento angolare, la cui conservazione è connessa all'isotropia dello spazio, può anch'esso essere espresso sotto forma di integrale spaziale; tale rappresentazione del momento angolare nel seguito, tuttavia, non sarà necessaria.

Accanto alle leggi di conservazione, connesse direttamente con simmetrie spazio-temporali, le equazioni (10,4) ammettono ancora un'altra legge di conservazione. In effetti, è facile convincersi che

dalle (10,4) (e da equazioni simili per ψ^*), discende l'equazione

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{10,17}$$

dove

$$j_\mu = m(\psi^*\psi_\mu + \psi^*_\mu\psi) = i[\psi^*\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\psi^*)\psi]. \tag{10,18}$$

Da qui si vede che j^μ ha il ruolo di quadrivettore densità di corrente, e quindi l'equazione (10,17) è l'equazione di continuità, che esprime la legge di conservazione della grandezza

$$Q = \int j_0 \, d^3x, \tag{10,19}$$

dove

$$j_0 = j^0 = i\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right). \tag{10,20}$$

Notiamo che j_0 non è una grandezza definita positiva. Già questo fatto indica che, nel caso generale, non si può chiaramente interpretare questa grandezza come densità di probabilità della localizzazione spaziale di una particella. Il senso della legge di conservazione, espressa dall'equazione (10,17), verrà chiarito nel paragrafo seguente.

§ 11. *Particelle e antiparticelle*

Secondo le regole generali del metodo di seconda quantizzazione, si deve considerare lo sviluppo di una funzione d'onda generica secondo le autofunzioni dell'insieme completo degli stati possibili di una particella libera, ad esempio secondo onde piane ψ_p:

$$\psi = \sum_p a_p\psi_p, \quad \psi^* = \sum_p a^*_p\psi^*_p.$$

Quindi i coefficienti a_p e a^+_p dovrebbero essere interpretati come operatori a_p e a^+_p di annichilazione e di creazione di particelle negli stati corrispondenti[1]).

Nel fare questo, tuttavia, noi incontriamo una novità sostanziale, rispetto alla teoria non relativistica. Nell'onda piana, soluzione dell'equazione (10,5), l'energia ε deve soddisfare (per una quantità di moto fissata) soltanto la condizione $\varepsilon^2 = p^2 + m^2$, cioè può avere due radici: $\pm\sqrt{p^2 + m^2}$. Tuttavia, soltanto i valori positivi di ε possono avere il senso fisico di energia di una particella libera. D'altra parte, non è lecito lasciare cadere semplicemente i valori

---

[1]) Alle funzioni ψ abbiamo messo l'indice del 4-impulso p, proponendoci di indicare le funzioni a « frequenza negativa » con ψ_{-p}. Agli operatori a e a^+ abbiamo apposto l'indice della quantità di moto tridimensionale p, che determina completamente lo stato di una particella fisica.

negativi: la soluzione generale dell'equazione d'onda si forma per sovrapposizione di tutte le soluzioni particolari indipendenti. Questo fatto indica che è necessario un certo cambiamente dell'interpretazione dei coefficienti di sviluppo di ψ e ψ^* nella seconda quantizzazione.

Scriviamo questo sviluppo nella forma

$$\psi = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} a_p^{(+)} e^{i(pr-\varepsilon t)} + \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} a_p^{(-)} e^{i(pr+\varepsilon t)} \qquad (11,1)$$

dove nella prima somma compaiono onde piane a « frequenza » positiva normalizzate secondo la (10,16), e nella seconda onde piane a frequenza negativa; con ε viene ovunque indicata la grandezza positiva: $\varepsilon = +\sqrt{p^2 + m^2}$. Nella seconda quantizzazione i coefficienti $a_p^{(+)}$ nella prima somma si sostituiscono, secondo il metodo solito, con gli operatori a_p di annichilazione di particelle. Nella seconda somma notiamo che, nella formazione dell'elemento di matrice, la dipendenza temporale dei suoi fattori corrisponderà non alla distruzione, ma alla creazione di particelle: il moltiplicatore $e^{i\varepsilon t} = (e^{-i\varepsilon t})^*$ corrisponde ad una particella in piú di energia ε nello stato finale (vedi fine del § 2). In relazione a questo, i coefficienti $a_p^{(-)}$ vengono sostituiti con gli operatori b_{-p}^+ di creazione di certe altre particelle. Sostituendo inoltre nella seconda somma della (11,1) la notazione della variabile di somma p con $-p$ (in modo che il moltiplicatore esponenziale assuma la forma $e^{-i(pr-\varepsilon t)}$), otteniamo gli operatori ψ nella forma

$$\psi = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (a_p e^{-ipx} + b_p^+ e^{ipx}), \quad \psi^+ = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (a_p^+ e^{ipx} + b_p e^{-ipx}). \quad (11,2)$$

In questo modo, tutti gli operatori a_p e b_p risultano moltiplicati per funzioni con una « giusta » dipendenza dal tempo ($\sim e^{-i\varepsilon t}$), e gli operatori a_p^+ e b_p^+ per le loro coniugate complesse. Questo dà la possibilità di interpretare, in corrispondenza alle regole generali, gli operatori a_p e b_p come operatori di annichilazione (detti anche operatori di distruzione), e gli operatori a_p^+ e b_p^+ come operatori di creazione di particelle di impulso p ed energia ε.

Si arriva cosí al concetto di particelle di due specie, che intervengono nella teoria congiuntamente e in condizione di parità: esse sono dette *particelle* e *antiparticelle* (il senso di tale denominazione verrà chiarito piú avanti). A particelle di un tipo sono associati, nel formalismo della seconda quantizzazione, gli operatori a_p e a_p^+, alle particelle dell'altro tipo gli operatori b_p e b_p^+. Ambedue i tipi di particelle, i cui operatori entrano in uno stesso operatore ψ, hanno masse uguali.

La ragione di questi risultati può essere investigata anche dal punto di vista delle condizioni di invarianza relativistica.

Le trasformazioni di Lorentz rappresentano, da un punto di vista matematico, rotazioni del sistema di coordinate quadridimensionale, che cambiano la direzione dell'asse temporale (insieme con le rotazioni spaziali pure, che non toccano l'asse temporale, esse formano un gruppo di trasformazioni, detto *gruppo di Lorentz*[1])). Tutte queste trasformazioni godono della proprietà generale seguente: non fanno uscire l'asse t fuori dalla falda corrispondente del cono di luce; questo fatto è l'espressione del principio fisico dell'esistenza di una velocità limite di propagazione dei segnali.

Dal punto di vista matematico, però, anche il cambiamento simultaneo del segno di tutte e quattro le coordinate (*inversione quadridimensionale*) è una rotazione: il determinante di questa trasformazione è uguale a $+1$, come ogni altro determinante della trasformazione di rotazione. In questa trasformazione l'asse del tempo viene portato da una falda del cono di luce all'altra. Sebbene questo fatto significhi l'impossibilità fisica di realizzare questa trasformazione (in quanto trasformazione del sistema di riferimento), sotto il profilo matematico la differenza si riduce al fatto che, essendo la metrica non euclidea, questa rotazione non può essere fatta senza contemporaneamente ammettere una trasformazione complessa delle coordinate.

È naturale supporre che questa differenza debba essere inessenziale, quando si tratta dell'invarianza quadridimensionale. Allora ogni espressione, invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, deve essere invariante anche rispetto all'inversione quadridimensionale. La formulazione esatta di questa richiesta nell'applicazione all'operatore scalare ψ verrà data nel § 13. Notiamo, però, subito che questa richiesta porta, in ogni caso, alla necessità della presenza simultanea negli operatori ψ di termini con ambedue i segni davanti a ε negli esponenti, poiché la sostituzione $t \to -t$ cambia proprio questo segno.

Torniamo ora alle espressioni (11,2) e stabiliamo le relazioni di commutazione fra gli operatori a_p, a_p^+ (e b_p, b_p^+). Nel caso di fotoni questo è stato fatto (per gli operatori c_p e c_p^+) partendo dall'analogia con gli oscillatori, cioè, in sostanza, sulla base delle proprietà del campo elettromagnetico nel limite classico. Un'analogia del genere ora manca. Per stabilire le regole di commutazione (di Bose o di Fermi) fra gli operatori, noi possiamo basarci solo sulla forma dell'hamiltoniano costruito con questi operatori.

---

[1]) Notiamo che l'insieme di tutte le rotazioni tridimensionali (spaziali) costituisce, di per se stesso, un gruppo che entra nel gruppo di Lorentz come sottogruppo. L'insieme delle trasformazioni di Lorentz non costituisce, di per se stesso, un gruppo: il risultato di successive trasformazioni di Lorentz può essere ridotto ad una rotazione spaziale pura.

L'hamiltoniano si ottiene (vedi III, § 64) sostituendo nell'integrale $\int T_{00}\, d^3x$ ψ e ψ^* con ψ e ψ^{+1}). Otteniamo cosí

$$H = \sum_p \varepsilon\,(a_p^+ a_p + b_p b_p^+). \tag{11,3}$$

È facile vedere che per gli autovalori di questo hamiltoniano un risultato sensato si ottiene soltanto se gli operatori soddisfano le regole di commutazione di Bose

$$\{a_p,\ a_p^+\}_- = \{b_p,\ b_p^+\}_- = 1 \tag{11,4}$$

(tutte le altre coppie di operatori commutano; fra questi ci sono gli operatori di particelle a_p, a_p^+ che commutano con tutti gli operatori di antiparticelle b_p, b_p^+). In effetti, in questo caso

$$H = \sum_p \varepsilon\,(a_p^+ a_p + b_p^+ b_p + 1).$$

Gli autovalori dei prodotti $a_p^+ a_p$ e $b_p^+ b_p$ sono numeri interi positivi N_p e $\overline{N}_p$: numero di particelle e di antiparticelle. La grandezza additiva infinita $\sum \varepsilon$ (« energia di vuoto ») può essere semplicemente omessa:

$$E = \sum_p \varepsilon\,(N_p + \overline{N}_p) \tag{11,5}$$

(vedi la formula (3,1) e la nota aggiunta). Questa espressione è definita positiva e corrisponde al concetto di due tipi di particelle fisiche esistenti. In modo analogo, per la quantità di moto totale di un sistema di particelle otteniamo

$$\boldsymbol{P} = \sum_p \boldsymbol{p}\,(N_p + \overline{N}_p). \tag{11,6}$$

Se al posto delle (11,4) avessimo adottato le relazioni di commutazione di Fermi (anticommutatori invece di commutatori), avremmo ottenuto

$$H = \sum_p \varepsilon\,(a_p^+ a_p - b_p^+ b_p + 1),$$

e invece della (11,5) avremmo ottenuto l'espressione priva di senso fisico $\sum \varepsilon\,(N_p - \overline{N}_p)$, non definita positiva e che non può quindi rappresentare l'energia di un sistema di particelle libere.

Quindi, le particelle a spin 0 sono dei bosoni.

---

[1]) Nella teoria non relativistica si conviene di scrivere l'operatore coniugato ψ^+ a sinistra di ψ. Qui invece l'ordine è indifferente, poiché lo scambio di ψ e ψ^+ avrebbe portato solo allo scambio degli operatori a_p e b_p, che sono, da questo punto di vista, su un piano di parità. Una volta scelta una disposizione, è necessario, però, attenervisi sempre.

Consideriamo ora l'integrale Q (10,19). Sostituendo in j^0 le funzioni ψ e ψ^* con gli operatori ψ e ψ^+, integrando otteniamo

$$Q = \sum_p (a_p^+ a_p - b_p b_p^+) = \sum_p (a_p^+ a_p - b_p^+ b_p - 1). \qquad (11,7)$$

Gli autovalori di questo operatore (omettendo la costante additiva inessenziale $\sum^1$) sono

$$Q = \sum_p (N_p - \overline{N}_p), \qquad (11,8)$$

sono cioè uguali alla differenza fra il numero totale di particelle e il numero totale di antiparticelle.

Finché noi consideriamo particelle libere, facendo astrazione da ogni interazione fra di loro, il senso della legge di conservazione della quantità Q (come, del resto, anche delle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto totali (11,5-6)) resta, in notevole grado, convenzionale: si conserva, in realtà, non solo la somma, ma anche ognuno dei numeri N_p e $\overline{N}_p$ separatamente. Il problema della conservazione della quantità Q in un'interazione dipende dal carattere dell'interazione. Se Q si conserva (cioè se l'operatore Q commuta con l'hamiltoniano d'interazione), allora la (11,8) mostra quale limitazione questa legge impone sulle possibili variazioni del numero di particelle: si possono creare e distruggere solo coppie « particella + antiparticella ».

Se una particella è elettricamente carica, la sua antiparticella deve avere carica di segno opposto: se sia la prima che la seconda avessero cariche dello stesso segno, la creazione o la distruzione di una loro coppia sarebbe in contraddizione con una legge esatta della natura: la conservazione della carica elettrica totale. Vedremo piú avanti (§ 32) in che modo questa opposta polarità delle cariche appaia nella teoria automaticamente (nelle interazioni di particelle col campo elettromagnetico).

La quantità Q è detta, a volte, *carica* del campo delle particelle considerate. Per particelle elettricamente cariche, Q determina, in particolare, la carica elettrica totale del sistema (misurata in unità di carica elementare e). Sottolineiamo, tuttavia, che particelle e antiparticelle possono essere elettricamente neutre.

Noi vediamo cosí che il carattere della dipendenza relativistica dell'energia dalla quantità di moto (i due valori della radice dell'equazione $\varepsilon^2 = p^2 + m^2$) insieme con la condizione di invarianza relativistica, porta, nella teoria quantistica, ad un nuovo principio di classificazione delle particelle: la possibilità dell'esistenza di coppie di particelle differenti (particella-antiparticella), che si trovano tra loro nella corrispondenza descritta prima. Questa importante predizione fu fatta per la prima volta (per le particelle a spin 1/2) da *Dirac* nel 1930, ancora prima della scoperta sperimentale della prima antiparticella: il positrone.

§ 12. *Particelle realmente neutre*

Per la seconda quantizzazione della funzione ψ (11,1) i coefficienti $a_p^{(+)}$ e $a_p^{(-)}$ venivano considerati degli operatori associati a particelle diverse. Questo non è, tuttavia, obbligatorio: come caso particolare, gli operatori di creazione e di distruzione che entrano in ψ possono essere associati alle stesse particelle (come fu fatto per i fotoni; vedi (2,17)). Indicando in questo caso gli operatori sopracitati con c_p e c_p^+, scriviamo l'operatore ψ nella forma

$$\psi = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (c_p e^{-ipx} + c_p^+ e^{ipx}). \tag{12,1}$$

Il campo descritto da questo operatore corrisponde ad un sistema di particelle uguali, delle quali si può dire che esse « coincidono con le proprie antiparticelle ».

L'operatore (12,1) è hermitiano ($\psi^+ = \psi$); si può quindi dire che il campo è reale. È naturale che questo campo abbia due « gradi di libertà » in meno rispetto al campo complesso, per il quale gli operatori ψ e ψ^+ non coincidono.

In relazione a questo, il lagrangiano del campo, espresso attraverso l'operatore reale ψ, deve contenere in piú, rispetto alla (10,9), il moltiplicatore 1/2[1])

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi \cdot \partial^\mu \psi - m^2 \psi^2). \tag{12,2}$$

Il corrispondente tensore di energia-impulso è

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi \cdot \partial_\nu \psi - L g_{\mu\nu}, \tag{12,3}$$

e quindi l'operatore di densità di energia ha la forma

$$T_{00} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - L = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \psi)^2 + m^2 \psi^2 \right]. \tag{12,4}$$

Sostituendo la (12,1) nell'integrale $\int T_{00}\, d^3x$, otteniamo l'hamiltoniano del campo

$$H = \frac{1}{2} \sum_p \varepsilon (c_p^+ c_p + c_p c_p^+). \tag{12,5}$$

Da qui è di nuovo evidente la necessità della quantizzazione secondo Bose

$$\{c_p, c_p^+\}_- = 1, \tag{12,6}$$

---

[1]) Analogamente al fattore 1/2 nell'operatore (2,10) di densità di energia elettromagnetica del campo (espresso attraverso gli operatori reali **E** e **H**) rispetto alla densità di energia del fotone (3,2), espressa attraverso la sua funzione d'onda complessa; vedi nota a pag. 27.

e gli autovalori dell'energia (sempre omettendo la costante additiva) sono

$$E = \sum_p \varepsilon_p N_p. \tag{12,7}$$

Nella quantizzazione secondo Fermi, invece, avremmo ottenuto un risultato privo di senso, e cioè che il valore di E non dipende da N_p.

La « carica » Q del campo considerato è nulla. Questo è evidente già dal fatto che Q deve cambiare segno nella sostituzione delle particelle con antiparticelle, mentre nel dato caso le une e le altre « coincidono ». In relazione a questo, non esiste nemmeno il quadrivettore densità di corrente. Effettivamente, l'espressione

$$\mathrm{j}_\mu = i\,[\psi^+ \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi^+)\,\psi] \tag{12,8}$$

per l'operatore del quadrivettore conservativo j si annulla per $\psi = \psi^+$ (il vettore $\psi\,\partial_\mu \psi$ di per se stesso non si conserva). Questo fatto, a sua volta, significa l'assenza di una qualsiasi legge particolare di conservazione che limiti le possibili variazioni del numero di particelle. È evidente che tali particelle sono in ogni caso elettricamente neutre.

Le particelle di questo tipo sono chiamate particelle *realmente neutre*, a differenza delle particelle elettricamente neutre, che hanno una corrispondente antiparticella. Mentre queste ultime possono annichilarsi (trasformarsi in fotoni) soltanto a coppie, le particelle realmente neutre possono annichilarsi singolarmente.

La struttura dell'operatore ψ (12,1) è la stessa struttura degli operatori (2,17-20) del campo elettromagnetico. In questo senso si può dire che i fotoni stessi sono particelle realmente neutre. Nel caso del campo elettromagnetico il fatto che gli operatori fossero hermitiani era connesso con la realtà delle intensità del campo in quanto grandezze fisiche misurabili (al limite classico). Nel caso degli operatori ψ di particella non esistono legami di questo genere, poiché ad essi non corrisponde alcuna grandezza fisicamente misurabile. In relazione a questo è opportuno ricordare nuovamente che gli operatori ψ, nella teoria esistente, sono verosimilmente dei « concetti rudimentali » che scompariranno in una teoria coerente.

L'assenza del quadrivettore di corrente conservativo è una proprietà generale delle particelle neutre e non è legata con lo spin zero (infatti ha luogo anche per i fotoni). Da un punto di vista fisico questo significa l'assenza di divieti sulla variazione del numero di particelle. Da un punto di vista formale, invece, esiste una connessione diretta tra l'assenza della corrente conservativa e la realtà del campo, ossia il fatto che l'operatore ψ è hermitiano.

Il lagrangiano di un campo complesso

$$\mathrm{L} = \partial_\mu \psi^* \cdot \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi \tag{12,9}$$

è invariante rispetto alla moltiplicazione dell'operatore ψ per un qualsiasi fattore di fase, cioè rispetto alle trasformazioni[1])

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \qquad \psi^+ \to e^{-i\alpha}\psi^+. \tag{12,10}$$

In particolare, il lagrangiano non cambia per la trasformazione infinitesima

$$\psi \to \psi + i\delta\alpha\cdot\psi, \qquad \psi^+ \to \psi^+ - i\delta\alpha\cdot\psi^+. \tag{12,11}$$

Per una variazione infinitesima delle « coordinate generalizzate » q il lagrangiano subisce la variazione

$$\delta L = \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}}\right)\delta q_{,\mu}) =$$
$$= \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}}\right)\delta q + \sum \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}}\,\delta q\right)$$

(la somma è estesa a tutti i q). Il primo membro si annulla in forza delle « equazioni del moto » (equazioni di Lagrange). Intendendo come « coordinate » q gli operatori ψ e ψ^+ e ponendo $\delta\psi = i\delta\alpha\cdot\psi$, $\delta\psi^+ = -i\delta\alpha\cdot\psi^+$, otteniamo

$$\delta L = i\delta\alpha\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\psi\,\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} - \psi^+\,\frac{\partial L}{\partial \psi^+_{,\mu}}\right).$$

Da qui si vede che la condizione di invarianza del lagrangiano ($\delta L = 0$) è equivalente all'equazione di continuità ($\partial_\mu j^\mu = 0$) per il quadrivettore

$$j^\mu = i\left(\psi^+\,\frac{\partial L}{\partial \psi^+_{,\mu}} - \psi\,\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}}\right) \tag{12,12}$$

È facile convincersi che per il lagrangiano (12,9) questa formula porta alla corrente (12,8).

In tal modo, nel formalismo matematico della teoria, l'esistenza di una corrente conservativa risulta connessa con l'invarianza del lagrangiano rispetto alle trasformazioni (12,10) (*W. Pauli*, 1941). Il lagrangiano del campo realmente neutro (12,2) non gode, invece, di questa simmetria.

§ 13. *Trasformazioni* C, P, T

Contrariamente all'inversione quadridimensionale, l'inversione tridimensionale (spaziale) non è riducibile a delle rotazioni del 4-sistema di coordinate: il determinante di questa trasformazione non è uguale a $+1$, ma a -1. Le proprietà di simmetria delle par-

---

[1]) L'insieme di queste trasformazioni è detto *gruppo di gauge*.

ticelle rispetto all'inversione (P) non sono quindi predeterminate da considerazioni di invarianza relativistica[1]).

Applicata ad una funzione d'onda scalare l'operazione di inversione consiste nella trasformazione

$$P\psi(t, \boldsymbol{r}) = \pm\psi(t, -\boldsymbol{r}), \tag{13,1}$$

dove il segno + o — nella parte destra corrisponde rispettivamente ad un vero scalare o ad uno pseudoscalare.

Da qui si vede che occorre distinguere due aspetti del comportamento della funzione d'onda nell'inversione. Uno di questi aspetti è connesso con la dipendenza orbitale della funzione d'onda. Nella meccanica quantistica non relativistica veniva considerato solo questo aspetto; esso porta al concetto di parità di stato (che d'ora in poi noi chiameremo *parità orbitale*), che caratterizza le proprietà di simmetria del moto della particella. Se uno stato ha una determinata parità orbitale (+1 o —1), questo significa che

$$\psi(t, -\boldsymbol{r}) = \pm\psi(t, \boldsymbol{r}).$$

Un secondo aspetto è dato dal comportamento (nell'inversione degli assi coordinati) della funzione d'onda in un punto dato (che risulta comodo assumere come origine delle coordinate). Questo aspetto porta al concetto di *parità intrinseca* delle particelle. Alla parità intrinseca +1 o —1 corrispondono (per una particella a spin 0) i due segni nella definizione (13,1). La parità totale di un sistema di particelle è data dal prodotto delle loro parità intrinseche e della parità orbitale del moto relativo.

Le proprietà « intrinseche » di simmetria delle diverse particelle si manifestano, ovviamente, soltanto a seguito di processi di reciproche trasformazioni. L'analogo della parità intrinseca nella meccanica quantistica non relativistica è la parità di un dato stato legato di un sistema composto (ad esempio, di un nucleo). Dal punto di vista della teoria relativistica, che non fa differenze di principio fra particelle composte e particelle elementari, questa parità intrinseca non si differenzia dalla parità intrinseca di particelle, che figurano nella teoria non relativistica come elementari. Nel dominio non relativistico, dove queste ultime si comportano come un tutt'uno inalterabile, le loro proprietà intrinseche di simmetria non sono osservabili, e per questo il loro studio sarebbe privo di senso fisico.

Nel formalismo di seconda quantizzazione la parità intrinseca è espressa dal comportamento nell'inversione degli operatori ψ. A campi scalari e pseudoscalari corrispondono le seguenti leggi di

---

[1]) Il gruppo di Lorentz, con l'aggiunta dell'inversione spaziale, è detto *gruppo di Lorentz ampliato* (a differenza del gruppo originario, che non contiene P, e che, in relazione a questo, è detto *gruppo proprio*). Il gruppo ampliato contiene tutte le trasformazioni, che non portano l'asse t fuori dalle corrispondenti falde del cono di luce.

trasformazione:

$$P: \quad \psi(t, \boldsymbol{r}) \to \pm\psi(t, -\boldsymbol{r}). \tag{13,2}$$

Il senso stesso dell'azione dell'inversione sugli operatori ψ deve essere formulato sotto forma di una trasformazione degli operatori di distribuzione e di creazione di particelle, tale che come risultato di essa si abbia il cambiamento (13,2). È facile vedere che tale è la trasformazione

$$P: \quad a_p \to \pm a_{-p}, \quad b_p \to \pm b_{-p} \tag{13,3}$$

(e lo stesso per gli operatori coniugati). In effetti, facendo questa sostituzione nell'operatore

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (a_p e^{-i\omega t + i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}} + b_p^+ e^{i\omega t - i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}) \tag{13,4}$$

e cambiando quindi la notazione della variabile di somma ($\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$), lo riduciamo alla forma $\pm\psi(t, -\boldsymbol{r})$. In tal modo, indicando con $\psi^P(t, \boldsymbol{r})$ l'operatore, nel quale è stata effettuata la trasformazione (13,3), si può scrivere l'uguaglianza

$$\psi^P(t, \boldsymbol{r}) = \pm\psi(t, -\boldsymbol{r}). \tag{13,5}$$

Notiamo che il carattere della trasformazione (13,3) è del tutto naturale: l'inversione cambia il segno del vettore polare $\boldsymbol{p}$, e quindi le particelle di quantità di moto $\boldsymbol{p}$ vengono sostituite con particelle di quantità di moto $-\boldsymbol{p}$.

Nella (13,3) gli operatori a_p e b_p si trasformano o ambedue con il segno positivo o ambedue con il segno negativo. Nel formalismo di seconda quantizzazione questa è l'espressione del fatto che le parità intrinseche di particelle e antiparticelle (a spin 0) sono uguali. Ciò è di per se stesso evidente già dal fatto che particelle e antiparticelle (a spin 0) sono descritte dalle stesse funzioni d'onda (scalari o pseudoscalari).

L'operatore ψ (13,4) gode anche di simmetria rispetto ad una trasformazione che non ha analogo nella teoria non relativistica; questa trasformazione è detta *coniugazione di carica* e viene indicata col simbolo C. Se si scambiano reciprocamente tutti gli operatori a_p e b_p

$$C: \quad a_p \to b_p, \quad b_p \to a_p \tag{13,6}$$

(se cioè si sostituiscono le particelle con antiparticelle), allora ψ diventerà l'operatore « coniugato di carica » ψ^C per il quale si avrà

$$\psi^C(t, \boldsymbol{r}) = \psi^+(t, \boldsymbol{r}). \tag{13,7}$$

Questa uguaglianza è l'espressione della simmetria, con la quale i concetti di particelle e antiparticelle entrano nella teoria.

Notiamo che nella definizione della trasformazione di coniugazione di carica c'è un certo arbitrio formale inessenziale. Il senso della trasformazione non cambia se si introduce nella definizione (13,6) un qualsiasi fattore di fase

$$a_p \to e^{i\alpha} b_p, \quad b_p \to e^{-i\alpha} a_p.$$

Allora si avrebbe

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi^+, \quad \psi^+ \to e^{-i\alpha}\psi,$$

e una doppia applicazione di questa trasformazione porterebbe, come prima, ad una identità ($\psi \to \psi$). Tutte queste definizioni sono, tuttavia, equivalenti fra loro. Poiché le proprietà degli operatori ψ non cambiano se vengono moltiplicati per un fattore di fase (vedi la fine del paragrafo precedente), noi possiamo semplicemente cambiare la notazione di ψ in $\psi e^{i\alpha/2}$, dopo di che torneremo alla definizione della coniugazione di carica nella forma (13,6-7).

Poiché la coniugazione di carica sostituisce la particella con una particella a lei non identica, questa operazione non porta, nel caso generale, ad una nuova caratteristica della particella o di un sistema di particelle come tali.

Un'eccezione, in questo senso, è costituita da sistemi di ugual numero di particelle e di antiparticelle. L'operatore C trasforma questo sistema in se stesso, e quindi in questo caso esistono per esso autostati corrispondenti agli autovalori $C = \pm 1$ (questi valori seguono dal fatto che $C^2 = 1$). Per descrivere la simmetria di carica si possono considerare particelle e antiparticelle come due diversi « stati di carica » di una stessa particella, che si differenziano per il valore del numero quantico di carica $Q = \pm 1$. La funzione d'onda di un sistema è rappresentata dal prodotto della funzione orbitale e della funzione di « carica » e deve essere simmetrica rispetto allo scambio simultaneo di tutte le variabili (orbitali e di carica) di una qualsiasi coppia di particelle. La simmetria della funzione « di carica » determinerà la parità di carica del sistema (vedi problema)[1].

Come è stato già sottolineato nel § 1, nella teoria relativistica non esiste una differenza di principio tra particelle « composte » e particelle « elementari ». Per questo anche il concetto di parità di carica, che è naturale per sistemi « realmente neutri », deve valere anche per particelle « elementari » realmente neutre. Nel formalismo di seconda quantizzazione questo concetto è descritto dall'uguaglianza

$$\psi^C = \pm\psi; \tag{13,8}$$

i segni + e — corrispondono a particelle a parità di carica pari e dispari, rispettivamente.

---

[1]) In questi ragionamenti si sottintendono particelle a spin 0. Il metodo descritto si generalizza direttamente anche ad altri casi (vedi, ad esempio, il problema al § 27).

Nel § 11 è stato mostrato che l'invarianza relativistica implica anche l'invarianza per la 4-inversione. Per un operatore scalare (rispetto alle rotazioni quadridimensionali) del campo questo significa che per tale trasformazione deve essere

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) \to \psi(-t, -\boldsymbol{r})$$

sempre con il medesimo segno + nella parte destra. In termini di trasformazione degli operatori a_p e b_p la trasformazione di $\psi(t, \boldsymbol{r})$ in $\psi(-t, -\boldsymbol{r})$ si ottiene mediante la permutazione nella (13,4) dei coefficienti di e^{-ipx} e di e^{ipx}, cioè mediante la sostituzione

$$a_p \to b_p^+, \quad b_p \to a_p^+. \tag{13,9}$$

Sostituendo gli operatori a con gli operatori b, questa trasformazione include in sé lo scambio reciproco di particelle con antiparticelle. Noi vediamo che nella teoria relativistica sorge, in maniera naturale, la richiesta di invarianza rispetto alla trasformazione che, simultaneamente con l'inversione spaziale (P) e l'inversione temporale (T), include in sé anche la coniugazione di carica (C); questa affermazione costituisce il contenuto del *teorema CPT* [1]).

In relazione a ciò, è opportuno, tuttavia, sottolineare che, sebbene i ragionamenti esposti qui e nei §§ 11, 12 siano un naturale sviluppo dei concetti della meccanica quantistica ordinaria e della teoria classica della relatività, i risultati ottenuti in questo modo escono dall'ambito di queste teorie sia per la forma (gli operatori ψ che contengono simultaneamente gli operatori di creazione e di distruzione), che per la sostanza (particelle e antiparticelle). Non si possono quindi considerare questi risultati come una necessità puramente logica. Essi contengono nuovi principi fisici, criterio della giustezza dei quali può essere solo l'esperienza.

Indicando con $\psi^{CPT}(t, \boldsymbol{r})$ l'operatore (13,4) sottoposto alla trasformazione (13,9), si può scrivere

$$\psi^{CPT}(t, \boldsymbol{r}) = \psi(-t, -\boldsymbol{r}). \tag{13,10}$$

In questo modo, formulando la 4-inversione come la trasformazione (13,9), con ciò stesso noi stabiliamo per l'operatore ψ anche la formulazione della trasformazione di inversione del tempo: insieme con la trasformazione CP, essa deve dare la (13,9)[2]). Tenendo conto della definizione (13,3) e della (13,6), troviamo quindi

$$\mathrm{T}: \quad a_p \to \pm a_{-p}^+, \quad b_p \to \pm b_{-p}^+ \tag{13,11}$$

(i segni $\pm$ corrispondono ai medesimi segni della (13,3)). Il senso di questa trasformazione è assolutamente naturale: l'inversione del

---

[1]) La formulazione di questo teorema appartiene a *J. Schwinger* (1953), *G. Lüders* (1954) e *W. Pauli* (1955).

[2]) La trasformazione CP è detta *inversione combinata*.

tempo non solo cambia il moto di impulso $\boldsymbol{p}$ nel moto di impulso $-\boldsymbol{p}$, ma scambia di posto gli stati iniziali e finali negli elementi di matrice; per questo gli operatori di distruzione di particelle di quantità di moto $\boldsymbol{p}$ vengono sostituiti con operatori di creazione di particelle di quantità di moto $-\boldsymbol{p}$. Operando la sostituzione (13,11) nella (13,4) e ridefinendo la notazione della variabile di somma ($\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$), troveremo[1])

$$\psi^T(t, \boldsymbol{r}) = \pm \psi^+(-t, \boldsymbol{r}). \tag{13,12}$$

Questa uguaglianza è l'analogo della regola ordinaria di inversione del tempo in meccanica quantistica: se uno stato è descritto dalla funzione d'onda $\psi(t, \boldsymbol{r})$, lo stato « invertito rispetto al tempo » è descritto dalla funzione d'onda $\psi^*(-t, \boldsymbol{r})$; il passaggio alla funzione complessa coniugata è connesso alla necessità di ristabilire il « giusto » carattere di dipendenza temporale infranto dal cambiamento di segno di t (*E. P. Wigner*, 1932).

Poiché la trasformazione T (e con essa anche CPT) scambia di posto gli stati iniziali e finali, per essa i concetti di autostati e autovalori non hanno senso. Per questa ragione queste operazioni non portano a nuove caratteristiche delle particelle come tali. A proposito delle conseguenze, a cui esse portano nell'applicazione ai processi di diffusione, si parlerà nel § 70.

Vediamo ora come si comporta il quadrivettore operatoriale corrente $\mathbf{j}^\mu$ nelle trasformazioni C, P e T. La trasformazione (13,2), insieme con la sostituzione $(\partial_0, \partial_i) \to (\partial_0, -\partial_i)$, dà

$$\mathrm{P}: \qquad (\mathbf{j}^0, \mathbf{j})_{t,\boldsymbol{r}} \to (\mathbf{j}^0, -\mathbf{j})_{t,-\boldsymbol{r}}, \tag{13,13}$$

come deve essere per un vero quadrivettore. La trasformazione (13,7) darebbe semplicemente

$$\mathrm{C}: \qquad (\mathbf{j}^0, \mathbf{j})_{t,\boldsymbol{r}} \to (-\mathbf{j}^0, -\mathbf{j})_{t,\boldsymbol{r}}, \tag{13,14}$$

se gli operatori ψ e ψ^+ commutassero. La non commutatività di questi operatori nasce, tuttavia, dalla non commutatività di $a_{\boldsymbol{p}}$ e $a_{\boldsymbol{p}}^+$ (o di $b_{\boldsymbol{p}}$ e $b_{\boldsymbol{p}}^+$) con $\boldsymbol{p}$ uguali; ma per le regole di commutazione (11,4), lo scambio di questi operatori porta solo alla comparsa di termini che non dipendono dai numeri di occupazione, cioè dallo stato del campo. Omettendo (come è stato fatto nelle (11,5-6)) questi termini in quanto inessenziali, noi torniamo alla regola (13,14), che ha un senso naturale: sostituendo particelle con antiparticelle, la coniugazione di carica cambia il segno di tutte le componenti della 4-corrente. Poiché l'operazione di inversione temporale è connessa con la trasposizione degli stati iniziali e finali, questa trasfor-

[1]) Se si definisse l'operazione T senza relazione con le altre trasformazioni, sarebbe sorto quello stesso arbitrio nella scelta del fattore di fase, che si ha per l'operazione C. La richiesta della simmetria CPT lascia arbitraria la scelta del fattore di fase soltanto in una delle trasformazioni: C o T.

mazione, operando su un prodotto di operatori, cambia l'ordine dei fattori. Cosí si ha

$$(\psi^+\partial_\mu\psi)^T = (\partial_\mu\psi)^T(\psi^+)^T.$$

Nel caso considerato, tuttavia, questo fatto è inessenziale: per la commutatività degli operatori ψ (nel senso indicato prima) il ritorno all'ordine originario dei fattori non si riflette sul risultato. Notando inoltre che nell'inversione del tempo si ha $(\partial_0, \partial_i) \to (-\partial_0, \partial_i)$, troviamo la regola di trasformazione della corrente:

$$\mathrm{T}: \qquad (\mathrm{j}^0, \mathbf{j})_{t,\, r} \to (\mathrm{j}^0, -\mathbf{j})_{-t,\, r}. \tag{13,15}$$

Il vettore tridimensionale $\mathbf{j}$ cambia il segno corrispondentemente al significato classico di questa grandezza.

Infine, nella trasformazione CPT, abbiamo

$$\mathrm{CPT}: \qquad (\mathrm{j}^0, \mathbf{j})_{t,\, r} \to (-\mathrm{j}^0, -\mathbf{j})_{-t,\, -r} \tag{13,16}$$

in corrispondenza al senso di questa operazione come di una 4-inversione. Sottolineiamo a questo proposito che, poiché la 4-inversione si riduce ad una rotazione del 4-sistema di coordinate, rispetto ad essa non esistono, in generale, due tipi (veri e pseudo) di tensori di rango qualsiasi.

Finora si sottintendeva che le particelle erano libere. I numeri quantici di parità, tuttavia, acquistano un senso reale soltanto quando si considerano particelle interagenti, quando ad essi vengono associate regole di selezione, che permettono o vietano questi o quei processi. Un significato di questo genere, tuttavia, lo possono avere soltanto caratteristiche conservative: autovalori di operatori, che commutano con l'hamiltoniano delle particelle interagenti.

Dall'invarianza relativistica discende che l'operatore di trasformazione CPT deve in ogni caso commutare con l'hamiltoniano. Per quanto riguarda le trasformazioni C e P (e con esse anche T) separatamente, l'esperienza mostra che le interazioni elettromagnetiche e forti sono invarianti rispetto ad esse, e quindi i corrispondenti numeri quantici in queste interazioni si conservano. Nelle interazioni deboli, invece, queste leggi di conservazione vengono violate[1]).

Anticipando un poco, diremo che l'operatore di interazione di particelle cariche col campo elettromagnetico è dato dal prodotto dei quadrivettori operatoriali A e j. Poiché la coniugazione di carica cambia il segno di j, l'invarianza dell'interazione elettromagnetica rispetto a questa trasformazione significa che anche A deve cambiare segno. In altre parole, i fotoni hanno parità di carica dispari.

Questo comportamento degli operatori A è in corrispondenza con le proprietà del 4-potenziale nella teoria classica. In effetti, dalle

---

[1]) L'idea della possibile violazione della parità nelle interazioni deboli fu per la prima volta espressa da *T. D. Lee* e *C. N. Yang* (1956).

trasformazioni

$$\begin{aligned} C:&\quad (A_0, \mathbf{A}) \to (-A_0, -\mathbf{A})_{t,\, r}, \\ P:&\quad (A_0, \mathbf{A}) \to (A_0, -\mathbf{A})_{t,\, -r}, \\ CPT:&\quad (A_0, \mathbf{A}) \to (-A_0, -\mathbf{A})_{-t,\, -r} \end{aligned}$$

discende che

$$T:\quad (A_0, \mathbf{A}) \to (A_0, -\mathbf{A})_{-t,\, r},$$

che corrisponde alla regola classica di trasformazione dei potenziali del campo elettromagnetico per l'inversione del tempo.

PROBLEMA

Determinare la parità spaziale e di carica di un sistema a due particelle a spin 0 (particella e antiparticella) e di momento angolare orbitale del moto relativo l.

Soluzione. Lo scambio delle coordinate delle particelle è equivalente all'inversione (rispetto al baricentro) e quindi moltiplica la funzione orbitale per $(-1)^l$; lo scambio delle variabili di carica è equivalente alla coniugazione di carica e moltiplica il fattore « di carica » della funzione d'onda per il valore cercato C. Dalla condizione $C\,(-1)^l = 1$ discende

$$C = (-1)^l.$$

La parità spaziale P del sistema è il prodotto della parità orbitale e delle parità intrinseche delle due particelle. Poiché le parità intrinseche della particella e dell'antiparticella sono uguali, nel caso considerato P coincide con la parità orbitale: $P = (-1)^l$.

§ 14. *Equazione d'onda per particelle a spin* 1

Una particella di spin 1 è descritta, nel suo sistema di quiete, da una funzione d'onda a tre componenti, cioè da un vettore tridimensionale (tale particella è detta *vettoriale*). Per la loro origine quadridimensionale, queste componenti possono essere le tre componenti spaziali di un quadrivettore ψ^μ (di tipo spaziale) oppure di un quadritensore antisimmetrico di secondo rango $\psi^{\mu\nu}$, per i quali nel sistema di quiete si annullano la componente temporale (ψ^0) e le componenti spaziali (ψ^{kt})[1].

L'equazione d'onda, legame differenziale tra le grandezze ψ^μ, $\psi^{\mu\nu}$, viene stabilita mediante relazioni che noi scriviamo nella forma

$$i\psi_{\mu\nu} = p_\mu\psi_\nu - p_\nu\psi_\mu, \tag{14,1}$$

$$im^2\psi_\mu = p^\nu\psi_{\mu\nu}, \tag{14,2}$$

---

[1]) Anticipando, diremo che all'insieme del quadrivettore ψ_μ e del quadritensore $\psi^{\nu\mu}$ corrisponde un insieme di spinori quadridimensionali di rango 2 $\xi^{\alpha\beta}$, $\eta_{\cdot\cdot\,\alpha\dot\beta}$, $\zeta^{\alpha\dot\beta}$, dove $\xi^{\alpha\beta}$ e $\eta_{\cdot\cdot\,\alpha\beta}$ sono spinori simmetrici che si trasformano tra loro nell'inversione (§ 19).

dove $p = i\partial$ (*A. Proca*, 1936). Applicando ad ambedue i membri dell'equazione (14,2) l'operazione p^μ, otteniamo (per l'antisimmetria di $\psi_{\mu\nu}$)

$$p^\mu \psi_\mu = 0. \tag{14,3}$$

Eliminiamo dalle (14,1-2) la grandezza $\psi_{\mu\nu}$ sostituendo la prima equazione nella seconda. Tenendo conto della (14,3) otteniamo

$$(p^2 - m^2)\psi_\mu = 0, \tag{14,4}$$

da cui si vede nuovamente (cfr. § 10) che m è la massa della particella. In tal modo, si può descrivere una particella libera a spin 1 mediante il solo quadrivettore ψ^μ, le cui componenti soddisfano l'equazione del secondo ordine (14,4) e anche la condizione (14,3) che esclude da ψ^μ la parte relativa a spin 0.

Nel sistema di quiete, dove ψ_μ non dipende dalle coordinate spaziali, troviamo che $p^0\psi_0 = 0$. Poiché contemporaneamente si ha $p^0\psi_0 = m\psi_0$, vediamo che nel sistema di quiete $\psi_0 = 0$, come doveva essere. Insieme ad ψ_0 si annullano anche le ψ_{ki}.

Una particella a spin 1 può avere parità intrinseche differenti a seconda che ψ^μ sia un vero vettore o uno pseudovettore. Nel primo caso

$$P\psi^\mu = (\psi^0, -\psi^i),$$

e nel secondo

$$P\psi^\mu = (-\psi^0, \psi^i).$$

Le equazioni (14,1-2) possono essere ottenute mediante il principio variazionale dal lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu *} - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu *}(\partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu) - \\ - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu}(\partial_\mu\psi^*_\nu - \partial_\nu\psi^*_\mu) + m^2\psi_\mu\psi^{\mu *}. \tag{14,5}$$

Il ruolo di coordinate generalizzate indipendenti è svolto in esso da ψ_μ, ψ^*_μ, $\psi_{\mu\nu}$, $\psi^*_{\mu\nu}$[1]).

Per trovare il tensore di energia-impulso, la formula (10,11) non è, in questo caso, del tutto comoda, poiché essa porterebbe ad un tensore antisimmetrico, per il quale sarebbe necessaria un'ulteriore simmetrizzazione. Si può invece usare la formula

$$\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\sqrt{-g} = -\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} + \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{14,6}$$

nella quale si suppone che L sia espresso in forma relativa a coordinate curvilinee qualsiasi (vedi II, § 94). Se L contiene solo le com-

[1]) Se si eseguisse la variazione solo rispetto a ψ_μ (supponendo che $\psi_{\mu\nu}$ sia espresso attraverso ψ_μ secondo la (14,1)), l'equazione (14,3) avrebbe dovuto essere introdotta come condizione addizionale, non legata al principio variazionale.

ponenti del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ (ma non le sue derivate rispetto alle coordinate), allora la formula si semplifica:

$$T_{\mu\nu}=\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g^{\mu\nu}}=2\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}}-g_{\mu\nu}L$$

(ricordiamo che $d\ln g=-g_{\mu\nu}\,dg^{\mu\nu}$).

Poiché nella formula (14,6) la derivazione è fatta non rispetto alle grandezze ψ_μ, $\psi_{\mu\nu}$, quando la si applica non è obbligatorio considerare queste grandezze come indipendenti; si può ricorrere subito alla (14,1) e trascrivere il lagrangiano (14,5) nella forma

$$L=-\frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^*_{\lambda\rho}g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}+m^2\psi_\mu\psi^*_\nu g^{\mu\nu}. \tag{14,7}$$

Allora

$$T_{\mu\nu}=-\psi_{\mu\lambda}\psi_\nu{}^{\lambda*}-\psi^*_{\mu\lambda}\psi_\nu{}^{\lambda}+m^2(\psi^*_\mu\psi_\nu+\psi^*_\nu\psi_\mu)+$$
$$+g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\psi_{\lambda\rho}\psi^{\lambda\rho*}-m^2\psi^*_\lambda\psi^\lambda\right). \tag{14,8}$$

In particolare, la densità di energia è data dall'espressione definita positiva

$$T_{00}=\frac{1}{2}\psi_{ik}\psi^*_{ik}+\psi_{0i}\psi^*_{0i}+m^2(\psi_0\psi^*_0+\psi_i\psi^*_i). \tag{14,9}$$

Il quadrivettore conservativo densità di corrente è dato dall'espressione

$$j^\mu=i(\psi^{\mu\nu*}\psi_\nu-\psi^{\mu\nu}\psi^*_\nu). \tag{14,10}$$

Secondo la formula (12,12), è possibile trovare questa grandezza derivando il lagrangiano (14,5) rispetto alle derivate $\partial_\mu\psi_\nu$. In particolare

$$j^0=i(\psi^{0k*}\psi_k-\psi^{0k}\psi^*_k) \tag{14,11}$$

e non è una grandezza definita positiva.

L'onda piana, normalizzata con una particella nell'unità di volume $V=1$, ha la forma

$$\psi_\mu=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_\mu e^{-ipx},\quad u_\mu u^{\mu*}=-1, \tag{14,12}$$

dove u_μ è il quadrivettore unitario polarizzazione, che soddisfa (in forza della (14,3)) la condizione di trasversalità quadridimensionale

$$u_\mu p^\mu=0. \tag{14,13}$$

In effetti, sostituendo la funzione (14,12) nella (14,9) e nella (14,11), otteniamo

$$T_{00}=-2\varepsilon^2\psi_\mu\psi^{\mu*}=\varepsilon,\qquad j^0=1.$$

Contrariamente al fotone, una particella vettoriale di massa non nulla ha tre polarizzazioni indipendenti. Per le ampiezze corrispondenti vedere la (16,21).

La quantizzazione del campo vettoriale viene effettuata in maniera analoga al caso del campo scalare, e non c'è necessità di ripetere di nuovo tutti i ragionamenti. L'espressione (14,9) per T_{00} definita positiva e l'indeterminatezza di j^0 (14,11) portano, come nel caso scalare, alla necessità della quantizzazione secondo Bose.

Una stretta connessione esiste tra le proprietà di un campo vettoriale realmente neutro e il campo elettromagnetico. Il campo vettoriale neutro è descritto dall'operatore reale ψ:

$$\psi_\mu = \sum_{p\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (c_{p\alpha} u_\mu^{(\alpha)} e^{-ipx} + c_{p\alpha}^+ u_\mu^{(\alpha)*} e^{ipx}), \qquad (14,14)$$

dove $c_{p\alpha}$, $c_{p\alpha}^+$ sono gli operatori bosonici di distruzione e di creazione di particelle (l'indice α numera le tre polarizzazioni indipendenti). Il lagrangiano di questo campo è

$$L = \frac{1}{4} \psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \psi^{\mu\nu} (\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu) + \frac{1}{2} m^2 \psi_\mu \psi^\mu. \qquad (14,15)$$

Al campo elettromagnetico corrisponde il caso $m = 0$. In questo caso il quadrivettore ψ^μ diventa il 4-potenziale A^μ, e il 4-tensore $\psi^{\mu\nu}$ diventa il tensore di campo $F^{\mu\nu}$, legato al potenziale dalla definizione (14,1). L'equazione (14,2) si trasforma in $\partial^\nu \psi_{\mu\nu} = 0$, che corrisponde alla seconda coppia delle equazioni di Maxwell. La condizione (14,3) non discende da questa equazione e quindi non è piú obbligatoria. Mancando la condizione addizionale, non c'è piú la necessità di considerare nel lagrangiano ψ_μ e $\psi_{\mu\nu}$ come « coordinate » indipendenti, e il lagrangiano (14,15) si riduce a

$$L = -\frac{1}{4} \psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} \qquad (14,16)$$

in corrispondenza alla nota espressione classica del lagrangiano del campo elettromagnetico. Questo lagrangiano, insieme al tensore $\psi_{\mu\nu}$, è invariante rispetto a qualsiasi trasformazione di gauge dei « potenziali » ψ_μ. È evidente la connessione di questo fatto con il fatto che la massa è nulla: il lagrangiano (14,15) non ha questa proprietà a causa del membro $m^2\psi_\mu\psi^\mu$.

§ 15. *Equazione d'onda per particelle a spin superiore intero*

Poiché le equazioni d'onda (14,3-4) discendono direttamente dall'assegnazione della massa e dello spin della particella, l'uso pratico del lagrangiano non si riduce tanto alla deduzione di queste equazioni, quanto alla costruzione delle espressioni per l'energia, la quantità di moto e la carica del campo.

Per fare questo, come già si è notato, invece della (14,5) si può usare l'espressione (14,7), e quest'ultima si può ulteriormente trasformare. Usando la (14,1) trascriviamo la (14,7) nella forma

$$L = -(\partial_\mu \psi_\nu^*)(\partial^\mu \psi^\nu) + (\partial_\nu \psi_\mu^*)(\partial^\mu \psi^\nu) + m^2 \psi_\mu \psi^{\mu *} =$$
$$= -(\partial_\mu \psi_\nu^*)(\partial^\mu \psi^\nu) + m^2 \psi_\mu^* \psi^\mu + \partial_\nu (\psi_\mu^* \partial^\mu \psi^\nu) - \psi_\mu^* \partial^\mu \partial_\nu \psi^\nu.$$

Dalla (14,3) segue che l'ultimo membro si annulla, e il penultimo è una derivata totale. Omettendo quest'ultima, otteniamo il lagrangiano

$$L' = -(\partial_\mu \psi_\nu^*)(\partial^\mu \psi^\nu) + m^2 \psi_\mu^* \psi^\mu. \tag{15,1}$$

Esso ha la stessa struttura del lagrangiano (10,9) per particella a spin 0, differenziandosi solo per la sostituzione dello scalare ψ con il quadrivettore ψ_μ e per il segno. Quest'ultimo fatto è legato alla circostanza che ψ_μ è un vettore di tipo spaziale, e quindi $\psi_\mu \psi^{\mu *} < 0$, mentre per una particella scalare si ha $\psi \psi^* > 0$.

Costruendo il quadritensore di energia-impulso e il quadrivettore corrente mediante il lagrangiano (15,1), noi otterremo per il campo scalare espressioni dello stesso tipo delle (10,12) e (10,18)

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu \psi^{\lambda *} \cdot \partial_\nu \psi_\lambda - \partial_\nu \psi^{\lambda *} \cdot \partial_\mu \psi_\lambda - L' g_{\mu\nu}, \tag{15,2}$$

$$j_\mu = -i\,[\psi_\lambda^* \partial_\mu \psi^\lambda - (\partial_\mu \psi_\lambda^*)\,\psi^\lambda]. \tag{15,3}$$

La differenza di queste espressioni dalla (14,8) e dalla (14,10) si riduce ai differenziali totali. Ma i valori locali di queste grandezze non hanno (come è già stato sottolineato) un profondo senso fisico. Sono essenziali soltanto gli integrali di volume P_μ (10,15) e Q (10,19), che coincideranno per ambedue le scelte di $T_{\mu\nu}$ e j_μ.

Questo procedimento si generalizza direttamente a particelle a spin (intero) qualsiasi. La funzione d'onda di una particella a spin s è un quadritensore irriducibile di rango s, cioè un tensore simmetrico rispetto a tutti i propri indici e che si annulla nella contrazione rispetto ad una coppia qualsiasi di indici:

$$\psi_{..\mu.\nu..} = \psi_{..\nu.\mu..}, \quad \psi_{..\mu.}{}^{\mu}{}_{..} = 0. \tag{15,4}$$

Questo tensore deve soddisfare la condizione addizionale di trasversalità quadridimensionale

$$\mathrm{p}^\mu \psi_{..\mu..} = 0, \tag{15,5}$$

e ognuna delle sue componenti deve soddisfare l'equazione del secondo ordine

$$(\mathrm{p}^2 - m^2)\,\psi_{...} = 0. \tag{15,6}$$

Nel sistema di quiete, la condizione (15,5) porta all'annullamento di tutte le componenti del quadritensore fra i cui indici c'è l'indice 0. In altre parole, la funzione d'onda nel sistema di quiete (cioè al

limite non relativistico) si riduce, come doveva essere, ad un tensore irriducibile tridimensionale di rango s, che ha $2s + 1$ componenti indipendenti.

Il lagrangiano, il tensore di energia-impulso e il vettore corrente per un campo associato a particelle a spin s si differenziano dalle (15,1-3) solo per la sostituzione di ψ_λ con $\psi_{\lambda\mu\ldots}$.

L'onda piana normalizzata è

$$\psi^{\mu\nu\cdots} = \frac{2}{\sqrt{2\varepsilon}} u^{\mu\nu\cdots} e^{-ipx}, \quad u^*_{\mu\nu\ldots} u^{\mu\nu\cdots} = -1, \tag{15,7}$$

e l'ampiezza d'onda soddisfa le condizioni

$$u^{\cdot\cdot\mu\cdot\cdot} p_\mu = 0. \tag{15,8}$$

Si hanno $2s + 1$ stati indipendenti di polarizzazione.

La quantizzazione del campo viene fatta mediante una generalizzazione evidente dei casi di spin 0 e 1.

Lo schema esposto è del tutto sufficiente allo scopo che ci si era posto: la descrizione del campo di particelle libere. Le cose stanno diversamente se ci si pone il problema di descrivere le interazioni di particelle col campo elettromagnetico. Questa interazione dovrebbe venire introdotta nel lagrangiano, dal quale tutte le equazioni si dovrebbero poter ottenere senza la necessità di condizioni addizionali (vedi anche nota a pag. 149). Di fatto, però, risulta che tale descrizione dell'interazione è applicabile solo a elettroni, ossia particelle a spin 1/2 (vedi § 32). Quindi per gli altri spin questo problema potrebbe avere solo un interesse metodologico.

Notiamo che per tutti gli spin (interi e seminteri) $s > 1$ risulta impossibile formulare il principio variazionale ricorrendo solo ad una funzione (tensoriale o spinoriale), il rango della quale corrisponda allo spin dato. A questo scopo risulta necessario introdurre, come ausiliarie, grandezze tensoriali e spinoriali di rango inferiore. Il lagrangiano viene costruito in modo tale che queste grandezze ausiliarie si annullino automaticamente in forza delle equazioni del campo di particelle libere, che seguono dal principio variazionale[1]).

§ 16. *Stati di elicità delle particelle*[2])

Nella teoria relativistica, il momento angolare orbitale $\boldsymbol{l}$ e lo spin $\boldsymbol{s}$ di una particella in moto non si conservano separatamente. Si conserva soltanto il momento angolare totale $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}$. Non si conserva, quindi, nemmeno la proiezione dello spin su una direzione data qualsiasi (asse z), e di conseguenza questa grandezza non

[1]) Vedi M. Fierz, W. Pauli, Proc. Roy. Soc. A173, 211 (1939). In questo lavoro viene svolto il programma, indicato per particelle a spin 3/2 e 2.

[2]) Il contenuto di questo paragrafo vale per particelle a spin qualsiasi (intero e semintero).

può servire per la classificazione degli stati di polarizzazione (di spin) di una particella in moto.

Si conserva, tuttavia, la proiezione dello spin sulla direzione della quantità di moto; poiché $\boldsymbol{l} = [\boldsymbol{rp}]$, il prodotto $\boldsymbol{sn}$ coincide col prodotto conservativo $\boldsymbol{jn}$ ($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$). Questa grandezza è chiamata *elicità*[1]) (noi l'abbiamo già studiata per il fotone nel § 8). Indicheremo gli autovalori di questa grandezza con la lettera λ ($\lambda = -s, \ldots \ldots, +s$), e gli stati di una particella con dati valori di λ saranno chiamati stati di elicità.

Sia $\psi_{p\lambda}$ una funzione d'onda (un'onda piana), che descrive lo stato di una particella di dati $\boldsymbol{p}$ e λ e sia $u^{(\lambda)}(\boldsymbol{p})$ la sua ampiezza; per semplificare le notazioni non scriveremo gli indici delle componenti di questa funzione (per spin intero questo riguarda gli indici quadritensoriali).

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto che per una descrizione relativistica di particelle a spin (intero) diverso da zero, occorre introdurre una funzione d'onda con un numero di componenti superiore a $2s+1$. Tuttavia, il numero delle componenti indipendenti resta sempre uguale a $2s+1$; le componenti « ridondanti » vengono eliminate con la imposizione di condizioni addizionali, per cui queste componenti, nel sistema di quiete, si annullano (nel capitolo seguente vedremo che questo vale anche per spin seminteri).

Secondo le formule di trasformazione del momento angolare (vedi II, § 14), l'elicità è invariante per le trasformazioni di Lorentz, che non cambiano la direzione di $\boldsymbol{p}$, sulla quale viene proiettato il momento angolare. Per queste trasformazioni, quindi, il numero λ conserva il suo senso di numero quantico, e per lo studio delle proprietà di simmetria degli stati di elicità si può usare un sistema di riferimento, in cui $|\boldsymbol{p}| \ll m$ (al limite, il sistema di quiete). Allora $\psi_{p\lambda}$ si ridurrà alla funzione d'onda non relativistica a $(2s+1)$ componenti. Indichiamo la sua ampiezza con $w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n})$, ponendo come argomento la direzione $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$, lungo la quale viene quantizzato il momento angolare. L'ampiezza $w^{(\lambda)}$ è l'autofunzione dell'operatore $\boldsymbol{ns}$

$$(\boldsymbol{ns})\, w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n}) = \lambda w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n}). \tag{16,1}$$

In rappresentazione spinoriale $w^{(\lambda)}$ è uno spinore controvariante di rango $2s$; secondo le formule di corrispondenza III (57,2) le sue componenti si possono numerare anche secondo i corrispondenti valori della proiezione dello spin σ su un asse fissato z[2]).

---

[1]) In inglese: helicity.

[2]) I ragionamenti riportati qui (come anche l'elencazione dei possibili valori di λ) si riferiscono a particelle di massa non nulla. Per particelle di massa nulla, non esiste un sistema di quiete e l'elicità può avere solo due valori $\lambda = \pm s$. Quest'ultimo fatto è connesso con una circostanza già ricordata nel § 8: gli stati di tale particella vengono classificati secondo il loro comportamento rispetto al

Nella rappresentazione degli impulsi, le funzioni d'onda degli stati considerati coincidono, fondamentalmente, con le ampiezze $u^{(\lambda)}(\boldsymbol{p})$. Precisamente

$$\psi_{p\lambda}(\boldsymbol{k}) = u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n}) = u^{(\lambda)}(\boldsymbol{p})\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n}), \qquad (16,2)$$

dove la quantità di moto in quanto variabile indipendente è indicata con $\boldsymbol{k}$, a differenza del suo autovalore $\boldsymbol{p}$, e $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$, a differenza di $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$[1]). Nel limite non relativistico

$$\psi_{n\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = w^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu})\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n}) = w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n})\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n}). \qquad (16,3)$$

Piú particolareggiatamente, questa espressione va scritta nella forma

$$\psi_{n\lambda}(\boldsymbol{\nu}, \sigma) = w_{\sigma}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu})\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n}),$$

dove è esplicitamente indicata anche la variabile indipendente discreta σ.

L'operatore di elicità $\boldsymbol{sn}$ commuta con gli operatori $\mathbf{j}_z$ e $\mathbf{j}^2$. Effettivamente, l'operatore del momento angolare è connesso ad una rotazione infinitesima del sistema di coordinate, e un prodotto scalare di due vettori è invariante per qualsiasi rotazione. Per questo, esistono stati stazionari, nei quali la particella ha simultaneamente valori determinati del momento angolare j, della sua proiezione $j_z = m$ e dell'elicità λ. Questi stati verranno chiamati *stati sferici di elicità.*

Determiniamo le funzioni d'onda di questi stati nella rappresentazione degli impulsi[2]). Questo si può fare subito tenendo presente che abbiamo già esaminato stati simili nel III, § 103 considerando la quantizzazione di una trottola simmetrica. Senza ripetere le considerazioni ivi esposte (cfr. la deduzione della formula III (103,8)) scriviamo per le funzioni cercate l'equazione

$$\psi_{jm\lambda}(\boldsymbol{k}) = \psi_{j\lambda}^{(0)} D_{\lambda m}^{(j)}(\boldsymbol{\nu}),$$

dove $\psi_{j\lambda}^{(0)}$ è la funzione d'onda descrivente nel sistema di coordinate « mobile » $\xi\eta\zeta$ lo stato di una particella con il valore determinato

---

gruppo di simmetria assiale, che ammette solo una degenerazione del secondo ordine dei livelli (dal punto di vista delle proprietà dell'equazione d'onda, questo significa che nel passaggio al limite $m \to 0$, il sistema di equazioni per una particella a spin s si smembra in equazioni indipendenti, corrispondenti a particelle senza massa di spin s, $s-1$, . . .). Cosí, per il fotone si ha $\lambda = \pm 1$, e il ruolo delle corrispondenti $w^{(\lambda)}$ è svolto dai vettori tridimensionali $e^{(\pm 1)}$ (8,2).

[1]) La funzione $\delta^{(2)}$ è definita in modo che $\int \delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n})\,do_{\nu} = 1$. Nella (16,2) (e nel caso analogo (16,4)), è omessa la funzione δ, che garantisce il valore assegnato dell'energia.

[2]) La deduzione esposta nel § 103 si basa sulle formule di trasformazione delle funzioni d'onda per le rotazioni limite (III, § 58), le quali a loro volta si basano soltanto sulle proprietà di simmetria rispetto alle rotazioni. Quindi tutti i risultati sono applicabili a funzioni nella rappresentazione degli impulsi nella stessa misura che a funzioni nella rappresentazione orbitale.

($j_\zeta = \lambda$) della proiezione del momento sull'asse ζ (la cui direzione è data dal vettore $\mathbf{v}$); nella rappresentazione degli impulsi questa funzione evidentemente coincide con l'ampiezza $u^{(\lambda)}$ introdotta sopra. La funzione d'onda normalizzata (vedi piú avanti) è

$$\psi_{jm\lambda}(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\, D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{v})\, u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}). \tag{16,4}$$

Qui sorge, però, il problema della scelta delle fasi, legato alla seguente non univocità. La rotazione del sistema di coordinate $\xi\eta\zeta$ rispetto a xyz è determinato dai tre angoli α, β, γ; la direzione di $\mathbf{v}$, dalla quale soltanto può dipendere la funzione d'onda della particella, dipende solo dai due angoli sferici $\alpha \equiv \varphi$, $\beta \equiv \theta$. Di conseguenza, bisogna accordarsi sulla scelta dell'angolo γ. Noi porremo $\gamma = 0$; definiamo, cioè, $D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{v})$ nel modo seguente:

$$D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{v}) = D^{(j)}_{\lambda m}(\varphi, \theta, 0) = e^{im\varphi} d^{(j)}_{\lambda m}(\theta). \tag{16,5}$$

In forza della III (58,21), le funzioni (16,5) soddisfano le seguenti condizioni di ortogonalità e di normalizzazione:

$$\int D^{(j_1)*}_{\lambda_1 m_1}(\mathbf{v})\, D^{(j_2)}_{\lambda_2 m_2}(\mathbf{v})\, \frac{do_\mathbf{v}}{4\pi} = \frac{1}{2j+1}\, \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \tag{16,6}$$

($do_\mathbf{v} = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$). L'ortogonalità delle funzioni $\psi_{jm\lambda}$ rispetto all'indice λ è assicurata dal fattore $u^{(\lambda)}$. Le funzioni $\psi_{jm\lambda}$ sono, quindi, ortogonali, come doveva essere, rispetto a tutti gli indici $jm\lambda$ e, per la scelta del coefficiente operata nella (16,4), sono normalizzate con la condizione

$$\int |\psi_{jm\lambda}|^2\, do_\mathbf{v} = 1. \tag{16,7}$$

Le ampiezze $u^{(\lambda)}$ si suppongono normalizzate con l'unità $u^{(\lambda)} u^{(\lambda)*} = 1$.

Studiamo ora il comportamento delle funzioni d'onda degli stati di elicità rispetto all'inversione delle coordinate. Il prodotto del vettore polare $\mathbf{v}$ per il vettore assiale $\boldsymbol{j}$ è uno pseudoscalare. Quindi è a priori evidente che, a risultato dell'inversione, lo stato di elicità λ passa nello stato di elicità $-\lambda$; è necessario solo determinare i fattori di fase in queste trasformazioni.

In un'inversione si ha $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$. Il vettore $\mathbf{v}$ è determinato dai due angoli φ, θ, e la trasformazione $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$ si realizza mediante la sostituzione $\varphi \to \varphi + \pi$, $\theta \to \pi - \theta$. In questo modo viene fissato un nuovo asse ζ, ma resta indeterminata la posizione degli assi ξ e η, che dipende anche dal terzo angolo di Eulero γ; la sola trasformazione di θ e φ non dà la possibilità di distinguere, in questo senso, la riflessione del sistema di coordinate da una rotazione dell'asse ζ. In termini di angoli di Eulero, l'inversione è la trasformazione seguente:

$$\alpha \equiv \varphi \to \varphi + \pi, \qquad \beta \equiv \theta \to \pi - \theta, \qquad \gamma \to \pi - \gamma. \tag{16,8}$$

Quindi, se $D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{v})$ è determinata secondo la (16,5) (cioè $\gamma = 0$), e la sostituzione $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$ è interpretata come risultato dell'inversione, allora

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\mathbf{v}) = D^{(j)}_{\lambda m}(\varphi + \pi, \pi - \theta, \pi). \tag{16,9}$$

Mediante le formule III (58,9), (58,16) e (58,18) troviamo quindi

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\mathbf{v}) = e^{i\lambda\pi} d^{(j)}_{\lambda m}(\pi - \theta)\, e^{im(\varphi+\pi)} =$$

$$= (-1)^{j-\lambda} e^{im\varphi} d^{(j)}_{-\lambda m}(\theta) = (-1)^{j-\lambda} D^{(j)}_{-\lambda m}(\varphi, \theta, 0),$$

ovvero

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\mathbf{v}) = (-1)^{j-\lambda} D^{(j)}_{-\lambda m}(\mathbf{v}) \tag{16,10}$$

($j - \lambda$ è un numero intero).

Una formula analoga si può ottenere per lo spinore $w^{(\lambda)}$ notando che le sue componenti $w^{(\lambda)}_{\sigma}$ coincidono, a meno di un fattore, con le funzioni

$$w^{(\lambda)}_{\sigma}(\mathbf{v}) \sim D^{(s)}_{\lambda\sigma}(\mathbf{v})^{*}. \tag{16,11}$$

Effettivamente, applicando la formula di trasformazione III (58,7) alle autofunzioni dello spin e imponendo che la proiezione ζ abbia un dato valore λ (sostituendo, cioè, nella parte destra della III (58,7) $\psi_{jm'}$ con $\delta_{m'\lambda}$), troviamo che $D^{(s)}_{\lambda\sigma}(\mathbf{v})$ sono le funzioni d'onda di spin, corrispondenti a valori determinati delle sue proiezioni z e ζ (σ e λ). L'insieme di queste funzioni ($\sigma = -s, \ldots, +s$) forma (secondo le formule di corrispondenza III (57,6)) uno spinore covariante di rango $2s$. Le componenti dello spinore controvariante (alle quali, secondo le formule III (57,2), corrispondono le componenti $w^{(\lambda)}_{\sigma}$) si trasformano come complesse coniugate delle componenti di uno spinore dello stesso rango.

Dalle (16,10-11) abbiamo

$$w^{(\lambda)}(-\mathbf{v}) = (-1)^{s-\lambda} w^{(-\lambda)}(\mathbf{v}) \tag{16,12}$$

($s - \lambda$ è un numero intero). L'operazione di inversione, applicata a $w^{(\lambda)}$, non consiste, tuttavia, soltanto nella sostituzione $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$, ma moltiplica lo spinore per un fattore di fase comune (« parità intrinseca » della particella), che noi indicheremo mediante η:

$$\mathrm{P}w^{(\lambda)}(\mathbf{v}) = \eta w^{(\lambda)}(-\mathbf{v}) = \eta(-1)^{s-\lambda} w^{(-\lambda)}(\mathbf{v}). \tag{16,13}$$

Per le ampiezze relativistiche $u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})$ questa trasformazione si scrive nella forma

$$\mathrm{P}u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) = \eta\beta u^{(\lambda)}(-\boldsymbol{k}) = \eta(-1)^{s-\lambda} u^{(-\lambda)}(\boldsymbol{k}), \tag{16,14}$$

dove β è una certa matrice, unitaria rispetto alle componenti di $u^{(\lambda)}$, che non scompaiono al limite $|\boldsymbol{p}| \to 0$. È importante che

questa matrice non dipenda dai numeri quantici di stato, e in questo senso, la differenza tra la (16,13) e la (16,14) è inessenziale[1]).

Applicando la (16,14) alla (16,2), otteniamo la legge di trasformazione delle funzioni d'onda degli stati $|\, \boldsymbol{n}\lambda >$

$$\mathrm{P}\psi_{\boldsymbol{n}\lambda}(\mathbf{v}) = \eta\,(-1)^{s-\lambda}\,\psi_{-\boldsymbol{n}-\lambda}(\mathbf{v}). \tag{16,15}$$

Per gli stati sferici di elicità, usando la (16,10) e la (16,12), otteniamo la seguente legge di trasformazione:

$$\mathrm{P}\psi_{jm\lambda}(\mathbf{v}) = \eta\,(-1)^{j-s}\,\psi_{jm-\lambda}(\mathbf{v}). \tag{16,16}$$

Gli stati ψ_{jm0} si trasformano, secondo la (16,16), tra di loro, cioè hanno una parità determinata. Se invece $\lambda \neq 0$, hanno una parità determinata solo sovrapposizioni di stati di opposta elicità:

$$\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\psi_{jm\lambda} \pm \psi_{jm-\lambda}). \tag{16,17}$$

Per un'inversione esse si trasformano tra loro secondo la formula

$$\mathrm{P}\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|}(\mathbf{v}) = \pm\,\eta\,(-1)^{j-s}\,\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|}(\mathbf{v}). \tag{16,18}$$

Notiamo che in questo paragrafo noi abbiamo classificato gli stati di una particella libera di dato momento angolare, operando soltanto con grandezze conservative e senza ricorrere al concetto di momento angolare orbitale (usato, ad esempio, nei §§ 6, 7 per la classificazione degli stati del fotone).

Come esempio, consideriamo il caso di spin 1. Nel sistema di quiete le ampiezze $u^{(\lambda)}$ (quadrivettori) si riducono ai vettori tridimensionali $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$, i quali hanno qui il ruolo delle ampiezze $w^{(\lambda)}$. L'azione dell'operatore di spin 1 sulla funzione vettoriale $\boldsymbol{e}$ è data dalla formula

$$(\mathrm{s}_i \boldsymbol{e})_k = -i e_{ikl} e_l \tag{16,19}$$

(III, § 57, problema 2). Quindi, l'equazione (16,1) assume la forma

$$i\,[\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}^{(\lambda)}] = \lambda \boldsymbol{e}^{(\lambda)}. \tag{16,20}$$

Le soluzioni di questa equazione (nel sistema di coordinate $\xi\eta\zeta$ con l'asse ζ diretto lungo $\boldsymbol{n}$) coincidono con i versori sferici (7,14)[2]):

$$\boldsymbol{e}^{(0)} = i\,(0,\,0,\,1), \qquad \boldsymbol{e}^{(\pm 1)} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}\,(1,\,\pm i,\,0). \tag{16,21}$$

---

[1]) Cosí, per $s = 1$, le ampiezze $u^{(\lambda)}$ sono i quadrivettori (16,21); β è una matrice unitaria rispetto a tutti gli indici quadrivettoriali: $\beta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Per $s = 1/2$ (come vedremo nel capitolo successivo) $u^{(\lambda)}$ è un bispinore; il moltiplicatore di fase è $\eta = i$, e β è la matrice di Dirac γ^0 (vedi (21,10)).

[2]) La scelta dei fattori di fase è fissata dalla richiesta che gli elementi di matrice degli operatori di spin, calcolati mediante le autofunzioni (16,21), siano in accordo con le definizioni generali date nel III, §§ 27, 107.

Nel sistema di riferimento, in cui la particella possiede la quantità di moto $\boldsymbol{p}$, le ampiezze degli stati di elicità sono i quadrivettori

$$u^{(0)\mu} = \left(\frac{|p|}{m}, \frac{\varepsilon}{m} e^{(0)}\right), \quad u^{(\pm 1)\mu} = (0, e^{(\pm 1)}). \tag{16,22}$$

Se e è un vettore polare, allora $\eta = -1$. In questo caso le funzioni (16,17) (per $s = 1$ sono dei vettori tridimensionali) hanno le seguenti parità:

$$\psi^{(+)}_{jm|\lambda|}: \quad P = (-1)^j,$$
$$\psi^{(-)}_{jm|\lambda|}: \quad P = (-1)^{j+1},$$
$$\psi_{jm0}: \quad P = (-1)^j.$$

Confrontando con la definizione dei vettori sferici (7,4), noi vediamo che queste funzioni sono identiche (a meno dei moltiplicatori di fase) con $\boldsymbol{Y}^{(e)}_{jm}$, $\boldsymbol{Y}^{(m)}_{jm}$, $\boldsymbol{Y}^{(l)}_{jm}$, rispettivamente. Determinando i moltiplicatori di fase (diciamo, confrontando i valori per $\theta = 0$), otteniamo le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}^{(e)}_{jm} &= i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\,(e^{(1)}D^{(j)}_{1m} + e^{(-1)}D^{(j)}_{-1m}), \\ \boldsymbol{Y}^{(m)}_{jm} &= i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\,(e^{(1)\prime}D^{(j)}_{1m} + e^{(-1)\prime}D^{(j)}_{-1m}), \\ \boldsymbol{Y}^{(l)}_{jm} &= i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\,e^{(0)}D^{(j)}_{0m} \end{aligned} \tag{16,23}$$

(j è un numero intero!); $e^{(\lambda)\prime} = [\boldsymbol{n}e^{(\lambda)}]$ sono i versori circolari sugli assi $\xi'\eta'\zeta$ ruotati di 90° attorno all'asse ζ rispetto agli assi $\xi\eta\zeta$.

L'ultima delle formule (16,23) è equivalente all'espressione III (58,23) per $d^{(j)}_{0m}(\theta)$. Dalla prima (o dalla seconda) formula si può, invece, ottenere un'espressione semplice per le funzioni $d^{(j)}_{\pm 1m}$. Abbiamo

$$i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\,D^{(j)}_{\pm 1m} = \boldsymbol{Y}^{(e)}_{jm}e^{(\pm 1)*} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\,e^{(\pm 1)*}\nabla Y_{jm}.$$

Sviluppiamo il prodotto scalare nella parte destra dell'uguaglianza nel sistema $\xi\eta\zeta$; abbiamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\eta}\right) \to \left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

Ricordando la definizione (7,2) della funzione Y_{jm} e la definizione (16,5), otteniamo

$$d^{(j)}_{\pm 1m}(\theta) = (-1)^{m+1}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!\,j(j+1)}} \times$$
$$\times \left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{m}{\operatorname{sen}\theta}\right) P^m_j(\cos\theta), \quad m \geqslant 0. \tag{16,24}$$

Capitolo III

FERMIONI

§ 17. *Spinori quadridimensionali*

Nella teoria non relativistica una particella a spin s qualsiasi è descritta da una grandezza a $(2s + 1)$ componenti, cioè da uno spinore simmetrico di rango $2s$. Dal punto di vista matematico, queste grandezze realizzano rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni spaziali.

Nella teoria relativistica, questo gruppo interviene solo come sottogruppo del gruppo piú ampio delle rotazioni quadridimensionali, il gruppo di Lorentz.

In relazione a questo, sorge la necessità di costruire la teoria degli spinori quadridimensionali (4-spinori)-grandezze, che realizzano rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz; all'esposizione di questa teoria sono dedicati i paragrafi 17, 18, 19. Nei paragrafi 17 e 18 viene studiato soltanto il gruppo proprio di Lorentz, che non contiene l'inversione spaziale; quest'ultima verrà esaminata nel paragrafo 19.

La teoria dei 4-spinori si costruisce in modo analogo alla teoria degli spinori tridimensionali (*B. L. van der Waerden*, 1929; *G. E. Uhlenbeck*, *O. Laporte*, 1931).

Lo spinore ξ^α è una grandezza a due componenti ($\alpha = 1, 2$); in quanto componenti della funzione d'onda di una particella a spin 1/2, ξ^1 e ξ^2 corrispondono ad autovalori della proiezione z dello spin, uguali a $+1/2$ e $-1/2$, rispettivamente. Per qualsiasi trasformazione del gruppo (proprio) di Lorentz le due grandezze ξ^1, ξ^2 si trasformano tra loro:

$$\begin{aligned} \xi^{1'} &= \alpha\xi^1 + \beta\xi^2, \\ \xi^{2'} &= \gamma\xi^1 + \delta\xi^2. \end{aligned} \tag{17,1}$$

I coefficienti α, β, γ, δ sono determinate funzioni degli angoli di rotazione del 4-sistema di coordinate, sottoposte alla condizione

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{17,2}$$

cioè il determinante della trasformazione binaria (17,1) è uguale a 1, come i determinanti delle trasformazioni delle coordinate nel gruppo di Lorentz.

Grazie alla condizione (17,2), la forma bilineare $\xi^1\Xi^2 - \xi^2\Xi^1$ (dove ξ^α e Ξ^α sono due spinori) è invariante per la trasformazione (17,1) (essa corrisponde ad una particella a spin 0, « costituita » da due particelle a spin 1/2). Per scrivere in una forma naturale queste espressioni invarianti, accanto alle componenti « controvarianti » dello spinore ξ^α, si introducono anche le componenti « covarianti » ξ_α. Il passaggio dalle une alle altre viene eseguito mediante lo « spinore metrico » $g_{\alpha\beta}$[1]):

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\beta, \tag{17,3}$$

dove

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17,4}$$

cosí, che

$$\xi_1 = \xi^2, \quad \xi_2 = -\xi^1. \tag{17,5}$$

Allora l'invariante $\xi^1\Xi^2 - \xi^2\Xi^1$ si scrive sotto forma di prodotto scalare $\xi^\alpha\Xi_\alpha$, per il quale vale la relazione $\xi^\alpha\Xi_\alpha = -\xi_\alpha\Xi^\alpha$.

Le proprietà elencate finora coincidono formalmente con le proprietà degli spinori tridimensionali. La differenza, tuttavia, sorge quando si considerano gli spinori complessi coniugati.

Nella teoria non relativistica la somma

$$\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*}, \tag{17,6}$$

che determina la densità di probabilità della localizzazione delle particelle nello spazio, dovrebbe essere uno scalare, e per questo le componenti $\psi^{\alpha*}$ avrebbero dovuto trasformarsi come le componenti covarianti di uno spinore; in altre parole, la trasformazione (17,1) sarebbe dovuta essere unitaria ($\alpha = \delta^*$, $\beta = -\gamma^*$). Nella teoria relativistica, invece, la densità di particelle non è uno scalare; essa è la componente temporale di un quadrivettore. In relazione a questo, la richiesta indicata viene a cadere, e sui coefficienti della trasformazione non vengono ora imposte altre condizioni all'infuori della (17,2). Le quattro grandezze complesse α, β, γ, δ, con la condizione (17,2), sono equivalenti a $8 - 2 = 6$ parametri reali, in accordo col numero di angoli che determinano la rotazione del 4-sistema di coordinate (cioè, rotazioni nei sei piani coordinati).

In tal modo, le trasformazioni binarie (complesse coniugate) sono essenzialmente differenti, e quindi, nella teoria relativistica, esistono due tipi di spinori. Per distinguere questi due tipi, si adottano simboli speciali: gli indici degli spinori, che si trasformano secondo formule complesse coniugate delle formule (17,1), si indicano con

---

[1]) Gli indici spinoriali verranno denotati con le prime lettere dell'alfabeto greco α, β, γ, . . .

cifre con un puntino sopra (*indici puntati*). Quindi, per definizione

$$\eta^{\dot{\alpha}} \sim \xi^{\alpha *}, \tag{17,7}$$

dove il segno $\sim$ significa « si trasforma come ». In altre parole, le formule di trasformazione di uno spinore « puntato » sono

$$\eta^{\dot{1}\prime} = \alpha^* \eta^{\dot{1}} + \beta^* \eta^{\dot{2}}, \quad \eta^{\dot{2}\prime} = \gamma^* \eta^{\dot{1}} + \delta^* \eta^{\dot{2}}. \tag{17,8}$$

Le operazioni di abbassare e alzare gli indici puntati vengono effettuate come per gli indici non puntati:

$$\eta_{\dot{1}} = \eta^{\dot{2}}, \quad \eta_{\dot{2}} = -\eta^{\dot{1}}. \tag{17,9}$$

Rispetto alle rotazioni spaziali il comportamento dei quadrispinori coincide col comportamento degli spinori tridimensionali. Per questi ultimi, come sappiamo, $\psi^*_\alpha \sim \psi^\alpha$. Dalla definizione (17,7) discende che il quadrispinore $\eta_{\dot{\alpha}}$ nelle rotazioni si comporta, quindi, come il trispinore controvariante ψ^α. In quanto componenti della funzione d'onda di una particella a spin 1/2, agli autovalori della proiezione dello spin 1/2 e —1/2 corrispondono, quindi, le componenti covarianti $\eta_{\dot{1}}$ e $\eta_{\dot{2}}$.

Gli spinori di rango superiore si definiscono come insiemi di grandezze, che si trasformano come i prodotti di piú spinori di rango 1. Fra gli indici di uno spinore di rango superiore ci possono essere sia gli indici puntati che quelli non puntati. Cosí, esistono tre tipi di spinori di rango 2:

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha \Xi^\beta, \qquad \zeta^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^\alpha \eta^{\dot{\beta}}, \qquad \eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sim \eta^{\dot{\alpha}} H^{\dot{\beta}}.$$

In questo senso la sola indicazione del rango totale dello spinore è insufficiente per una determinazione univoca di questo concetto; per questa ragione, in caso di necessità noi indicheremo il rango con una coppia di numeri (k, l): il numero degli indici non puntati e degli indici puntati.

Poiché le trasformazioni (17,1) e (17,8) sono algebricamente indipendenti, non è necessario fissare l'ordine degli indici puntati e non puntati (in questo senso, ad esempio, gli spinori $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ e $\zeta^{\dot{\beta}\alpha}$ sono la stessa cosa).

Al fine di avere un carattere invariante, ogni uguaglianza spinoriale deve contenere da ambedue le parti un ugual numero di indici puntati e non puntati; in caso contrario, questa uguaglianza verrà meno nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro. Nel fare questo occorre, tuttavia, ricordare che la coniugazione complessa sottintende la sostituzione degli indici puntati con indici non puntati e viceversa. La relazione $\eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\xi^{\alpha\beta})^*$ tra due spinori ha quindi un carattere invariante.

La contrazione di spinori o di loro prodotti può farsi solo rispetto a coppie di indici dello stesso genere: due indici puntati o due indici non puntati. La somma su una coppia di indici di genere diverso non è un'operazione invariante. Per questo, dallo spinore

$$\zeta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\ldots\dot{\beta}_l} \tag{17,10}$$

simmetrico rispetto a tutti i k indici non puntati e gli l indicati puntati, non si può formare uno spinore di rango inferiore (ricordiamo che la contrazione su una coppia di indici, rispetto ai quali lo spinore è simmetrico, dà come risultato zero). Questo significa che non si può passare, con combinazioni lineari qualsiasi delle grandezze (17,10), a un numero inferiore di grandezze che si trasformino tra loro per tutte le trasformazioni del gruppo. In altre parole, i 4-spinori simmetrici realizzano rappresentazioni irriducibili del gruppo proprio di Lorentz. Ogni rappresentazione irriducibile è determinata dall'assegnazione di una coppia di numeri (k, l).

Poiché ogni indice spinoriale assume due valori, si hanno $k + 1$ scelte essenzialmente differenti dei numeri $\alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_k$ nella (17,10) (contenenti 0, 1, 2, . . ., k volte l'unità, k, $k-1$, . . ., 0 volte il due) e $l + 1$ scelte dei numeri $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \ldots, \dot{\beta}_l$. In totale, quindi, uno spinore simmetrico di rango (k, l) ha $(k + 1)(l + 1)$ componenti indipendenti; questo numero dà la dimensione della rappresentazione irriducibile realizzata da tale spinore.

§ 18. *Connessione degli spinori con i quadrivettori*

Lo spinore $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ con un indice puntato e uno non puntato ha $2\cdot 2 = 4$ componenti indipendenti, esattamente il numero delle componenti di un quadrivettore. È chiaro, perciò, che sia l'uno che l'altro realizzano la stessa rappresentazione irriducibile del gruppo proprio di Lorentz, e quindi fra le loro componenti ci deve essere una determinata corrispondenza.

Per stabilire questa corrispondenza ricorriamo, innanzitutto, all'analoga corrispondenza nel caso tridimensionale, tenendo conto che rispetto alle rotazioni puramente spaziali il comportamento dei 3-spinori e dei 4-spinori deve essere uguale.

Per uno spinore tridimensionale $\psi^{\alpha\beta}$ valgono le formule di corrispondenza (vedi III, § 57), che trascriviamo qui nella forma

$$a_x = \frac{1}{2}(\psi^{22} - \psi^{11}) = \frac{1}{2}(\psi^2{}_1 + \psi^1{}_2),$$

$$a_y = -\frac{i}{2}(\psi^{22} + \psi^{11}) = \frac{i}{2}(\psi^1{}_2 - \psi^2{}_1),$$

$$a_z = \frac{1}{2}(\psi^{12} + \psi^{21}) = \frac{1}{2}(\psi^1{}_1 - \psi^2{}_2),$$

dove a_x, a_y, a_z sono le componenti di un certo vettore tridimensionale a. Passando al caso quadridimensionale, occorre sostituire le componenti $\psi^{\alpha}_{\dot\beta}$ con $\zeta^{\alpha\dot\beta}$, e intendere a_x, a_y, a_z come le componenti controvarianti a^1, a^2 e a^3 di un quadrivettore. Per quanto riguarda l'espressione per la quarta componente del vettore, a^0, la sua forma è a priori evidente dalla circostanza citata nel § 17: la grandezza (17,6) deve trasformarsi come a^0. Quindi $a^0 \sim \zeta^{1\dot1} + \zeta^{2\dot2}$; il coefficiente di proporzionalità si definisce in modo che lo scalare $\zeta_{\alpha\dot\beta}\zeta^{\alpha\dot\beta}$ coincida con lo scalare $2a_\mu a^\mu \equiv 2a^2$.

In tal modo, si arriva alle formule di corrispondenza seguenti:

$$a^1 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot2} + \zeta^{2\dot1}), \quad a^2 = \frac{i}{2}(\zeta^{1\dot2} - \zeta^{2\dot1}),$$
$$a^3 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot1} - \zeta^{2\dot2}), \quad a^0 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot1} + \zeta^{2\dot2}). \tag{18,1}$$

Le formule inverse sono

$$\zeta^{1\dot1} = \zeta_{2\dot2} = a^3 + a^0, \qquad \zeta^{2\dot2} = \zeta_{1\dot1} = a^0 - a^3.$$
$$\zeta^{1\dot2} = -\zeta_{2\dot1} = a^1 - ia^2, \quad \zeta^{2\dot1} = -\zeta_{1\dot2} = a^1 + ia^2. \tag{18,2}$$

È valida la relazione

$$\zeta_{\alpha\dot\beta}\zeta^{\alpha\dot\beta} = 2a^2. \tag{18,3}$$

Notiamo anche che

$$\zeta_{\alpha\dot\beta}\zeta^{\gamma\dot\beta} = \delta^{\gamma}_{\alpha} a^2. \tag{18,4}$$

L'ultima uguaglianza discende dal fatto che lo spinore di rango due $\zeta_{\alpha\dot\beta}\zeta^{\dot\beta}_{\gamma}$ è antisimmetrico rispetto agli indici $\alpha\gamma$ e quindi è proporzionale allo spinore metrico.

La corrispondenza tra lo spinore $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ e un quadrivettore è un caso particolare di una regola generale: ogni spinore simmetrico di rango (k, k) è equivalente ad un 4-tensore simmetrico e irriducibile di rango k (cioè ad uno spinore che si annulla per la contrazione rispetto ad una coppia qualsiasi di indici).

La connessione tra uno spinore e un 4-vettore si può scrivere in forma compatta mediante le matrici a due righe di Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18,5}$$

Indicando simbolicamente con ζ la matrice delle grandezze $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ con ambedue gli indici in alto (dei quali, il primo non puntato), le formule (18,2) si scrivono nella forma

$$\zeta = \boldsymbol{a}\sigma + a^0 \tag{18,6}$$

(nel secondo membro si sottintende, ovviamente, che a^0 è moltiplicato per la matrice unità). Le formule inverse sono

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\zeta\sigma), \quad a^0 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\zeta. \tag{18,7}$$

Con l'aiuto delle formule (18,6-7) si può stabilire il legame tra le leggi di trasformazione di un 4-vettore e di uno spinore, e quindi esprimere la legge di trasformazione di uno spinore attraverso i parametri di rotazione del 4-sistema di coordinate.

Scriviamo la trasformazione dello spinore ξ^α nella forma

$$\xi^{\alpha'} = (B\xi)^\alpha, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{18,8}$$

dove B è una matrice a due righe, formata con i coefficienti della trasformazione binaria. Allora la trasformazione di uno spinore puntato è

$$\eta^{\dot{\beta}'} = (B^*\eta)^{\dot{\beta}} = (\eta B^+)^{\dot{\beta}}, \tag{18,9}$$

e la trasformazione di uno spinore di secondo rango $\zeta^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^\alpha\eta^{\dot{\beta}}$ si può scrivere simbolicamente nella forma $\zeta' = B\zeta B^+$ [1]). Per una trasformazione infinitesima $B = 1 + \lambda$, dove λ è una matrice piccola, a meno di quantità del primo ordine, si ha

$$\xi' = \zeta + (\lambda\zeta + \zeta\lambda^+). \tag{18,10}$$

Consideriamo, dapprima, una trasformazione di Lorentz che fa passare ad un sistema di riferimento, che si sposta ad una velocità infinitesima $\delta\boldsymbol{V}$ (senza cambiamenti delle direzioni degli assi spaziali). Il quadrivettore $a^\mu = (a^0, \boldsymbol{a})$ si trasforma secondo le formule

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - a^0\delta\boldsymbol{V}, \quad a^{0'} = a^0 - \boldsymbol{a}\delta\boldsymbol{V}. \tag{18,11}$$

Usiamo ora le formule (18,7). La trasformazione di a^0 si può rappresentare, da una parte, come

$$a^{0'} = a^0 - \boldsymbol{a}\delta\boldsymbol{V} = a^0 - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\zeta\sigma\delta\boldsymbol{V}),$$

---

[1]) Per le componenti covarianti

$$\xi'_\alpha = (\widetilde{B}^{-1}\xi)_\alpha = (\xi B^{-1})_\alpha, \quad \eta'_{\dot{\alpha}} = (\eta B^{*-1})_{\dot{\alpha}} \tag{18,8a}$$

(in modo che il prodotto di due spinori $\xi_\alpha \Xi^\alpha$ resti invariante).

e dall'altra, come

$$a^{0\prime} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\zeta' = a^0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\lambda\zeta + \zeta\lambda^+) = a^0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\zeta\,(\lambda + \lambda^+).$$

Ambedue le espressioni devono coincidere identicamente (cioè per qualsiasi ζ). Da qui troviamo la seguente uguaglianza:

$$\lambda + \lambda^+ = -\sigma\delta \boldsymbol{V}.$$

In modo analogo, considerando la trasformazione di $\boldsymbol{a}$, otteniamo

$$\sigma\lambda + \lambda^+\sigma = -\delta \boldsymbol{V}.$$

Queste uguaglianze, considerate come equazioni rispetto a λ, hanno la seguente soluzione:

$$\lambda = \lambda^+ = -\frac{1}{2}\,\sigma\delta \boldsymbol{V}.$$

In questo modo, una trasformazione infinitesima di Lorentz dello spinore ξ^α è realizzata dalla matrice

$$\mathrm{B} = 1 - \frac{1}{2}\,(\sigma \boldsymbol{n})\,\delta V, \tag{18,12}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore nella direzione della velocità $\delta \boldsymbol{V}$. Da qui è facile trovare la trasformazione anche per una velocità finita $\boldsymbol{V}$. Per fare questo, ricordiamo che una trasformazione di Lorentz è geometricamente equivalente ad una rotazione del 4-sistema di coordinate nel piano t, $\boldsymbol{n}$ di un angolo φ, legato alla velocità V mediante l'uguaglianza $\mathrm{th}\,\varphi = V$[1]). Ad una trasformazione infinitesima corrisponde l'angolo $\delta\varphi = \delta V$, e la rotazione di un angolo finito φ si effettua ripetendo $\varphi/\delta\varphi$ volte la rotazione di $\delta\varphi$. Innalzando l'operatore (18,12) alla potenza $\varphi/\delta\varphi$ e passando al limite otteniamo

$$\mathrm{B} = e^{-\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{n}\sigma}. \tag{18,13}$$

Il senso matematico dell'azione di questo operatore si chiarisce, se si nota che, per le proprietà delle matrici di Pauli, tutte le potenze pari di $\boldsymbol{n}\sigma$ sono uguali a 1, e tutte le potenze dispari sono uguali a $\boldsymbol{n}\sigma$. Tenendo conto del fatto che il ch si sviluppa in serie di potenze pari, e il sh di potenze dispari dell'argomento, otteniamo infine

$$\mathrm{B} = \mathrm{ch}\,\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{n}\sigma\,\mathrm{sh}\,\frac{\varphi}{2}, \qquad \mathrm{th}\,\varphi = V. \tag{18,14}$$

Notiamo che le matrici B delle trasformazioni di Lorentz risultano hermitiane: $\mathrm{B} = \mathrm{B}^+$.

Consideriamo ora una rotazione infinitesima del sistema spaziale di coordinate. Il vettore tridimensionale $\boldsymbol{a}$ si trasforma secondo la

---

[1]) Ricordiamo che, nei piani contenenti l'asse temporale, la metrica è pseudoeuclidea.

formula

$$a' = a - [\delta\theta a], \tag{18,15}$$

dove $\delta\theta$ è il vettore dell'angolo infinitesimo di rotazione. La corrispondente trasformazione di uno spinore si potrebbe trovare in modo analogo. Non c'è, tuttavia, necessità di fare questo, poiché per le rotazioni spaziali il comportamento dei 4-spinori coincide col comportamento dei 3-spinori, e per questi ultimi la trasformazione è a priori nota dalla connessione esistente tra l'operatore di spin e l'operatore di rotazione infinitesima:

$$B = 1 + \frac{i}{2}\sigma\delta\theta. \tag{18,16}$$

Il passaggio alla rotazione di un angolo finito θ si effettua analogamente al passaggio dalla (18,12) alla (18,14):

$$B = \exp\left(\frac{i\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}, \tag{18,17}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore dell'asse di rotazione. Questa matrice è unitaria ($B^+ = B^{-1}$), come deve essere per una rotazione spaziale.

§ 19. *Inversione spaziale degli spinori*

Nell'esporre (nel vol. III) la teoria tridimensionale degli spinori, non abbiamo considerato il loro comportamento rispetto all'operazione di inversione spaziale, poiché nella teoria non relativistica questo non avrebbe portato a risultati fisici nuovi. È opportuno, però, soffermarsi un poco su questo problema per una migliore comprensione del materiale sulle proprietà di inversione dei 4-spinori che seguirà.

L'operazione di inversione non cambia il segno di un vettore assiale, quale è il vettore spin. Di conseguenza non cambia nemmeno il valore della sua proiezione s_z. Da qui discende che per l'inversione ogni componente di uno spinore ψ^α può trasformarsi solo con se stessa, cioè

$$\psi^\alpha \to P\psi^\alpha, \tag{19,1}$$

dove P è un coefficiente costante. Operando l'inversione due volte, si torna al sistema di coordinate originario. Nel caso di spinori, tuttavia, il ritorno alla posizione originaria può essere inteso in due sensi differenti: come una rotazione di angolo di 0° oppure di angolo di 360°. Per gli spinori queste due definizioni non sono equivalenti, poiché ψ^α cambia segno in una rotazione di 360°. Quindi, sono possibili due concezioni alternative dell'inversione: in un caso

$$P^2 = 1, \qquad P = \pm 1, \tag{19,2}$$

e nell'altro

$$P^2 = -1, \quad P = \pm i. \tag{19,3}$$

È essenziale, però, che il concetto di inversione sia definito in modo uguale per tutti gli spinori. Non è ammissibile che spinori diversi si comportino, per l'inversione, in modo differente (secondo la (19,2) o la (19,3)), poiché in tal caso non sarebbe possibile formare uno scalare (o uno pseudoscalare) con una qualsiasi coppia di spinori: se lo spinore ψ^α si trasformasse secondo la (19,2) e φ^α secondo la (19,3), allora la grandezza $\psi^\alpha\varphi_\alpha$ nell'inversione verrebbe moltiplicata per $\pm i$ invece di restare invariata (o di cambiare solo segno).

Occorre sottolineare anche che (per qualunque definizione dell'inversione) l'assegnazione ad uno spinore di una parità determinata P non ha un senso assoluto, poiché gli spinori cambiano segno per una rotazione di 2π, rotazione che si può sempre effettuare simultaneamente con l'inversione. Ha un carattere assoluto, tuttavia, la « parità relativa » di due spinori, definita come la parità dello scalare $\psi^\alpha\varphi_\alpha$ formato con i due spinori in questione; poiché per una rotazione di 2π cambiano segno tutti gli spinori, l'indeterminatezza connessa con questo fatto non si riflette sulla parità dello scalare.

Consideriamo ora gli spinori quadridimensionali.

Notiamo, innanzitutto, che, poiché l'inversione cambia il segno solo di tre (x, y, z) delle quattro coordinate (x, y, z, t) questa operazione commuta con le rotazioni spaziali, ma non commuta con le trasformazioni che ruotano l'asse t. Se L è una trasformazione di Lorentz che fa passare ad un sistema di riferimento che si sposta alla velocità $\boldsymbol{V}$, allora si ha PL = L'P, dove L' è la trasformazione che fa passare al sistema che si sposta alla velocità $-\boldsymbol{V}$.

Da qui discende che, per l'inversione, le componenti di un quadrispinore ξ^α non possono trasformarsi attraverso se stesse. Se l'inversione dello spinore ξ^α consistesse, come prima, nella trasformazione (19,1) (cioè venisse realizzata da una matrice proporzionale alla matrice unità), essa commuterebbe con tutte le trasformazioni di Lorentz in generale, cosa che non può evidentemente essere (poiché le operazioni L e L', se applicate a ξ^α, evidentemente non coincidono).

In tal modo, l'inversione deve trasformare le componenti di uno spinore ξ^α attraverso altre grandezze. Queste possono essere solo le componenti di un altro spinore η^α, che non coincide, per le sue proprietà di trasformazione, con ξ^α. Poiché l'inversione non cambia, come già è stato notato, la proiezione z dello spin, le componenti ξ^1 e ξ^3 possono trasformarsi, per un'inversione, soltanto nelle componenti η_1 e η_3 corrispondenti agli stessi valori $s_z = 1/2$ e $s_z = -1/2$. Intendendo per inversione un'operazione che dà 1, se viene ripetuta

due volte, si può definire la sua azione mediante le formule

$$\xi^{\alpha} \to \eta_{\dot{\alpha}}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \to \xi^{\alpha} \tag{19,4}$$

(per le componenti covarianti ξ_{α} e controvarianti $\eta^{\dot{\alpha}}$ queste trasformazioni hanno segno opposto,

$$\xi_{\alpha} \to -\eta^{\dot{\alpha}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} \to -\xi_{\alpha}, \tag{19,4a}$$

poiché l'abbassamento e l'innalzamento di uno stesso indice avviene con segni differenti, vedi (17,5) e (17,9))[1]. Se invece l'inversione viene intesa nel senso che $P^2 = -1$, la sua azione è definita dalle formule

$$\xi^{\alpha} \to i\eta_{\dot{\alpha}}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \to i\xi^{\alpha} \tag{19,5}$$

oppure, ciò che è lo stesso, dalle

$$\xi_{\alpha} \to -i\eta^{\dot{\alpha}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} \to -i\xi_{\alpha}. \tag{19,5a}$$

Una certa differenza nel carattere delle due definizioni dell'inversione consiste nel fatto che con la seconda definizione gli spinori complessi coniugati si trasformano allo stesso modo: se $\Xi_{\alpha} = \eta^{*}_{\dot{\alpha}}$, $H^{\dot{\alpha}} = \xi^{\alpha *}$, allora dalla (19,5) avremo $\Xi_{\alpha} \to -iH^{\dot{\alpha}}$, $H^{\dot{\alpha}} \to -i\Xi_{\alpha}$, cioè la stessa regola che per ξ_{α} e $\eta^{\dot{\alpha}}$. Seguendo la definizione (19,4), invece, avremmo ottenuto la trasformazione $\Xi_{\alpha} \to H^{\dot{\alpha}}$, $H^{\dot{\alpha}} \to \Xi_{\alpha}$, opposta in segno alla trasformazione degli spinori ξ_{α}, $\eta^{\dot{\alpha}}$. Sui possibili aspetti fisici di questa differenza ritorneremo ancora nel § 27.

D'ora in poi, per fissare le idee, intenderemo adottata la definizione (19,5).

Rispetto al sottogruppo delle rotazioni, gli spinori ξ^{α} e $\eta_{\dot{\alpha}}$ si trasformano, come già sappiamo, nello stesso modo. Formando, mediante le loro componenti, le combinazioni

$$\xi^{\alpha} \pm \eta_{\dot{\alpha}}, \tag{19,6}$$

otterremmo grandezze che, per l'inversione, si trasformerebbero secondo la (19,1) con $P = \pm i$. Queste combinazioni, tuttavia, non

---

[1]) La definizione (19,4) è ovviamente, in un certo senso, convenzionale; questo è legato al fatto che le grandezze ξ^{α} e $\eta_{\dot{\alpha}}$ sono indipendenti. Cosí, introducendo invece di $\eta_{\dot{\alpha}}$ il nuovo spinore $\eta'_{\dot{\alpha}} = e^{i\delta}\eta_{\dot{\alpha}}$, al posto della (19,4) otterremo la definizione equivalente

$$\xi^{\alpha} \to e^{-i\delta}\eta'_{\dot{\alpha}}, \quad \eta'_{\dot{\alpha}} \to e^{i\delta}\xi^{\alpha}.$$

si comportano come spinori rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo di Lorentz.

In tal modo, l'inclusione dell'inversione nel gruppo di simmetria richiede che vengano presi in considerazione simultaneamente due spinori $(\xi^\alpha, \eta_{\dot\alpha})$; tale coppia è chiamata *bispinore* (di rango 1). Le quattro componenti di un bispinore realizzano una delle rappresentazioni irriducibili del gruppo ampliato di Lorentz.

Il prodotto scalare di due bispinori $(\xi^\alpha, \eta_{\dot\alpha})$ e $(\Xi^\alpha, H_{\dot\alpha})$ può venire formato in due modi. La grandezza

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha + \eta_{\dot\alpha} H^{\dot\alpha} \tag{19,7}$$

per l'inversione non cambia, cioè è un vero scalare. La grandezza

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha - \eta_{\dot\alpha} H^{\dot\alpha} \tag{19,8}$$

è anch'essa invariante rispetto alle rotazioni del 4-sistema di coordinate, ma cambia segno nell'inversione; in altre parole, è uno pseudoscalare.

Anche lo spinore di secondo rango $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ può essere definito in due modi. Definendolo mediante la legge di trasformazione

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha H^{\dot\beta} + \Xi^\alpha \eta^{\dot\beta}, \tag{19,9}$$

si ottengono grandezze, che si trasformano, per l'inversione, secondo la formula

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \to \zeta_{\dot\alpha\beta}. \tag{19,10}$$

Il quadrivettore a^μ, equivalente dello spinore, si trasforma (corrispondentemente alle formule (18,1)) come $(a^0, \boldsymbol{a}) \to (a^0, -\boldsymbol{a})$, cioè è un vero quadrivettore (e il vettore tridimensionale $\boldsymbol{a}$ è un vettore polare).

Tuttavia, si può definire $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ anche nel modo seguente:

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha H^{\dot\beta} - \Xi^\alpha \eta^{\dot\beta}. \tag{19,11}$$

Allora[1])

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \to -\zeta_{\dot\alpha\beta}. \tag{19,12}$$

A questo spinore corrisponde un 4-vettore, per il quale l'inversione significa la trasformazione $(a^0, \boldsymbol{a}) \to (-a^0, \boldsymbol{a})$, cioè un 4-pseudovettore (il vettore tridimensionale $\boldsymbol{a}$ è un vettore assiale).

---

[1]) Sottolineiamo che le leggi di trasformazione (19,10) e (19,12), che si differenziano per il segno nella parte destra, non sono affatto equivalenti, poiché da ambedue le parti ci sono componenti di uno stesso spinore (vedi nota alla pag. 92).

Gli spinori simmetrici di rango 2 con indici della stessa specie sono definiti dalle leggi di trasformazione

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^{\alpha}\Xi^{\beta} + \xi^{\beta}\Xi^{\alpha}, \quad \eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sim \eta_{\dot{\alpha}} H_{\dot{\beta}} + \eta_{\dot{\beta}} H_{\dot{\alpha}}. \tag{19,13}$$

Per l'inversione essi si trasformano l'uno nell'altro

$$\xi^{\alpha\beta} \to -\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}. \tag{19,14}$$

La coppia $(\xi^{\alpha\beta}, \eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}})$ forma un bispinore di rango 2. Il numero delle sue componenti indipendenti è uguale a $3 + 3 = 6$. Un ugual numero di componenti indipendenti l'ha il quadritensore antisimmetrico di secondo rango $a^{\mu\nu}$. Per questo, tra queste due grandezze deve esistere una determinata corrispondenza (ambedue realizzano rappresentazioni irriducibili equivalenti del gruppo ampliato di Lorentz).

Poiché rispetto al gruppo proprio di Lorentz gli spinori $\xi^{\alpha\beta}$ e $\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ si trasformano indipendentemente, mediante le componenti del quadritensore $a^{\mu\nu}$ si possono comporre due gruppi di grandezze, che si trasformano, per tutte le rotazioni del 4-sistema di coordinate, l'uno attraverso l'altro. Questo raggruppamento si può fare nel modo seguente.

Introduciamo il vettore polare tridimensionale $\boldsymbol{p}$ e il vettore assiale tridimensionale $\boldsymbol{a}$, connessi con le componenti del quadritensore $a^{\mu\nu}$ secondo la formula

$$a^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \equiv (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) \tag{19,15}$$

($(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ è una notazione abbreviata, della quale faremo uso per elencare le componenti di tale tensore). Inoltre si ha $a_{\mu\nu} = (-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$, e delle due grandezze

$$\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{p}^2 = \frac{1}{2} a_{\mu\nu} a^{\mu\nu}, \qquad \boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = \frac{1}{8} e_{\mu\nu\rho\sigma} a^{\mu\nu} a^{\rho\sigma}$$

la prima è uno scalare, e la seconda uno pseudoscalare; rispetto al gruppo proprio di Lorentz sono ambedue ugualmente invarianti. Insieme ad esse sono invarianti anche i quadrati dei vettori tridimensionali $\boldsymbol{f}^{\pm} = \boldsymbol{p} \pm i\boldsymbol{a}$. Questo significa che ogni rotazione nel 4-spazio, per i vettori $\boldsymbol{f}^{\pm}$, è equivalente ad una « rotazione » nello spazio tridimensionale di angoli, in generale, complessi (ai sei angoli di rotazione nel 4-spazio corrispondono tre « angoli di rotazione » complessi del sistema tridimensionale). L'operazione di inversione, invece, cambiando il segno di $\boldsymbol{p}$ (ma non di $\boldsymbol{a}$), trasforma i vettori $\boldsymbol{f}^{+}$ e $-\boldsymbol{f}^{-}$ l'uno nell'altro. Le componenti di questi vettori

formano i due gruppi cercati di grandezze, composte mediante le componenti del tensore $a^{\mu\nu}$.

Con ciò stesso, diventa evidente anche la corrispondenza tra le componenti del quadritensore $a^{\mu\nu}$ e degli spinori $\xi^{\alpha\beta}$, $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$. Poiché nel gruppo di Lorentz entrano in qualità di sottogruppo le rotazioni spaziali, le relazioni tra le componenti di uno spinore e le componenti di un vettore tridimensionale devono essere le stesse che per gli spinori tridimensionali:

$$\begin{aligned} f_x^+ &= \frac{1}{2}(\xi^{22}-\xi^{11}), \quad & f_y^+ &= \frac{i}{2}(\xi^{22}+\xi^{11}), \quad & f_z^+ &= \xi^{12}; \\ f_x^- &= \frac{1}{2}(\eta_{\dot 2\dot 2}-\eta_{\dot 1\dot 1}), \quad & f_y^- &= \frac{i}{2}(\eta_{\dot 2\dot 2}+\eta_{\dot 1\dot 1}), \quad & f_z^- &= \eta_{\dot 1\dot 2}. \end{aligned} \tag{19,16}$$

PROBLEMA

Stabilire la corrispondenza generale tra gli spinori di rango pari e i 4-tensori.

Soluzione. Tutti gli spinori con $k+l$ pari realizzano rappresentazioni irriducibili ad un valore del gruppo ampliato di Lorentz e, quindi, sono equivalenti ai quadritensori che realizzano le stesse rappresentazioni[1]).

Uno spinore di rango (k, k) si trasforma per l'inversione secondo la

$$\zeta^{\alpha\beta\ldots\dot\gamma\dot\delta\ldots} \to \pm\zeta_{\dot\alpha\dot\beta\ldots\gamma\delta\ldots} \tag{1}$$

Questo spinore è equivalente ad un 4-tensore irriducibile simmetrico di rango k, tensore vero o pseudotensore, a seconda del segno nella (1).

Gli spinori di rango (k, l) e (l, k) che compongono un bispinore, si trasformano per l'inversione secondo la

$$\zeta^{\overbrace{\alpha\beta\ldots}^{k}\overbrace{\dot\gamma\dot\delta\ldots}^{l}} \to (-1)^{\frac{k-l}{2}}\,\chi_{\dot\alpha\dot\beta\ldots\gamma\delta\ldots}\,. \tag{2}$$

Per $l = k+2$ un bispinore è equivalente ad un 4-tensore irriducibile $a_{[\mu\nu]\rho\sigma\ldots}$ di rango $k+2$, antisimmetrico rispetto agli indici $[\mu\nu]$ e simmetrico rispetto a tutti gli altri. Il fatto che questo tensore sia irriducibile significa che esso dà zero per ogni contrazione rispetto a qualsiasi coppia di indici e dà zero nella formazione del tensore duale rispetto a tre indici qualsiasi (cioè $e^{\lambda\mu\nu\rho}\times$ $\times a_{[\mu\nu]\rho\sigma\ldots} = 0$); l'ultima condizione significa che il tensore dà zero se si somma ciclicamente su tre indici: $\mu\nu$ e uno (qualsiasi) dei rimanenti.

Per $l = k+4$ un bispinore è equivalente ad un 4-tensore irriducibile $a_{[\lambda\mu][\nu\rho]\sigma\tau\ldots}$ di rango $k+4$, che gode delle seguenti proprietà: è antisimmetrico rispetto alle coppie di indici $[\lambda\mu]$ e $[\nu\rho]$, è simmetrico rispetto a tutti gli altri, è simmetrico rispetto alla permutazione della coppia $[\lambda\mu]$ con la coppia

---

[1]) Gli spinori di rango dispari, invece, realizzano rappresentazioni irriducibili a due valori del gruppo: una rotazione spaziale di 360° cambia il segno degli spinori, e quindi ad ogni elemento del gruppo corrispondono due matrici di segno opposto.

$[\nu\rho]$, dà zero per la contrazione rispetto ad una coppia qualsiasi di indici e dà zero nella formazione del tensore duale rispetto a tre indici qualsiasi.

Generalizzando, per $l = k + 2n$ un bispinore è equivalente ad un quadritensore irriducibile di rango $k + 2n$, antisimmetrico rispetto a n coppie di indici e simmetrico rispetto ai k indici restanti[1]).

§ 20. *Equazione di Dirac in rappresentazione spinoriale*

Una particella a spin 1/2 è descritta, nel suo sistema di quiete, da una funzione d'onda a due componenti: uno spinore tridimensionale. Per la sua « origine quadridimensionale » può trattarsi sia di un quadrispinore non puntato che puntato. Per la descrizione della particella in un sistema di riferimento generico sono necessari ambedue questi quadrispinori; li denoteremo con ξ^α e $\eta_{\dot\alpha}$[2]).

Per una particella libera, l'unico operatore, che entra nell'equazione d'onda, può essere (come già si è detto nel § 10) soltanto l'operatore di 4-impulso $p_\mu = i\partial_\mu$. In notazioni spinoriali a questo quadrivettore corrisponde l'operatore spinoriale $p_{\alpha\dot\beta}$, per il quale valgono le relazioni

$$\begin{aligned} p^{1\dot1} &= p_{2\dot2} = p_z + p_0, & p^{2\dot2} &= p_{1\dot1} = p_0 - p_z, \\ p^{1\dot2} &= -p_{2\dot1} = p_x - ip_y, & p^{2\dot1} &= -p_{1\dot2} = p_x + ip_y. \end{aligned} \tag{20,1}$$

L'equazione d'onda rappresenta una connessione differenziale lineare tra le componenti degli spinori, realizzata mediante l'operatore $p_{\alpha\dot\beta}$. La condizione di invarianza relativistica fissa il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} p^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} &= m\xi^\alpha, \\ p_{\dot\beta\alpha}\xi^\alpha &= m\eta_{\dot\beta}, \end{aligned} \tag{20,2}$$

dove m è una costante dimensionale. Introdurre in queste due equazioni costanti m_1 e m_2 diverse (oppure cambiare il segno davanti a m) non avrebbe senso, poiché mediante una opportuna ridefinizione di ξ^α o di $\eta_{\dot\alpha}$ le equazioni potrebbero essere riportate alla forma di prima.

---

[1]) I quadritensori, antisimmetrici rispetto ad un numero maggiore di indici (tre, quattro, ecc.), non compaiono in questa classificazione per un motivo evidente: un tensore antisimmetrico di rango 3 è equivalente (duale) a uno pseudovettore, un tensore antisimmetrico di rango 4 si riduce a uno scalare (proporzionale allo pseudotensore unità $e^{\lambda\mu\nu\rho}$); l'antisimmetria rispetto ad un numero ancora maggiore di indici nello spazio quadridimensionale è, generalmente, impossibile.

[2]) Uno spinore tridimensionale di rango 1 può derivare anche da quadrispinori di rango dispari piú elevato, che nel sistema di quiete diventano antisimmetrici rispetto ad una o a piú coppie di indici. Queste varianti, tuttavia, porterebbero ad equazioni di grado piú elevato (vedi nota a pag. 54).

Eliminiamo dalle equazioni (20,2) uno dei due spinori, portando $\eta_{\dot\beta}$ dalla seconda nella prima equazione

$$p^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} = \frac{1}{m}\, p^{\alpha\dot\beta} p_{\gamma\dot\beta}\xi^{\gamma} = m\xi^{\alpha}.$$

Secondo la (18,4) abbiamo, però, $p^{\alpha\dot\beta}p_{\gamma\dot\beta} = p^2\delta^{\alpha}_{\gamma}$, e quindi otteniamo

$$(p^2 - m^2)\,\xi^{\gamma} = 0, \tag{20,3}$$

da dove è evidente che m è la massa della particella.

Notiamo che il fatto di dover introdurre le masse nella equazione d'onda richiede che vengano presi in considerazione simultaneamente due spinori (ξ^{α} e $\eta_{\dot\alpha}$): mediante uno solo di essi è impossibile comporre un'equazione relativisticamente invariante, che contenga un qualche parametro dimensionale. Con questo, l'equazione d'onda risulta automaticamente invariante per l'inversione spaziale, se si definisce la trasformazione della funzione d'onda nella maniera seguente:

$$\mathrm{P}: \qquad \xi^{\alpha} \to i\eta_{\dot\alpha}, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to i\xi^{\alpha}. \tag{20,4}$$

È facile vedere che per una tale sostituzione (e per la sostituzione simultanea $p^{\alpha\dot\beta} \to p_{\alpha\dot\beta}$, evidente dalle formule (20,1)), le due equazioni (20,2) si trasformano l'una nell'altra. Due spinori, che si trasformano l'uno nell'altro per inversione, formano uno spinore a quattro componenti, ossia un bispinore.

L'equazione d'onda relativistica, rappresentata dal sistema (20,2), è detta *equazione di Dirac* (essa fu stabilita da *Dirac* nel 1928). Per successive analisi e applicazioni di questa equazione consideriamo le diverse forme, nelle quali essa può essere rappresentata.

Usando le formule (18,6), trascriviamo le equazioni (20,2) nella forma

$$\begin{aligned} (p_0 + \mathbf{p}\sigma)\,\eta &= m\xi, \\ (p_0 - \mathbf{p}\sigma)\,\xi &= m\eta. \end{aligned} \tag{20,5}$$

Qui i simboli ξ e η indicano grandezze a due componenti: gli spinori

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} \eta_{\dot 1} \\ \eta_{\dot 2} \end{pmatrix} \tag{20,6}$$

(il primo con gli indici in alto, il secondo in basso); qui e nel seguito, quando si moltiplicano le matrici σ per una qualsiasi grandezza a due componenti f, si sottintende sempre la moltiplicazione secondo la regola matriciale ordinaria

$$(\sigma f)_{\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} f_{\beta}. \tag{20,7}$$

La scrittura di f in forma di colonna verticale $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ corrisponde al fatto che ogni riga di σ viene moltiplicata per la colonna f.

Per comodità di richiami ulteriori scriviamo qui ancora una volta le matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{20,8}$$

e ricordiamo le loro proprietà principali

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_k + \sigma_k\sigma_i &= 2\delta_{ik}, \\ \sigma_i\sigma_k &= ie_{ikl}\sigma_l + \delta_{ik} \end{aligned} \tag{20,9}$$

(vedi III, § 55).

Scriviamo anche l'equazione d'onda, cui soddisfa la funzione coniugata complessa, composta dagli spinori

$$\xi^* = (\xi^{1*}, \xi^{2*}), \qquad \eta^* = (\eta_1^*, \eta_2^*). \tag{20,10}$$

Poiché tutti gli operatori p_μ contengono il moltiplicatore i, si ha $p_\mu^* = -p_\mu$. Quando si esegue la coniugazione complessa di ambedue le parti delle equazioni (20,5) occorre anche tener conto del fatto che, essendo le matrici σ hermitiane ($\sigma^* = \tilde{\sigma}$), ha luogo la relazione

$$(\sigma f)_\alpha^* = \sigma_{\alpha\beta}^* f_\beta^* = f_\beta^* \sigma_{\beta\alpha} = (f^*\sigma)_\alpha,$$

e si ottengono le equazioni nella forma

$$\begin{aligned} \eta^* (p_0 + \mathbf{p}\sigma) &= -m\xi^*, \\ \xi^* (p_0 - \mathbf{p}\sigma) &= -m\eta^*. \end{aligned} \tag{20,11}$$

In questa forma di scrittura si sottintende convenzionalmente che gli operatori p^μ agiscono sulla funzione che sta alla loro sinistra. La scrittura ξ^* e η^* sotto forma di righe orizzontali corrisponde alla moltiplicazione matriciale in queste equazioni: la riga f viene moltiplicata con le colonne nelle matrici σ:

$$(f^*\sigma)_\alpha = f_\beta^* \sigma_{\beta\alpha}. \tag{20,12}$$

La trasformazione di inversione per ξ^*, η^* viene definita come la coniugata complessa della trasformazione (20,4):

$$\mathrm{P}: \qquad \xi^{\alpha*} \to -i\eta_\alpha^*, \qquad \eta_\alpha^* \to -i\xi^{\alpha*}. \tag{20,13}$$

§ 21. *Forma simmetrica dell'equazione di Dirac*

La trascrizione spinoriale dell'equazione di Dirac è la piú naturale, nel senso che in essa si manifesta in modo diretto la sua invarianza relativistica. Tuttavia, per le applicazioni possono rivelarsi piú comode altre rappresentazioni dell'equazione d'onda, le quali

si ottengono mediante una scelta diversa delle quattro componenti indipendenti della funzione d'onda.

Indicheremo la funzione d'onda a quattro componenti con il simbolo ψ (con le componenti ψ_i, $i = 1, 2, 3, 4$). In rappresentazione spinoriale questo è un bispinore

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{21,1}$$

Con lo stesso diritto, però, si può scegliere, come componenti indipendenti di ψ, qualsiasi combinazione linearmente indipendente delle componenti degli spinori ξ e η[1]). Accordiamoci di limitare le possibili trasformazioni lineari soltanto con la richiesta di unitarietà; queste trasformazioni non cambiano le forme bilineari composte di ψ e ψ^* (§ 28).

Nel caso generale di una scelta arbitraria delle componenti di ψ, l'equazione di Dirac si può rappresentare nella forma

$$p_\mu \gamma^\mu_{ik} \psi_k = m\psi_i,$$

dove γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) sono certe matrici a quattro righe (le *matrici di Dirac*). Di solito, scriveremo questa equazione in forma simbolica, tralasciando gli indici matriciali,

$$(\gamma p - m)\,\psi = 0, \tag{21,2}$$

dove

$$\gamma p \equiv \gamma^\mu p_\mu = p_0\gamma^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} = i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\nabla, \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3).$$

Cosí, alla forma spinoriale dell'equazione, con le componenti di ψ della (21,1), corrispondono le matrici[2])

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{21,3}$$

come è facile vedere, scrivendo le equazioni (20,5) nella forma

$$\begin{pmatrix} 0 & p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

e confrontando con la (21,2).

Nel caso generale, le matrici γ devono soddisfare soltanto condizioni, che garantiscano l'uguaglianza $p^2 = m^2$. Per chiarire queste condizioni, moltiplichiamo l'equazione (21,2) per γp da sinistra.

---

[1]) Per brevità, parleremo della grandezza a quattro componenti ψ come di un bispinore, anche in rappresentazione non spinoriale.

[2]) Qui e nel seguito useremo una forma abbreviata di scrittura delle matrici a quattro righe mediante matrici a due righe: ogni simbolo nelle espressioni (21,3) rappresenta una matrice a due righe.

Abbiamo

$$(\gamma^\mu p_\mu)(\gamma^\nu p_\nu)\psi = m(p_\mu\gamma^\mu)\psi = m^2\psi.$$

Poiché $p_\mu p_\nu$ è un tensore simmetrico (tutti gli operatori p_μ commutano tra loro), questa uguaglianza si può trascrivere nella forma

$$\frac{1}{2}p_\mu p_\nu(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi = m^2\psi,$$

da dove si vede che deve aver luogo la relazione

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{21,4}$$

In tal modo, tutte le coppie di matrici γ^μ differenti anticommutano, e i quadrati di ognuna di esse sono

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1, \quad (\gamma^0)^2 = 1. \tag{21,5}$$

Per una generica trasformazione unitaria delle componenti di ψ ($\psi' = U\psi$, dove U è una matrice unitaria a quattro righe) le matrici γ si trasformano secondo la formula

$$\gamma' = U\gamma U^{-1} = U\gamma U^+ \tag{21,6}$$

(cosí che l'equazione $(\gamma p - m)\psi = 0$ diventa $(\gamma' p - m)\psi' = 0$). Le relazioni di commutazione (21,4) per queste trasformazioni restano, ovviamente, invariate.

Delle matrici (21,3) la matrice γ^0 è hermitiana, mentre le matrici $\boldsymbol{\gamma}$ sono antihermitiane. Queste proprietà restano anche per qualsiasi trasformazione unitaria (21,6), e quindi varranno sempre le relazioni[1])

$$\boldsymbol{\gamma}^+ = -\boldsymbol{\gamma}, \quad \gamma^{0+} = \gamma^0. \tag{21,7}$$

Scriviamo anche l'equazione per la funzione coniugata complessa ψ^*. Eseguendo la coniugazione complessa dell'equazione (21,2) e tenendo conto delle proprietà (21,7) otteniamo

$$(-p_0\tilde{\gamma}_0 - \mathbf{p}\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - m)\psi^* = 0.$$

Scambiamo ψ^* di posto secondo la relazione $\tilde{\gamma}^\mu\psi^* = \psi^*\gamma^\mu$ e moltiplichiamo da destra tutte le equazioni per γ^0, notando che $\boldsymbol{\gamma}\gamma^0 = -\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$; introducendo inoltre il nuovo bispinore

$$\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0, \quad \psi^* = \bar{\psi}\gamma^0, \tag{21,8}$$

otteniamo

$$\bar{\psi}(\gamma p + m) = 0. \tag{21,9}$$

Come anche nella (20,11), si supponne che l'operatore p agisca qui sulla funzione, che sta alla sua sinistra. La funzione $\bar{\psi}$ è detta *fun-*

[1]) Queste uguaglianze si possono scrivere insieme nella forma

$$\gamma^{\lambda+} = \gamma^0\gamma^\lambda\gamma^0. \tag{21,7a}$$

zione aggiunta di Dirac (o aggiunta relativistica, oppure, semplicemente aggiunta) della funzione ψ. Il senso del fattore γ^0 nella sua definizione consiste nel fatto che (in rappresentazione spinoriale) esso scambia di posto gli spinori ξ^* e η^*, cosí che nella funzione $\bar{\psi} = (\eta^*, \xi^*)$ primo risulta (come anche nella ψ) lo spinore non puntato, e secondo lo spinore puntato; proprio per questa ragione $\bar{\psi}$ è un « partner » piú naturale (che non ψ^*) di ψ quando, ad esempio, esse figurano insieme nelle diverse combinazioni bilineari (vedi § 28).

La trasformazione di inversione spaziale della funzione d'onda si può rappresentare nella forma

$$\mathrm{P}: \qquad \psi \to i\gamma^0\psi, \quad \bar{\psi} \to -i\bar{\psi}\gamma^0. \tag{21,10}$$

Nella rappresentazione spinoriale di ψ la matrice γ^0 scambia di posto, come deve essere in un'inversione, le componenti di ξ e η. L'invarianza dell'equazione di Dirac rispetto alla trasformazione (21,10) è evidente e diretta: operando nella (21,2) la sostituzione $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ e simultaneamente $\psi \to i\gamma^0\psi$, otteniamo

$$(\mathrm{p}_0\gamma^0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - m)\,\gamma^0\psi = 0.$$

Moltiplicando questa equazione a sinistra per γ^0 e tenendo conto della anticommutatività di γ^0 e $\boldsymbol{\gamma}$, ritorniamo all'equazione di partenza.

Moltiplicando l'equazione $(\gamma\mathrm{p} - m)\,\psi = 0$ a sinistra per $\bar{\psi}$, e l'equazione $\bar{\psi}\,(\gamma\mathrm{p} + m) = 0$ a destra per ψ, sommandole otteniamo

$$\bar{\psi}\gamma^\mu(\mathrm{p}_\mu\psi) + (\mathrm{p}_\mu\bar{\psi})\,\gamma^\mu\psi = \mathrm{p}_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0,$$

dove le parentesi indicano a quale funzione si propaga l'azione dell'operatore p. L'uguaglianza ottenuta ha la forma dell'equazione di continuità $\partial_\mu j^\mu = 0$, e quindi la grandezza

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\psi^*\psi,\ \psi^*\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\psi) \tag{21,11}$$

rappresenta il quadrivettore densità di corrente di particelle. Notiamo che la componente temporale di questo vettore $j^0 = \psi^*\psi$ è definita positiva.

L'equazione di Dirac si può rappresentare anche in una forma, risolta rispetto alla derivata temporale,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathrm{H}\psi, \tag{21,12}$$

dove H è l'hamiltoniano della particella[1]). Per fare questo è suffi-

[1]) Per una particella a spin 0 l'equazione d'onda non poteva essere rappresentata in questa forma: l'equazione (10,5) per lo scalare ψ è del secondo ordine rispetto al tempo, e il sistema (10,4) di equazioni del primo ordine per la grandezza a cinque componenti (ψ, ψ_μ) non contiene le derivate rispetto al tempo di tutte le componenti.

ciente moltiplicare l'equazione (21,2) a sinistra per γ^0. Per l'hamiltoniano si ottiene l'espressione

$$H = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m, \tag{21,13}$$

dove sono state introdotte le notazioni universalmente accettate per le matrici che vi figurano:

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \quad \beta = \gamma^0. \tag{21,14}$$

Notiamo che

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}, \quad \beta\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\beta = 0, \quad \beta^2 = 1, \tag{21,15}$$

cioè, tutte le matrici $\boldsymbol{\alpha}$, β anticommutano tra loro, e i loro quadrati sono uguali a 1; tutte queste matrici sono hermitiane. In rappresentazione spinoriale

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21,16}$$

Nel caso limite di piccole velocità la particella deve essere descritta, come anche nella teoria non relativistica, da un solo spinore bicomponente. Effettivamente, passando nelle equazioni (20,5) al limite $\boldsymbol{p} \to 0$, $\varepsilon \to m$, otteniamo $\xi = \eta$, cioè i due spinori, che compongono il bispinore, coincidono. Qui, però, si manifesta uno svantaggio della forma spinoriale di scrittura dell'equazione di Dirac: nel passaggio al limite restano differenti da zero tutte le quattro componenti di ψ, sebbene, in realtà, solo due di esse siano indipendenti. La rappresentazione piú comoda della funzione d'onda ψ risulta essere quella, in cui nel limite due delle componenti si annullano.

In relazione a questo, introduciamo, al posto di ξ e η, le loro combinazioni lineari φ e χ:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \qquad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta). \tag{21,17}$$

Allora per una particella a riposo si avrà $\chi = 0$. Questa rappresentazione di ψ verrà chiamata rappresentazione ordinaria (o *standard*). Per l'inversione φ e χ si trasformano come segue:

$$\mathrm{P}: \qquad \varphi \to i\varphi, \quad \chi \to -i\chi. \tag{21,18}$$

Le equazioni per φ e χ si ottengono moltiplicando e sottraendo le equazioni (20,5)

$$\begin{aligned} p_0\varphi - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\chi &= m\varphi, \\ -p_0\chi + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\varphi &= m\chi. \end{aligned} \tag{21,19}$$

Da qui si vede che alla rappresentazione ordinaria corrispondono le matrici

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}. \tag{21,20}$$

Poiché nella (21,17) si sommano separatamente le prime e le seconde componenti di ξ e η, nella rappresentazione standard, come anche nella rappresentazione spinoriale, le componenti ψ_1 e ψ_3 corrispondono agli autovalori della proiezione dello spin $+1/2$, e ψ_2 e ψ_4 della proiezione $-1/2$. In ambedue queste rappresentazioni, dunque, la matrice $1/2\Sigma$, dove

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \tag{21,21}$$

rappresenta l'operatore tridimensionale di spin: applicando $1/2\Sigma_z$ al bispinore, che contiene solo le componenti ψ_1, ψ_3 o ψ_2, ψ_4, il bispinore viene moltiplicato per $+1/2$ o $-1/2$. In una rappresentazione generica questa matrice può essere scritta nella forma

$$\Sigma = -\alpha\gamma^5 = -\frac{i}{2}[\alpha\alpha] \tag{21,22}$$

(per la definizione di γ^5, vedi piú avanti la (22,14)).

PROBLEMI

1. Trovare le formule di trasformazione della funzione d'onda per una trasformazione infinitesima di Lorentz e per una rotazione spaziale infinitesima.

Soluzione. Nella rappresentazione spinoriale di ψ, per una trasformazione infinitesima di Lorentz, si ha

$$\xi' = \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\delta\boldsymbol{V}\right)\xi, \quad \eta' = \left(1 + \frac{1}{2}\sigma\delta\boldsymbol{V}\right)\eta$$

(vedi (18,8), (18,8a) e (18,10)). Ambedue le formule possono essere riunite e scritte nella forma

$$\psi' = \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\delta\boldsymbol{V}\right)\psi. \tag{1}$$

Analogamente, la legge di trasformazione per una rotazione infinitesima è

$$\psi' = \left(1 + \frac{i}{2}\Sigma\delta\theta\right)\psi. \tag{2}$$

In questa forma le formule sono valide per qualsiasi rappresentazione di ψ, se per α e Σ si intendono le matrici in quella stessa rappresentazione.

È facile verificare che le matrici α e Σ sono le componenti di un « quadritensore matriciale » antisimmetrico

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = (\alpha, \ i\Sigma)$$

(l'elencazione delle componenti è fatta secondo la regola (19,15)). Introduciamo anche il tensore infinitesimo antisimmetrico $\delta\varepsilon^{\mu\nu} = (\delta\boldsymbol{V}, \delta\theta)$. Allora

$$\sigma^{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu} = 2i\Sigma\delta\theta - 2\alpha\delta\boldsymbol{V},$$

e le due formule (1—2) possono venir trascritte in una forma unitaria

$$\psi' = \left(1 + \frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu}\right)\psi. \tag{3}$$

2. Scrivere l'equazione di Dirac in una rappresentazione, nella quale essa non contenga coefficienti complessi (*E. Majorana*, 1937).

Soluzione. Nella rappresentazione standard, nell'equazione

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} + im\beta\right)\psi = 0$$

sono complesse solo le matrici α_y e $i\beta$. Questa complessità può essere rimossa operando una trasformazione $\psi' = U\psi$ in conseguenza della quale la matrice complessa α_y si scambi di posto con la matrice reale β. Per questo, occorre porre

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_y + \beta) = U^{-1}.$$

Allora

$$\alpha'_x = U\alpha_x U = -\alpha_x, \quad \alpha'_y = \beta, \quad \alpha'_z = -\alpha_z, \quad \beta' = \alpha_y,$$

e l'equazione di Dirac assume la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} - \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} + im\alpha_y\right)\psi' = 0,$$

nella quale tutti i coefficienti sono reali.

§ 22. *Algebra delle matrici di Dirac*

Nei calcoli connessi con l'equazione di Dirac si fa largo uso delle matrici γ, senza ricorrere alla loro forma concreta in questa o in quella rappresentazione. Le regole dell'uso di queste matrici sono interamente determinate dalle relazioni di commutazione

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \qquad (\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{22,1}$$

che determinano tutte le loro proprietà generali.

In questo paragrafo, riporteremo una serie di formule e di regole dell'algebra delle matrici γ, che risulteranno utili in diversi calcoli.

Il « prodotto scalare » delle matrici γ per se stesse è $g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4$. Per abbreviare la scrittura introdurremo, per analogia con le componenti covarianti dei quadrivettori, la notazione $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$. Allora

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4. \tag{22,2}$$

Se invece le matrici γ_μ e γ^μ sono separate da una o piú matrici γ, allora, mediante una o piú trasposizioni dei fattori (usando la relazione (22,1)), si possono portare le matrici γ_μ e γ^μ in posizione contigua, e quindi eseguire la somma (su μ) secondo la (22,2). In questo

modo, si ottengono le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu &= 4 g^{\lambda\nu}, \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu &= -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda, \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu &= 2(\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma). \end{aligned} \tag{22,3}$$

Di solito i fattori γ^μ, . . . figurano in combinazione con diversi quadrivettori sotto forma di « prodotti scalari ». In seguito, useremo molto la notazione

$$\hat{a} = \gamma a \equiv \gamma^\mu a_\mu. \tag{22,4}$$

Per questi prodotti le formule (22,1) assumono la forma

$$\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = 2(ab), \qquad \hat{a}\hat{a} = a^2, \tag{22,5}$$

e le formule (22,3) la forma

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \hat{a} \gamma^\mu &= -2\hat{a}, \\ \gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \gamma^\mu &= 4(ab), \\ \gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma^\mu &= -2\hat{c}\hat{b}\hat{a}, \\ \gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} \gamma^\mu &= 2(\hat{d}\hat{a}\hat{b}\hat{c} + \hat{c}\hat{b}\hat{a}\hat{d}). \end{aligned} \tag{22,6}$$

Un'operazione largamente diffusa è il calcolo della traccia del prodotto di un certo numero di matrici γ. Consideriamo le grandezze

$$T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \equiv \frac{1}{4} \operatorname{Tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} \ldots \gamma^{\mu_n}). \tag{22,7}$$

In forza di una nota proprietà della traccia di un prodotto di matrici, questo tensore è simmetrico rispetto a permutazioni cicliche degli indici $\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n$.

Poiché le matrici γ hanno la stessa forma in qualsiasi sistema di riferimento, anche le grandezze T non dipenderanno dalla scelta del sistema. Quindi esse formano un tensore, che è espresso solo attraverso il tensore metrico $g_{\mu\nu}$, che gode di questa proprietà.

Mediante i tensori di secondo rango $g_{\mu\nu}$ si possono comporre solo tensori di rango pari. Già da qui discende che la traccia del prodotto di un numero dispari qualsiasi di matrici γ è uguale a zero. In particolare, è zero la traccia di ciascuna delle matrici γ[1])

$$\operatorname{Tr} \gamma^\mu = 0. \tag{22,8}$$

La traccia della matrice unità a quattro righe (che si suppone appartenente alla parte destra della relazione di commutazione (22,1))

[1]) La traccia di una matrice è invariante rispetto alle trasformazioni $\gamma = U\gamma U^{-1}$. Quindi la (22,8) è evidente anche dalle espressioni concrete delle matrici (21,3).

è uguale a 4. Quindi, calcolando la traccia di ambedue i membri della (22,1), troviamo

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \tag{22,9}$$

La traccia del prodotto di quattro matrici è

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho} + g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}. \tag{22,10}$$

Questa formula si può ottenere, ad esempio, « trasportando » nell'espressione $\mathrm{Tr}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$ il fattore γ^λ a destra, usando la relazione di commutazione (22,1); dopo ogni permutazione compare uno dei membri che figurano nella (22,10):

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = 2g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho} - T^{\mu\lambda\nu\rho} = 2g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - T^{\mu\lambda\nu\rho},$$

e cosí via. Dopo tutte le permutazioni a destra resterà $-T^{\mu\nu\rho\lambda} = -T^{\lambda\mu\nu\rho}$, che trasporteremo a sinistra. In questo stesso modo, il calcolo della traccia del prodotto di sei matrici γ si riduce al calcolo delle tracce dei prodotti di quattro fattori, e cosí via. Cosí

$$T^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho\sigma\tau} - g^{\lambda\nu}T^{\mu\rho\sigma\tau} + g^{\lambda\rho}T^{\mu\nu\sigma\tau} - g^{\lambda\sigma}T^{\mu\nu\rho\tau} + g^{\lambda\tau}T^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{22,11}$$

Notiamo che tutte le tracce $T^{\lambda\mu\cdots}$ sono reali e che sono differenti da zero solo se ciascuna delle matrici γ^0, γ^1, . . . figura nel prodotto un numero pari di volte; ambedue questi fatti sono evidenti dalle formule ottenute. Da qui, a sua volta, è facile arrivare alla conclusione che la traccia non cambia per una variazione dell'ordine dei fattori nell'ordine opposto[1]):

$$T^{\lambda\mu\ldots\rho\sigma} = T^{\sigma\rho\ldots\mu\lambda}. \tag{22,12}$$

Come è già stato detto, i fattori γ compaiono, di solito, sotto forma di « prodotti scalari » con dei quadrivettori. In questi casi, adesempio, le formule (22,9) e (22,10) significano che

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\hat{a}\hat{b} = ab,$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} = (ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc). \tag{22,13}$$

Un ruolo particolare è svolto dal prodotto $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Per esso è accettata una notazione speciale:

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{22,14}$$

---

[1]) Effettivamente, poiché (per qualsiasi matrice M) si ha $\mathrm{Tr}M = \mathrm{Tr}\widetilde{M}$, allora (tenendo conto anche del fatto che la traccia è reale) abbiamo $\mathrm{Tr}\,(\gamma^\lambda \ldots \gamma^\nu) = \mathrm{Tr}\,(\gamma^\lambda \ldots \gamma^\nu)^+ = \mathrm{Tr}\,(\gamma^{\nu+} \ldots \gamma^{\lambda+})$, e, poiché ciascuna delle matrici è o hermitiana o antihermitiana ($\gamma^{\mu+} = \pm\gamma^\mu$) e compare nel prodotto un numero pari di volte, allora la (22,12) è evidente.

È facile vedere che

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \tag{22,15}$$

cioè la matrice γ^5 anticommuta con tutte le matrici γ^μ. Nei confronti delle matrici α e β valgono le regole

$$\alpha\gamma^5 - \gamma^5\alpha = 0, \quad \beta\gamma^5 + \gamma^5\beta = 0 \tag{22,16}$$

(la commutatività con α discende dal fatto che $\alpha = \gamma^0\gamma$ è un prodotto di due matrici γ^μ).

La matrice γ^5 è hermitiana; in effetti

$$\gamma^{5+} = i\gamma^{3+}\gamma^{2+}\gamma^{1+}\gamma^{0+} = -i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0,$$

e poiché la successione 3210 si riconduce alla successione 0123 mediante un numero pari di permutazioni, vale la relazione

$$\gamma^{5+} = \gamma^5. \tag{22,17}$$

Riportiamo anche la forma concreta di questa matrice in due rappresentazioni:

$$\begin{aligned} &\text{spinoriale} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ &\text{standard} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22,18}$$

La traccia della matrice γ^5 è uguale a zero:

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^5 = 0 \tag{22,19}$$

(questo è evidente direttamente dalla (22,18)). Sono uguali a zero anche le tracce dei prodotti $\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu$. Per i prodotti di γ^5 per quattro fattori γ^μ, invece si ha

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = ie^{\lambda\mu\nu\rho}. \tag{22,20}$$

Notiamo ancora la formula

$$\hat{N} = i\gamma^5\hat{a}\hat{b}\hat{c}, \quad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho}a_\mu b_\nu c_\rho, \tag{22,21}$$

che si verifica se $ab = ac = bc = 0$.

PROBLEMA

Trovare $1/4\ \mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau \equiv A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$.

Soluzione. Usando la regola di commutazione (22,1) e la formula (22,20) riduciamo la traccia cercata alla forma

$$A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = -2iB^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} + A^{\nu\mu\lambda\tau\sigma\rho},$$

dove

$$B^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = e^{\lambda\mu\nu\rho} g^{\sigma\tau} - e^{\lambda\mu\nu\sigma} g^{\rho\tau} + e^{\lambda\mu\nu\tau} g^{\rho\sigma} - e^{\nu\tau\sigma\rho} g^{\lambda\mu} + e^{\mu\tau\sigma\rho} g^{\lambda\nu} - e^{\lambda\tau\sigma\rho} g^{\mu\nu}.$$

Per le proprietà di ciclicità e per la formula (22,12) si ha $A^{\nu\mu\lambda\tau\sigma\rho} = A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$; in questo modo si trova che

$$A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = -iB^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}.$$

§ 23. *Onde piane*

Lo stato di una particella libera di impulso e energia dati è descritta da un'onda piana, rappresentabile nella forma

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx}. \tag{23,1}$$

L'indice p indica il valore dell'energia-impulso; l'ampiezza d'onda u_p è un bispinore normalizzato in un determinato modo.

Per la seconda quantizzazione, accanto alle funzioni d'onda (23,1), saranno necessarie le funzioni a « frequenza negativa », che compaiono nella teoria relativistica, come è stato spiegato nel § 11, in relazione ai due valori della radice $\pm\sqrt{p^2 + m^2}$. Come già nel § 11, per ε intenderemo ovunque la quantità positiva $\varepsilon = + \sqrt{p^2 + m^2}$, e quindi la « frequenza negativa » è $-\varepsilon$; cambiando anche il segno di p, si ottiene una funzione, che è naturale denotare con ψ_{-p}

$$\psi_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx}. \tag{23,2}$$

Il senso di queste funzioni sarà chiarito nel § 26. In seguito scriveremo parallelamente le formule per ψ_p e ψ_{-p}.

Le componenti delle ampiezze bispinoriali u_p e u_{-p} soddisfano i seguenti sistemi di equazioni algebriche:

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m)\, u_p &= 0, \\ (\hat{p} + m)\, u_{-p} &= 0, \end{aligned} \tag{23,3}$$

che si ottengono sostituendo le (23,1-2) nell'equazione di Dirac (questa operazione si riduce alla sostituzione dell'operatore p con $\pm p$)[1]. La relazione $p^2 = m^2$ è la condizione di compatibilità di ciascuno dei sistemi. Noi normalizzeremo sempre le ampiezze bispinoriali con le condizioni invarianti

$$\begin{aligned} \bar{u}_p u_p &= 2m, \\ \bar{u}_{-p} u_{-p} &= -2m \end{aligned} \tag{23,4}$$

---

[1]) Scriviamo anche i sistemi analoghi che si ottengono dall'equazione di Dirac (21,9) per la funzione aggiunta:

$$\bar{u}_p (\hat{p} - m) = 0, \quad \bar{u}_{-p} (\hat{p} + m) = 0. \tag{23,3a}$$

(dove la lineetta sopra la lettera indica, come dappertutto, la coniugazione di Dirac: $\bar{u} = u^*\gamma^0$). Moltiplicando le equazioni (23,3) a sinistra per $\bar{u}_{\pm p}$, otteniamo $(\bar{u}_{\pm p}\gamma u_{\pm p})\, p = 2m^2 = 2p^2$, da dove si vede che

$$\bar{u}_p\gamma u_p = \bar{u}_{-p}\gamma u_{-p} = 2p. \tag{23,5}$$

Notiamo che il passaggio dalle formule per u_p alle formule per u_{-p} viene fatto mediante il cambiamento di segno di m.

Il quadrivettore densità di corrente è

$$j = \bar{\psi}_{\pm p}\gamma\psi_{\pm p} = \frac{1}{2\varepsilon}\,\bar{u}_{\pm p}\gamma u_{\pm p} = \frac{p}{\varepsilon}, \tag{23,6}$$

cioè $j^\mu = (1, \boldsymbol{v})$, dove $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/\varepsilon$ è la velocità della particella. Da qui si vede che le funzioni ψ_p sono normalizzate con « una particella nell'unità di volume $V = 1$ ».

In forza delle equazioni (23,3) le componenti dell'ampiezza d'onda sono legate fra loro da alcune relazioni, la cui forma concreta dipende, ovviamente, dalla rappresentazione concreta di ψ. Troviamo queste relazioni per il caso della rappresentazione standard.

Dalle equazioni (21,19) per un'onda piana abbiamo

$$\begin{aligned} (\varepsilon - m)\,\varphi - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma}\chi &= 0, \\ (\varepsilon + m)\,\chi - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma}\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{23,7}$$

Da queste uguaglianze troviamo la relazione tra φ e χ in due forme equivalenti:

$$\varphi = \frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon - m}\,\chi, \qquad \chi = \frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon + m}\,\varphi \tag{23,8}$$

(l'equivalenza di queste formule è evidente: moltiplicando la prima di esse a sinistra per $\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma}/(\varepsilon + m)$ e tenendo conto del fatto che $(\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{p}^2$ e $\varepsilon^2 - m^2 = \boldsymbol{p}^2$, otteniamo la seconda uguaglianza). Il fattore comune in φ e χ viene scelto in modo da soddisfare la condizione di normalizzazione (23,4). Per u_p (e analogamente per u_{-p}) otteniamo le espressioni

$$u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\, w \\ \sqrt{\varepsilon - m}\,(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\, w \end{pmatrix}, \qquad u_{-p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m}\,(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\, w' \\ \sqrt{\varepsilon + m}\, w' \end{pmatrix} \tag{23,9}$$

(la seconda formula si ricava dalla prima cambiando il segno davanti a m e sostituendo la notazione $w \to (\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\, w'$). Qui $\boldsymbol{n}$ è il versore del vettore $\boldsymbol{p}$, e w una grandezza arbitraria a due componenti sottoposta soltanto alla condizione di normalizzazione

$$w^* w = 1. \tag{23,10}$$

Per $\bar{u} = u^*\gamma^0$ (γ^0 dalla (21,20)) abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{u}_p &= (\sqrt{\varepsilon+m}\, w^*, \quad -\sqrt{\varepsilon-m}\, w^*(\boldsymbol{n}\sigma)), \\ \bar{u}_{-p} &= (\sqrt{\varepsilon-m}\, w'^*(\boldsymbol{n}\sigma), \quad -\sqrt{\varepsilon+m}\, w'^*), \end{aligned} \tag{23,11}$$

e moltiplicando ci possiamo convincere che effettivamente $\bar{u}_{\pm p} u_{\pm p} = \pm 2m$.

Nel sistema a riposo, cioè per $\varepsilon = m$, abbiamo

$$u_p = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{-p} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 0 \\ w' \end{pmatrix}, \tag{23,12}$$

cioè w è uno spinore tridimensionale, al quale si riduce, nel limite non relativistico, l'ampiezza di ciascuna delle onde. Notiamo che nel bispinore u_{-p}, nel sistema di quiete, si annullano le seconde due componenti, e non le prime. Questa proprietà delle soluzioni dell'equazione di Dirac a « frequenza negativa » è evidente a priori: ponendo nella (23,7) $\boldsymbol{p} = 0$ e sostituendo ε con $-m$, otteniamo $\varphi = 0$[1].

L'ampiezza dell'onda piana contiene una grandezza arbitraria a due componenti. In altre parole, per una data quantità di moto esistono due stati indipendenti differenti corrispondenti ai due valori possibili della proiezione dello spin. La proiezione dello spin su un asse qualsiasi z non può, tuttavia, avere un valore determinato. Questo è già evidente dal fatto che l'hamiltoniano della particella di impulso $\boldsymbol{p}$ (cioè la matrice $\mathrm{H} = \boldsymbol{\alpha p} + \beta m$) non commuta con la matrice $\Sigma_z = -i\alpha_x\alpha_y$. In accordo con le affermazioni generali, fatte nel § 16, si conserva, tuttavia, l'elicità λ, cioè la proiezione dello spin sulla direzione di $\boldsymbol{p}$: l'hamiltoniano commuta con la matrice $\boldsymbol{n}\boldsymbol{\Sigma}$.

Agli stati di elicità corrispondono onde piane, in cui lo spinore tridimensionale $w = w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n})$ è un'autofunzione dell'operatore $\boldsymbol{n}\sigma$:

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\sigma)\, w^{(\lambda)} = \lambda w^{(\lambda)}. \tag{23,13}$$

La forma esplicita di questi spinori è

$$w^{(\lambda=1/2)} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad w^{(\lambda=-1/2)} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{23,14}$$

---

[1]) In rappresentazione spinoriale abbiamo invece $\xi = -\eta$ al posto della relazione $\xi = \eta$, che è valida nel sistema di quiete per le soluzioni a « frequenza positiva ».

dove θ e φ sono l'angolo polare e azimutale della direzione individuata da $\boldsymbol{n}$ rispetto al sistema fisso di coordinate xyz[1]).

Un'altra scelta possibile dei due stati indipendenti di una particella libera di dato $\boldsymbol{p}$ (piú semplice, anche se meno intuitivo) corrisponde ai due valori della proiezione z dello spin nel sistema di quiete; indichiamo questa proiezione con σ. Gli spinori corrispondenti sono

$$w^{(\sigma=1/2)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad w^{(\sigma=-1/2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{23,15}$$

Le due soluzioni linearmente indipendenti a « frequenza negativa» vengono scelte sotto forma di onde piane, nelle quali figurano gli spinori tridimensionali

$$w^{(\sigma)\prime}=-\sigma_y w^{(-\sigma)}=2\sigma i w^{(\sigma)} \tag{23,16}$$

(il senso di tale scelta verrà chiarito nel § 26).

PROBLEMI

1. Ottenere la funzione d'onda (23,9) mediante la trasformazione diretta di Lorentz partendo dal sistema di quiete.

Soluzione. La formula di trasformazione per la velocità finita $\boldsymbol{V}$ del sistema di riferimento K' rispetto al sistema K si ricava dalla formula (1) del problema 1 § 21 in maniera analoga a come la (18,13) si ricava dalla (18,12):

$$\psi'=e^{-\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\alpha}}\psi=\left(\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2}-\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\alpha}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}\right)\psi,$$

dove $\boldsymbol{\nu}$ è il versore del vettore $\boldsymbol{V}$, e $\operatorname{th}\varphi=|\boldsymbol{V}|$; secondo questa stessa formula si trasforma anche l'ampiezza bispinoriale u. Se K è il sistema di quiete della particella, e nel sistema K' essa ha la quantità di moto $\boldsymbol{p}$, allora $\boldsymbol{V}=-\boldsymbol{p}/\varepsilon$, da cui

$$\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2m}},\qquad \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\varepsilon-m}{2m}}.$$

Prendendo u dalla (23,12) e usando la matrice $\boldsymbol{\alpha}$ nella rappresentazione standard, otteniamo per u' l'espressione (23,9).

2. Nel sistema di quiete lo spin di una particella libera si conserva, e la sua funzione d'onda (in rappresentazione standard) ha in tutto due componenti, che corrispondono ai valori $\pm 1/2$ della proiezione dello spin su un asse fissato z.

---

[1]) La soluzione delle equazioni (23,13) può venire moltiplicata per un fattore di fase qualsiasi; questo fatto è connesso con la possibilità di una rotazione arbitraria attorno alla direzione $\boldsymbol{n}$. A questa arbitrarietà corrisponde un'arbitrarietà dell'angolo γ nella trasformazione III (58,6) (per ottenere la (23,14) dalle formule III (58,6) occorre in queste ultime porre le componenti dello spinore senza apice uguali a $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ oppure a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; questo corrisponde a dati valori della proiezione dello spin sull'asse ζ. Occorre, inoltre, sostituire gli angoli α, β, γ con gli angoli φ, θ, 0).

Trovare la rappresentazione, in cui la funzione d'onda (onda piana) in qualsiasi sistema di riferimento abbia in tutto due componenti, corrispondenti a valori determinati della stessa caratteristica fisica dello stato, cioè la proiezione dello spin nel sistema di quiete (*L. Foldy, S. A. Wouthuysen*, 1950).

Soluzione. Partendo dall'ampiezza u_p nella rappresentazione standard (23,9), cerchiamo la trasformazione unitaria voluta nella forma $U = e^{W\gamma n}$, dove n è il versore del vettore p, e W una grandezza reale (poiché $\gamma^+ = -\gamma$, automaticamente si ha $U^+ = U^{-1}$). Sviluppando in serie e tenendo conto che $(\gamma n)^2 = -1$, rappresentiamo U nella forma

$$U = \cos W + \gamma n \operatorname{sen} W.$$

In forza della condizione che nell'ampiezza trasformata $u'_p = Uu_p$ le seconde due componenti si annullano, troviamo $\operatorname{tg} W = |p|/(m+\varepsilon)$, ovvero

$$W = \operatorname{arctg} \frac{|p|}{m+\varepsilon} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{|p|}{m}.$$

Nella nuova rappresentazione

$$u_p = \sqrt{2\varepsilon} \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nella nuova rappresentazione l'hamiltoniano assume la forma

$$H' = U(\alpha p + \beta m) U^{-1} = \beta\varepsilon$$

(tutte le matrici β, α, γ sono prese nella rappresentazione standard). Questo hamiltoniano commuta con la matrice

$$\Sigma = -\alpha\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

che rappresenta, nella nuova rappresentazione, l'operatore di una grandezza conservativa: lo spin nel sistema a riposo.

§ 24. *Onde sferiche*

Le funzioni d'onda degli stati di una particella libera (a spin 1/2) con dati valori j del momento angolare sono onde spinoriali sferiche. Determiniamo la loro forma; a questo scopo ricordiamo preventivamente le formule analoghe della teoria non relativistica.

La funzione d'onda non relativistica è uno spinore tridimensionale $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$. Per uno stato con dati valori dell'energia (e insieme della quantità di moto p[1])), del momento angolare orbitale l, del momento angolare totale j e della sua proiezione m, la funzione d'onda ha la forma

$$\psi = R_{pl}(r)\, \Omega_{jlm}(\theta, \varphi). \tag{24,1}$$

Le grandezze Ω_{jlm} che costituiscono la sua parte angolare sono spinori tridimensionali, le cui componenti (per i due valori $j = l \pm 1/2$,

[1]) In questo paragrafo p significa $|p|$.

possibili per un dato l) sono date dalle formule

$$\Omega_{l+1/2,\,l,\,m}=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{j+m}{2j}}\,Y_{l,\,m-1/2}\\ \sqrt{\dfrac{j-m}{2j}}\,Y_{l,\,m+1/2}\end{pmatrix},$$
$$\Omega_{l-1/2,\,l,\,m}=\begin{pmatrix}-\sqrt{\dfrac{j-m+1}{2j+2}}\,Y_{l,\,m-1/2}\\ \sqrt{\dfrac{j+m+1}{2j+2}}\,Y_{l,\,m+1/2}\end{pmatrix} \tag{24,2}$$

(vedi III, § 106 pag. 506). Chiameremo le grandezze Ω_{jlm} *spinori sferici*. Essi sono normalizzati con la condizione

$$\int \Omega^*_{jlm}\Omega_{j'l'm'}\,do=\delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{24,3}$$

Le funzioni radiali R_{pl} costituiscono il fattore comune delle due componenti dello spinore ψ e sono date dalla formula III (33,10):

$$R_{pl}=\sqrt{\frac{p}{r}}\,J_{l+1/2}\,(pr). \tag{24,4}$$

Queste funzioni sono normalizzate con la condizione

$$\int_0^\infty r^2R_{p'l}R_{pl}\,dr=\delta\,(p'-p). \tag{24,5}$$

Tornando al caso relativistico, ricordiamo innanzitutto che per una particella in moto non valgono separatamente le leggi di conservazione dello spin e del momento angolare orbitale: gli operatori **s** e **l** separatamente non commutano con l'hamiltoniano. Come prima, tuttavia, si conserva (per una particella libera) la parità di stato. Per questa ragione, il numero quantico l perde il senso di grandezza che indica un dato valore del momento angolare orbitale, ma esso continua a determinare (vedi piú avanti) la parità di stato.

Conveniamo di considerare la funzione d'onda cercata (un bispinore) nella rappresentazione standard $\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$. Rispetto alle rotazioni φ e χ si comportano come degli spinori tridimensionali. Quindi la loro dipendenza angolare è data dai medesimi spinori sferici Ω_{jlm}. Sia $\varphi \backsim \Omega_{jlm}$, dove l ha un determinato valore tra i due possibili: $j+1/2$ oppure $j-1/2$. Per l'inversione $\varphi\,(\boldsymbol{r})\to i\varphi\,(-\boldsymbol{r})$ (vedi (21,18)) e poiché $\Omega_{jlm}\,(-\boldsymbol{n})=(-1)^l\Omega_{jlm}\,(\boldsymbol{n})$, si ha

$$\varphi\,(\boldsymbol{r})\to i\,(-1)^l\varphi\,(\boldsymbol{r}).$$

Le componenti di χ per l'inversione si comportano, invece, come $\chi\,(\boldsymbol{r})\to -\,i\chi\,(-\boldsymbol{r})$. Affinché lo stato abbia una parità determinata

(cioè, affinché per l'inversione tutte le componenti vengano moltiplicate per uno stesso fattore) è necessario, quindi, che la dipendenza angolare di χ sia determinata da spinori sferici $\Omega_{jl'm}$ con il secondo (dei due possibili) valore di l: poiché questi valori si differenziano di 1, abbiamo $(-1)^{l'} = -(-1)^{l}$.

La dipendenza radiale di φ e χ verrà determinata dalle stesse funzioni R_{pl} e $R_{pl'}$ (con valori l e l', corrispondenti all'ordine delle funzioni sferiche che entrano in Ω_{jlm}). Questo è chiaro già dal fatto che ogni componente di ψ soddisfa l'equazione del secondo ordine $(p^2 - m^2)\,\psi = 0$, la quale, per un dato valore $|\,\boldsymbol{p}\,|$, ha la forma

$$(\Delta + \boldsymbol{p}^2)\,\psi = 0,$$

che coincide formalmente con l'equazione non relativistica di Schrödinger per una particella libera.

Quindi

$$\varphi = AR_{pl}\Omega_{jlm}, \quad \chi = BR_{pl'}\Omega_{jl'm}, \tag{24,6}$$

e restano da determinare i coefficienti costanti A e B. Per fare questo, consideriamo una regione dello spazio molto lontana, in cui l'onda sferica si possa considerare come piana. Secondo la formula asintotica III (33,12)

$$R_{pl} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2ir}\left\{e^{i\left(pr-\frac{\pi l}{2}\right)} - e^{-i\left(pr-\frac{\pi l}{2}\right)}\right\}, \tag{24,7}$$

cosí che φ rappresenta la differenza di due onde piane, che si propagano nelle direzioni $\pm\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r)$. Per ciascuna di esse, secondo la (23,8), abbiamo

$$\chi = \frac{p}{\varepsilon + m}(\pm\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\,\varphi.$$

Da quanto detto sopra (le formule (24,6)) è, a priori, chiaro che $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\,\Omega_{jlm} = a\Omega_{jl'm}$, dove a è una costante. È facile determinare questa costante confrontando i valori dei due membri dell'uguaglianza per $m = 1/2$ dirigendo $\boldsymbol{n}$ lungo l'asse z. Usando la (7,2a) troviamo

$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\,\Omega_{jlm} = i^{l'-l}\Omega_{jl'm}. \tag{24,8}$$

Riunendo le formule scritte e confrontando con la (24,6), otteniamo

$$B = -\frac{p}{\varepsilon + m}A.$$

Infine, il coefficiente A si ricava dalla normalizzazione generale di ψ. Normalizzando ψ con la condizione

$$\int \psi^*_{pjlm}\psi_{p'j'l'm'}\,d^3x = \delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta\,(p - p'), \tag{24,9}$$

troviamo il risultato finale

$$\psi_{pjlm} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m}\, R_{pl}\Omega_{jlm} \\ -\sqrt{\varepsilon-m}\, R_{pl'}\Omega_{jl'm} \end{pmatrix}, \quad l' = 2j - l. \qquad (24,10)$$

In tal modo, per dati valori di j e m (e dell'energia ε) esistono due stati, che si differenziano per la parità. La parità è determinata in modo univoco dal numero l, che prende i valori $j \pm 1/2$: per l'inversione il bispinore (24,10) viene moltiplicato per $i\,(-1)^l$. Le componenti di questo bispinore, tuttavia, contengono funzioni sferiche di tutti e due gli ordini l e l'; questo fatto esprime la mancanza di un valore determinato del momento angolare orbitale.

Per $r \to \infty$ in ogni piccola regione dello spazio, le onde sferiche (24,7) si possono considerare come onde piane di impulso $\boldsymbol{p} = \pm p\boldsymbol{n}$. Per questo è chiaro che le funzioni d'onda nella rappresentazione degli impulsi si differenziano dalla (24,10), principalmente per la mancanza dei fattori radiali e per l'assegnazione a $\boldsymbol{n}$ del significato di direzione della quantità di moto.

Per passare direttamente alla rappresentazione degli impulsi occorre calcolare la trasformata di Fourier:

$$\psi(\boldsymbol{p}') = \int \psi(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}}\, d^3x. \qquad (24,11)$$

L'integrazione si esegue ricorrendo alla formula dello sviluppo di un'onda piana in serie di onde sferiche[1]):

$$e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l R_{pl}(r)\, Y^*_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{p}}{p}\right) Y_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \qquad (24,12)$$

Rappresentiamo il fattore $e^{-i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}}$ nella (24,11) sotto forma di una serie di questo tipo e tenendo conto della (24,5), per le componenti di Fourier della funzione

$$\psi(\boldsymbol{r}) = R_{pl}(r)\, \Omega_{jlm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

otteniamo

$$\psi(\boldsymbol{p}') = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p}\, \delta(p'-p)\, i^{-l} Y_{lm'}\left(\frac{\boldsymbol{p}'}{p'}\right) \int \Omega_{jlm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) Y^*_{lm'}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) do.$$

L'integrale in questa espressione è uguale ai coefficienti delle funzioni sferiche nella definizione degli spinori sferici (24,2), e insieme con il fattore $Y_{lm'}(\boldsymbol{p}'/p')$ forma nuovamente il medesimo spinore sferico, ma di argomento $\boldsymbol{p}'/p'$,

$$\psi(\boldsymbol{p}') = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p}\, \delta(p'-p)\, i^{-l} \Omega_{jlm}\left(\frac{\boldsymbol{p}'}{p'}\right).$$

---

[1]) Vedi III (34,3).

Applicando questo risultato alla funzione d'onda bispinoriale (24,10), troviamo questa stessa funzione nella rappresentazione degli impulsi

$$\psi_{pjlm}(\boldsymbol{p}') = \delta(p'-p)\frac{(2\pi)^{3/2}}{p\sqrt{2\varepsilon}}\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon+m}\, i^{-l}\Omega_{jlm}(\boldsymbol{p}'/p') \\ \sqrt{\varepsilon-m}\, i^{-l'}\Omega_{jl'm}(\boldsymbol{p}'/p')\end{pmatrix}. \qquad (24,13)$$

Gli stati $|pjlm\rangle$ coincidono con gli stati $|pjm\,|\,\lambda\,|\rangle$ considerati nel § 16 (dove $|\,\lambda\,| = 1/2$): sia questi che quelli hanno valori di pjm e di parità determinati. Per questo gli spinori sferici Ω_{jlm} sono connessi, in modo determinato, alle funzioni $D^{(j)}_{\lambda m}$ (sia i primi che le seconde dipendono dall'argomento $\boldsymbol{p}/p$). Per $p \to 0$ le funzioni d'onda (24,13) si riducono agli spinori tridimensionali Ω_{jlm}, la cui parità è $P = \eta\,(-1)^l$ (dove $\eta = i$ è la « parità interna » dello spinore). Confrontando con i risultati del § 16, si arriva alla formula seguente:

$$\Omega_{jlm} = i^l\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\,(w^{(-1/2)}D^{(j)}_{-1/2m} \pm w^{(1/2)}D^{(j)}_{1/2m}) \qquad (24,14)$$

(per $l = j \pm 1/2$), dove $w^{(\lambda)}$ sono gli spinori tridimensionali (23,14).

§ 25. *Legame dello spin con la statistica*

La seconda quantizzazione del campo associato a particelle a spin 1/2 (cioè del campo spinoriale) viene eseguita allo stesso modo che per il campo scalare (§ 11).

Senza ripetere di nuovo tutti i ragionamenti, scriviamo direttamente le espressioni per gli operatori del campo, in tutto analoghe alle formule (11,2):

$$\psi = \sum_{p\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(\mathrm{a}_{p\sigma}u_{p\sigma}e^{-ipx} + \mathrm{b}^{+}_{p\sigma}u_{-p-\sigma}e^{ipx}),$$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^{+}\gamma^{0} = \sum_{p\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(\mathrm{a}^{+}_{p\sigma}\bar{u}_{p\sigma}e^{ipx} + \mathrm{b}_{p\sigma}\bar{u}_{-p-\sigma}e^{-ipx}); \qquad (25,1)$$

la somma viene fatta su tutti i valori della quantità di moto $\boldsymbol{p}$ e sui valori della proiezione dello spin $\sigma = \pm 1/2$. Gli operatori di distruzione di antiparticelle $\mathrm{b}_{p\sigma}$ (come anche gli operatori di distruzione di particelle $\mathrm{a}_{p\sigma}$) compaiono sotto forma di coefficienti nelle funzioni, che, per la loro dipendenza orbitale (e^{ipr}), corrispondono ad uno stato di impulso $\boldsymbol{p}$[1]).

Per calcolare l'hamiltoniano del campo spinoriale non è necessaria la definizione del tensore di energia-impulso corrispondente (come

---

[1]) Sia le une che le altre funzioni corrispondono agli stessi valori σ della proiezione dello spin nel sistema di quiete; per le funzioni $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$ questo verrà mostrato nel § 26 (vedi la formula (26,10)).

per il campo scalare), poiché in questo caso esiste l'hamiltoniano di una particella, mediante il quale si può scrivere l'equazione d'onda (equazione di Dirac) (21,12). L'energia media di una particella nello stato con funzione d'onda ψ è l'integrale

$$\int \psi^* H \psi \, d^3x = i \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3x = i \int \bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3x. \qquad (25,2)$$

Notiamo che la « densità d'energia » (l'espressione integranda) non è qui una grandezza definita positiva.

Sostituendo nella (25,2) le funzioni ψ e $\bar{\psi}$ con gli operatori corrispondenti, tenendo conto dell'ortogonalità reciproca delle funzioni d'onda di $\boldsymbol{p}$ o σ differenti, e anche della relazione $\bar{u}_{\pm p\sigma} \gamma^0 u_{\pm p\sigma} = 2\varepsilon$ per le ampiezze d'onda, otteniamo l'hamiltoniano del campo nella forma

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon \, (a^+_{p\sigma} a_{p\sigma} - b_{p\sigma} b^+_{p\sigma}). \qquad (25,3)$$

Da qui è chiaro che, nel caso considerato, la quantizzazione deve essere fatta secondo Fermi:

$$\{a_{p\sigma}, \; a^+_{p\sigma}\}_+ = 1, \quad \{b_{p\sigma}, \; b^+_{p\sigma}\}_+ = 1, \qquad (25,4)$$

e tutte le coppie di operatori a, a^+, b, b^+ anticommutano (vedi III, § 65). Effettivamente, l'hamiltoniano (25,3) si trascrive nella forma

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon \, (a^+_{p\sigma} a_{p\sigma} + b^+_{p\sigma} b_{p\sigma} - 1),$$

e gli autovalori dell'energia (omettendo, come sempre, la costante additiva infinita) sono

$$E = \sum_{p\sigma} \varepsilon \, (N_{p\sigma} + \bar{N}_{p\sigma}), \qquad (25,5)$$

cioè risultano, come doveva essere, quantità definite positive. Nella quantizzazione secondo Bose dalla (25,5) avremmo ottenuto degli autovalori privi di senso non definiti positivi

$$\sum \varepsilon \, (N_{p\sigma} - \bar{N}_{p\sigma}).$$

Un'espressione analoga alla (25,5)

$$P = \sum_{p\sigma} p \, (N_{p\sigma} + \bar{N}_{p\sigma}) \qquad (25,6)$$

si ottiene anche per la quantità di moto del sistema, cioè per gli autovalori dell'operatore $\int \psi^+ \mathbf{p} \psi \, d^3x$.

L'operatore quadridimensionale di corrente è

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \qquad (25,7)$$

e per l'operatore di « carica » del campo, otteniamo

$$Q = \int \bar{\psi}\gamma^0\psi \, d^3x = \sum_{p\sigma} (a^+_{p\sigma}a_{p\sigma} + b_{p\sigma}b^+_{p\sigma}) = \sum_{p\sigma} (a^+_{p\sigma}a_{p\sigma} - b^+_{p\sigma}b_{p\sigma} + 1), \tag{25,8}$$

e i suoi autovalori sono

$$Q = \sum_{p\sigma} (N_{p\sigma} - \bar{N}_{p\sigma}). \tag{25,9}$$

In tal modo, noi torniamo di nuovo alla rappresentazione di particelle e antiparticelle, alle quali si riferisce tutto quanto è stato detto a questo proposito nel § 11.

Tuttavia, mentre le particelle a spin 0 sono bosoni, le particelle a spin 1/2 sono fermioni. Se si investiga l'origine formale di questa differenza, si vedrà che essa sorge in relazione alla differenza nel carattere delle espressioni della « densità d'energia » per il campo scalare e spinoriale. Nel primo caso questa espressione risulta definita positiva, e quindi nell'hamiltoniano (11,3) ambedue i membri (a^+a e bb^+) entrano col segno positivo. Per garantire la positività degli autovalori dell'energia la sostituzione di bb^+ con b^+b deve essere operata senza cambiare il segno, cioè secondo la regola di commutazione di Bose. Nel caso del campo spinoriale, invece, la « densità di energia » non è una quantità definita positiva, e per ottenere che i suoi autovalori siano definiti positivi è necessario operare la sostituzione di bb^+ con b^+b simultaneamente col cambiamento di segno, cioè secondo la regola di commutazione di Fermi.

D'altra parte, la forma della densità d'energia è direttamente legata alle proprietà di trasformazione della funzione d'onda e alla richiesta di invarianza relativistica. In questo senso si può dire che anche il legame dello spin con la statistica, alla quale sottostanno le particelle, è una conseguenza diretta di queste richieste.

Dal fatto che le particelle a spin 1/2 sono fermioni discende anche la seguente affermazione generale: tutte le particelle a spin semintero sono fermioni, e tutte le particelle a spin intero sono bosoni (ivi incluse le particelle a spin 0)[1]. Questo diviene evidente se si nota che una particella a spin s può essere rappresentata come «composta» di $2s$ particelle a spin 1/2. Per s semintero, $2s$ è dispari, e per s intero, $2s$ è pari. Una particella «composta», che contiene un numero pari di fermioni, è un bosone; se contiene invece un numero dispari di fermioni è un fermione[2].

[1]) L'origine del legame tra spin di una particella e statistica, alla quale essa obbedisce, venne per la prima volta chiarita da *Pauli* (1940).

[2]) In questi ragionamenti si sottintende che tutte le particelle a spin uguale devono sottostare alla stessa statistica (indipendentemente dal modo in cui esse vengono « composte »). Da ragionamenti analoghi è facile vedere che le cose stanno esattamente cosí. Se esistessero fermioni a spin 0, con un fermione a spin 0 e un fermione a spin 1/2 si potrebbe comporre una particella a spin 1/2, che sarebbe un bosone, risultato che è in contraddizione col risultato generale dimostrato per lo spin 1/2.

Se il sistema consiste di particelle di tipo diverso, per ognuno dei tipi di particelle devono essere introdotti i propri operatori di creazione e di distruzione. Gli operatori, che si riferiscono a bosoni differenti o a bosoni e fermioni, commutano fra di loro. Per quanto riguarda, invece, gli operatori, che si riferiscono a fermioni differenti, nei limiti della teoria non relativistica potrebbero essere considerati o commutativi o anticommutativi (III, § 65). Nella teoria relativistica, invece, in cui sono possibili mutue trasformazioni tra le particelle, occorre considerare gli operatori di creazione e di distruzione di fermioni differenti come anticommutativi, e lo stesso vale per gli operatori che si riferiscono a stati differenti di fermioni identici.

PROBLEMA

Trovare il lagrangiano del campo spinoriale.

Soluzione. La funzione di Lagrange, corrispondente all'equazione di Dirac, è data dalla seguente espressione scalare reale:

$$L=\frac{i}{2}\,(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-\partial_{\mu}\bar{\psi}\cdot\gamma^{\mu}\psi)-m\bar{\psi}\psi. \tag{1}$$

Intendendo per « coordinate generalizzate » q le componenti di ψ e $\bar{\psi}$ è facile convincersi del fatto che le corrispondenti equazioni di Lagrange (10,10) coincidono con le equazioni di Dirac per $\bar{\psi}$ e ψ. Il segno generale (come anche il coefficiente generale), in questo caso, è convenzionale. Poiché L contiene le derivate rispetto a ψ e $\bar{\psi}$ linearmente, l'azione $S=\int L\,d^4x$ non può avere né minimo, né massimo. La condizione $\delta S=0$ determina, in questo caso, soltanto un punto stazionario, ma non il valore estremale dell'integrale.

Il lagrangiano del campo spinoriale si ricava sostituendo nella (1) ψ con l'operatore ψ. Applicando a questo lagrangiano la formula (12,12), otteniamo l'operatore di corrente (25,7).

§ 26. *Coniugazione di carica e inversione temporale degli spinori*

I fattori $\psi_{p\sigma}=u_{p\sigma}e^{-ipx}$, che compaiono nella (25,1) con gli operatori $a_{p\sigma}$, sono le funzioni d'onda di particelle libere (noi parleremo di elettroni) di impulso $\boldsymbol{p}$ e polarizzazione σ:

$$\psi^{(e)}_{p\sigma}=\psi_{p\sigma}.$$

I fattori $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$ degli operatori $b_{p\sigma}$ sono da considerare come le funzioni d'onda dei positroni con gli stessi $\boldsymbol{p}$ e σ. In questo modo, tuttavia, risulta che le funzioni elettroniche e positroniche sono espresse in rappresentazioni bispinoriali differenti. Questo è chiaro dal fatto che ψ e $\bar{\psi}$ sono differenti per le loro proprietà di trasformazione, e le loro componenti soddisfano sistemi differenti di equazioni. Per eliminare questo difetto occorre operare una determinata trasformazione unitaria delle componenti di $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$, tale che la nuova funzione a quattro componenti soddisfi la stessa equazione cui soddisfa anche

$\psi_{p\sigma}$[1]). Proprio questa nuova funzione sarà chiamata funzione d'onda del positrone (di impulso $\boldsymbol{p}$ e polarizzazione σ). Indichiamo la matrice della trasformazione unitaria richiesta con U_C; abbiamo quindi

$$\psi^{(1)}_{p\sigma} = U_C \bar{\psi}_{-p-\sigma}. \tag{26,1}$$

L'operazione C, mediante la quale questa funzione viene ricavata da $\psi_{-p-\sigma}$, è chiamata *coniugazione di carica* della funzione d'onda (*H. Kramers*, 1937). Questo concetto non è limitato, ovviamente, alla sua applicazione alle onde piane. Per qualsiasi funzione ψ esiste la funzione « coniugata di carica »

$$C\psi(t, \boldsymbol{r}) = U_C \bar{\psi}(t, \boldsymbol{r}), \tag{26,2}$$

che si trasforma come ψ e soddisfa la stessa equazione.

Le proprietà della matrice U_C discendono da questa definizione. Se ψ è la soluzione dell'equazione di Dirac $(\gamma p - m)\psi = 0$, allora $\bar{\psi}$ soddisfa l'equazione

$$\bar{\psi}(\gamma p + m) = 0 \quad \text{oppure} \quad (\tilde{\gamma} p + m)\bar{\psi} = 0.$$

Moltiplicando questa equazione a sinistra per U_C,

$$U_C \tilde{\gamma} p \bar{\psi} + m U_C \bar{\psi} = 0,$$

imponiamo alla funzione $U_C\bar{\psi}$ di soddisfare la stessa equazione di ψ:

$$(\gamma p - m)\, U_C \bar{\psi} = 0.$$

Confrontando le due equazioni, troviamo la seguente « relazione di commutazione » tra U_C e le matrici γ^μ[2]):

$$U_C \tilde{\gamma}^\mu = -\gamma^\mu U_C. \tag{26,3}$$

Nel seguito supporremo che le funzioni d'onda sono date o nella rappresentazione spinoriale o in quella standard (al caso generale di una rappresentazione generica torneremo alla fine del paragrafo). In queste rappresentazioni

$$\gamma^{0,2} = \tilde{\gamma}^{0,2}, \qquad \gamma^{1,3} = -\tilde{\gamma}^{1,3},$$
$$(\gamma^{0,1,3})^* = \gamma^{0,1,3}, \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2. \tag{26,4}$$

Allora la matrice $U_C = \eta_C \gamma^2 \gamma^0$, con una costante η_C arbitraria, soddisfa le condizioni (26,3). Dalla richiesta $C^2 = 1$ discende $|\eta_C|^2 = 1$, e quindi la matrice U_C è determinata a meno di un fattore di

---

[1]) Per particelle a spin 0 questo problema non sorgeva nemmeno, poiché le funzioni scalari ψ e ψ^* soddisfacevano ad una stessa equazione, e ψ^*_{-p} coincideva semplicemente con ψ_p.

[2]) Notiamo anche l'uguaglianza, che discende da questa relazione

$$U_C \tilde{\gamma}^5 = \gamma^5 U_C. \tag{26,3a}$$

fase. Nel seguito sceglieremo $\eta_C = 1$, cosí che

$$U_C = \gamma^2\gamma^0 = -\alpha_y. \tag{26,5}$$

Notando anche che $\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0\psi^* = \gamma^0\psi^*$, l'azione dell'operatore C si può scrivere nella forma seguente:

$$C\psi = \gamma^2\gamma^0\bar{\psi} = \gamma^2\psi^*. \tag{26,6}$$

In forma esplicita la trasformazione (26,6) per la rappresentazione spinoriale si scrive

$$C: \quad \xi^\alpha \to -i\eta^{\dot{\alpha}*}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \to -i\xi^*_\alpha, \tag{26,7a}$$

oppure

$$C: \quad \xi_\alpha \to -i\eta^*_{\dot{\alpha}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} \to -i\xi^{\alpha*}. \tag{26,7b}$$

La trasformazione di coniugazione di carica per le onde piane $\psi_{\pm p\sigma}$ è facile da effettuare usando le rispettive espressioni esplicite (23,9) e la matrice U_C in rappresentazione standard:

$$U_C = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}. \tag{26,8}$$

Notando che

$$\sigma_y\sigma^* = -\sigma\sigma_y,$$

definendo $w^{(\sigma)'}$ secondo la (23,16), otteniamo

$$U_C\bar{u}_{-p-\sigma} = u_{p\sigma}, \qquad U_C u_{-p-\sigma} = \bar{u}_{p\sigma}. \tag{26,9}$$

In tal modo

$$C\psi_{-p-\sigma} = \psi_{p\sigma}, \tag{26,10}$$

e quindi le funzioni $\psi_{-p-\sigma}$, che figurano negli operatori ψ (25,1) insieme con gli operatori $b_{p\sigma}$, corrispondono effettivamente agli stati di una particella di impulso p e polarizzazione σ. Noi vediamo che gli stati elettronici e positronici sono descritti dalle stesse funzioni

$$\psi^{(e)}_{p\sigma} = \psi^{(p)}_{p\sigma} = \psi_{p\sigma}.$$

Questo è del tutto naturale, poiché le funzioni $\psi_{p\sigma}$ contengono informazioni solo sulla quantità di moto e sulla polarizzazione della particella.

In modo analogo si può considerare l'operazione di inversione del tempo. Il cambiamento del segno del tempo deve essere accompagnato dalla coniugazione complessa della funzione. Quindi, peottenere la funzione d'onda « invertita nel tempo » ($T\psi$) nella stessa rappresentazione della funzione originaria ψ occorre operare sulle componenti di ψ^* (o di $\bar{\psi}$) ancora una trasformazione unitaria. In tal modo, analogamente alla (26,2), rappresentiamo l'azione dell'ope-

ratore T su ψ nella forma

$$T\psi(t, \boldsymbol{r}) = U_T\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}), \tag{26,11}$$

dove U_T è una matrice unitaria.

Scriviamo nuovamente l'equazione di Dirac, cui soddisfa ψ,

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - m\right)\psi(t, \boldsymbol{r}) = 0,$$

e l'equazione per $\bar{\psi}$:

$$\left(i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\nabla + m\right)\bar{\psi}(t, \boldsymbol{r}) = 0.$$

Operiamo in quest'ultima la sostituzione $t \to -t$ e moltiplichiamo a sinistra per $-U_T$:

$$\left(iU_T\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} - iU_T\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\nabla\right)\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) - mU_T\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) = 0.$$

Noi vogliamo che la funzione $U_T\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r})$ soddisfi la stessa equazione di $\psi(t, \boldsymbol{r})$,

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\nabla\right)U_T\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) - mU_T\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) = 0.$$

Confrontando le due equazioni troviamo che la matrice U_T deve soddisfare alle condizioni

$$U_T\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 U_T, \quad U_T\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = -\boldsymbol{\gamma}U_T. \tag{26,12}$$

In rappresentazione spinoriale o standard a queste condizioni soddisfa la matrice[1])

$$U_T = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0. \tag{26,13}$$

Quindi, l'azione dell'operatore T è data dalla formula

$$T\psi(t, \boldsymbol{r}) = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) = i\gamma^3\gamma^1\psi^*(-t, \boldsymbol{r}). \tag{26,14}$$

In forma esplicita questa trasformazione per la rappresentazione spinoriale è data dalle formule

$$T: \quad \xi^\alpha \to -i\xi^*_{\dot{\alpha}}, \qquad \eta_{\dot{\alpha}} \to i\eta^{\dot{\alpha}*}, \tag{26,15a}$$

oppure

$$T: \quad \xi_\alpha \to i\xi^{\alpha*}, \qquad \eta^{\dot{\alpha}} \to -i\eta^*_{\dot{\alpha}}. \tag{26,15b}$$

Nella rappresentazione standard

$$U_T = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix}. \tag{26,16}$$

---

[1]) La scelta del fattore di fase nella (26,13) è legato alla scelta nella (26,5) da considerazioni esposte nella nota a pag. 126.

Troviamo il risultato dell'applicazione a ψ di tutti e tre gli operatori P, T e C. A questo scopo scriviamo successivamente

$$T\psi(t, \boldsymbol{r}) = -i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \boldsymbol{r}),$$
$$PT\psi(t, \boldsymbol{r}) = i\gamma^0(T\psi) = \gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, -\boldsymbol{r}),$$
$$CPT\psi(t, \boldsymbol{r}) = \gamma^2(\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*)^* = \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(-t, -\boldsymbol{r}),$$

oppure

$$CPT\psi(t, \boldsymbol{r}) = i\gamma^5\psi(-t, -\boldsymbol{r}). \tag{26,17}$$

In rappresentazione spinoriale

$$CPT: \quad \xi^\alpha \to -i\xi^\alpha, \quad \eta_{\dot\alpha} \to i\eta_{\dot\alpha} \tag{26,18}$$

(come è facile verificare anche direttamente usando le regole di trasformazione (20,4), (26,7), (26,15))[1].

Le espressioni scritte prima per le matrici U_C e U_T presupponevano la rappresentazione spinoriale o standard di ψ. Chiariamo, ora, quali delle proprietà di queste espressioni si mantengono per una rappresentazione generica.

Se si sottopone ψ ad una trasformazione unitaria

$$\psi' = U\psi, \quad \gamma' = U\gamma U^{-1}, \quad \bar\psi' = \psi'^*\gamma^{0\prime} = \bar\psi U^+ = \bar\psi U^{-1}, \tag{26,19}$$

nella nuova rappresentazione avremo

$$(C\psi)' = U(C\psi) = UU_C\bar\psi = UU_C(\bar\psi' U) = UU_C\tilde U\bar\psi'.$$

Da un confronto con la definizione della matrice U'_C nella nuova rappresentazione ($(C\psi)' = U'_C\bar\psi'$), troviamo

$$U'_C = UU_C\tilde U. \tag{26,20}$$

La trasformazione (26,20) coincide con la trasformazione delle matrici solo nel caso di U reali. Quindi, anche l'espressione (26,5) vale solo nelle rappresentazioni che si ottengono dalle rappresentazioni spinoriali o standard con una trasformazione reale.

La matrice (26,5) è unitaria, e la trasposizione ne cambia il segno

$$U_C U_C^+ = 1, \quad \tilde U_C = -U_C. \tag{26,21}$$

Queste proprietà sono invarianti rispetto alle trasformazioni (26,20) e quindi hanno luogo in qualsiasi rappresentazione. La matrice (26,5) è anche hermitiana ($U_C = U_C^+$), ma questa proprietà, nel caso generale, viene a mancare con la trasformazione (26,20).

---

[1]) La scrittura CPT presuppone che gli operatori agiscano in ordine da destra a sinistra. Il segno generale nelle (26,17-18) dipende da questo ordine, poiché C, P e T (applicati ad un bispinore) non commutano tra loro.

Quanto è stato detto (ivi inclusa la relazione (26,21)) si riferisce anche alle proprietà della matrice U_T.

Nell'apparato di seconda quantizzazione le trasformazioni C, P, T per gli operatori ψ devono essere formulate come regole di trasformazione degli operatori di creazione e di distruzione. Queste regole si possono stabilire (analogamente a come è stato fatto nel § 13 per le particelle a spin 0), partendo dalla richiesta che gli operatori ψ trasformati possano essere rappresentati nella forma

$$\begin{aligned} \psi^C(t, \boldsymbol{r}) &= U_C\overline{\psi}(t, \boldsymbol{r}), \\ \psi^P(t, \boldsymbol{r}) &= i\gamma^0\psi(t, -\boldsymbol{r}), \\ \psi^T(t, \boldsymbol{r}) &= U_T\overline{\psi}(-t, \boldsymbol{r}). \end{aligned} \tag{26,22}$$

I calcoli mediante le formule ricavate mostrano che le condizioni poste vengono soddisfatte dalle trasformazioni

$$\begin{aligned} a^C_{p\sigma} &= b_{p\sigma}, & b^C_{p\sigma} &= a_{p\sigma}; \\ a^P_{-p\sigma} &= ia_{p\sigma}, & b^P_{-p\sigma} &= ib_{p\sigma}; \\ a^T_{-p-\sigma} &= 2\sigma i a^+_{p\sigma}, & b^T_{-p-\sigma} &= 2\sigma i b^+_{p\sigma}. \end{aligned} \tag{26,23}$$

PROBLEMA

Trovare l'operatore di coniugazione di carica nella rappresentazione di Majorana (vedi problema 2 § 21).

Soluzione. La matrice U_C' nella rappresentazione di Majorana si ottiene dalla matrice $U_C = -\alpha_y$ in rappresentazione standard con la trasformazione (26,20), dove $U = (\alpha_y + \beta)/\sqrt{2}$ ed è uguale a $U_C' = \alpha_y$ (α_y e β indicano matrici della rappresentazione standard). Denotando con un apice le grandezze nella rappresentazione di Majorana, abbiamo $C\psi' = U_C'(\psi'^*\beta')$, e poiché $\beta' = \alpha_y$, si avrà

$$C\psi' = \alpha_y(\psi'^*\alpha_y) = \alpha_y\tilde{\alpha}_y\psi'^* = \psi'^*,$$

cioè la coniugazione di carica è equivalente alla coniugazione complessa.

§ 27. *Simmetria intrinseca di particelle e antiparticelle*

La funzione d'onda di una particella a spin 1/2 nel suo sistema di quiete si riduce ad un solo spinore tridimensionale (che indicheremo con Φ^α). Al comportamento di questo spinore, per l'inversione spaziale, è legato il concetto di parità intrinseca della particella. Tuttavia (come è già stato notato nel § 19), sebbene le due leggi possibili di trasformazione degli spinori tridimensionali ($\Phi^\alpha \to \pm i\Phi^\alpha$) non siano tra loro equivalenti, l'assegnazione ad uno spinore di una parità determinata non ha senso in assoluto. Non ha quindi senso parlare di parità intrinseca di una particella a spin 1/2. Si può, tuttavia, parlare di parità intrinseca relativa di due particelle a spin 1/2.

Con due spinori (tridimensionali) $\Phi^{(1)}$ e $\Phi^{(2)}$ si può comporre lo scalare $\Phi^{(1)}_\alpha \Phi^{(2)\alpha}$. Se questo è un vero scalare, si dice allora che le particelle, descritte dagli spinori considerati, hanno la stessa parità; se invece si tratta di uno pseudoscalare, si parla di parità intrinseca opposta delle due particelle.

Mostriamo che le parità intrinseche di una particella e della rispettiva antiparticella (a spin 1/2) sono di segno opposto (*V. B. Berestetskij*, 1948).

Per fare questo, notiamo che se ad ambedue i membri della trasformazione P (19,5) (in rappresentazione spinoriale)

$$\mathrm{P}: \qquad \xi^\alpha \to i\eta_{\dot\alpha}, \quad \eta_{\dot\alpha} \to i\xi^\alpha \tag{27,1}$$

si applica l'operazione C (26,7), si ottiene

$$\eta^{c\dot\alpha *} \to i\xi^{c*}_\alpha, \quad \xi^{c*}_\alpha \to i\eta^{c\dot\alpha *},$$

dove con l'indice c sono indicate le componenti del bispinore $\psi^{(c)} = \begin{pmatrix} \xi^c \\ \eta^c \end{pmatrix}$, coniugato di carica del bispinore $\psi = \binom{\xi}{\eta}$. Operando la coniugazione complessa e spostando gli indici, troviamo

$$\mathrm{P}: \qquad \eta^c_{\dot\alpha} \to i\xi^{c\alpha}, \quad \xi^{c\alpha} \to i\eta^c_{\dot\alpha}. \tag{27,2}$$

Vediamo che i bispinori coniugati di carica si trasformano, per l'inversione spaziale, secondo la stessa legge.

Sia $\psi^{(e)}$ la funzione d'onda della particella (elettrone) e $\psi^{(p)}$ la funzione d'onda dell'antiparticella (positrone). Quest'ultima è un bispinore coniugato di carica di una soluzione a « frequenza negativa » dell'equazione di Dirac. Nel sistema in quiete ognuna di queste funzioni si riduce ad un certo spinore tridimensionale

$$\xi^{(e)\alpha} = \eta^{(e)}_{\dot\alpha} = \Phi^{(e)\alpha}, \quad \xi^{(p)\alpha} = \eta^{(p)}_{\dot\alpha} = \Phi^{(p)\alpha}.$$

Secondo le (27,1-2) questi spinori si trasformano, per l'inversione spaziale, secondo la legge

$$\Phi^{(\alpha)} \to i\Phi^{(\alpha)}, \tag{27,3}$$

uguale per $\Phi^{(e)}$ e per $\Phi^{(p)}$. Il prodotto $\Phi^{(e)}\Phi^{(p)}$ cambia segno, cosa che dimostra l'affermazione fatta.

Nel formalismo di seconda quantizzazione l'opposta parità intrinseca di particella e antiparticella si manifesta nel cambiamento di segno per l'inversione dei prodotti di operatori: $a_{p\sigma}b_{p\sigma} \to -a_{p\sigma}b_{p\sigma}$ (vedi la (26,23)).

Particella realmente neutra è chiamata quella particella che « coincide » con la propria antiparticella (§ 12). L'operatore ψ del campo di tali particelle soddisfa la condizione

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = \psi^C(t, \boldsymbol{r}).$$

Per particelle a spin 1/2 questo equivale alla condizione (in rappresentazione spinoriale)

$$\xi^{\alpha} = -i\eta^{\dot{\alpha}+}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} = -i\xi^{+}_{\alpha}. \tag{27,4}$$

Come ogni relazione, che esprime delle proprietà fisiche, queste condizioni sono invarianti rispetto alla trasformazione CPT[1]). È facile verificare che, di fatto, esse sono invarianti non solo rispetto all'operazione CPT, ma anche rispetto a ciascuna delle tre trasformazioni separatamente.

Nel § 19 ci siamo accordati di definire l'inversione spaziale degli spinori come una trasformazione per la quale $P^2 = -1$, e finora ci siamo attenuti a questa definizione. È facile vedere che il risultato, ottenuto prima, circa la parità relativa di particelle e antiparticelle non dipende, come è logico, da come si definisce l'inversione.

Se l'inversione spaziale è definita dalla condizione $P^2 = 1$, invece della (27,1) si avrà

$$P: \quad \xi^{\alpha} \to \eta_{\dot{\alpha}}, \ \eta_{\dot{\alpha}} \to \xi^{\alpha}. \tag{27,5}$$

La funzione coniugata di carica si trasformerà secondo la legge

$$\xi^{c\alpha} \to -\eta^{c}_{\dot{\alpha}}, \quad \eta^{c}_{\dot{\alpha}} \to -\xi^{c\alpha},$$

che si differenzia dalla (27,5) per il segno. Corrispondentemente a questo, gli spinori tridimensionali Φ si trasformeranno secondo

$$\Phi^{(e)\alpha} \to \Phi^{(e)\alpha}, \quad \Phi^{(p)\alpha} \to -\Phi^{(p)\alpha},$$

cosí che il prodotto $\Phi^{(e)}\Phi^{(p)}$ sarà, come prima, uno pseudoscalare.

La sola differenza possibile nelle conseguenze fisiche delle due concezioni dell'inversione spaziale consiste nel fatto che per la definizione (27,5) la condizione di neutralità vera del campo non è invariante rispetto a questa trasformazione (o alla trasformazione CP): essa cambia il segno relativo di ambedue i membri dell'uguaglianza (27,4). Di fatto, non si conoscono particelle neutre a spin 1/2, e al presente non si può dire se la differenza esistente tra le due definizioni di inversione spaziale abbia o meno un senso fisico[2]).

PROBLEMA

Trovare la parità di carica del positronio (sistema idrogenoiforme costituito da un elettrone e da un positrone).

---

[1]) Piú precisamente, la trasformazione CPT deve essere definita, in questo caso, in modo da lasciare invarianti le relazioni del tipo (27,4). Questo viene realizzato mediante una scelta opportuna del fattore di fase nella definizione della matrice U_T (vedi nota a pag. 122).

[2]) La non completa equivalenza delle due definizioni di inversione spaziale fu notata da *G. Racah* (1937).

Soluzione. La funzione d'onda di un sistema di due fermioni deve essere antisimmetrica rispetto allo scambio simultaneo delle coordinate, degli spin e delle variabili di carica delle particelle (vedi problema al § 13). Lo scambio delle coordinate moltiplica la funzione per $(-1)^l$, degli spin per $(-1)^{1+S}$ (dove $S=0$ oppure 1 è lo spin totale del sistema), delle variabili di carica per il fattore cercato C. Dalla condizione che $(-1)^l(-1)^{1+S}\,C = -1$, troviamo

$$C=(-1)^{l+S}.$$

Poiché le parità intrinseche dell'elettrone e del positrone sono di segno opposto, la parità spaziale del sistema è $P=(-1)^{l+1}$. La parità combinata, $CP=(-1)^{S+1}$

§ 28. *Forme bilineari*

Consideriamo le proprietà di trasformazione delle diverse forme bilineari, che si possono comporre con le componenti delle funzioni ψ e ψ^*. Queste forme hanno, in generale, una grande importanza nella meccanica quantistica; tra queste c'è anche il quadrivettore densità di corrente (21,11).

Poiché ψ e ψ^* hanno quattro componenti ciascuna, si possono formare $4\cdot 4 = 16$ combinazioni bilineari indipendenti. La classificazione di queste grandezze secondo le loro proprietà di trasformazione è, a priori, evidente dai modi, elencati nel § 19, in cui si possono moltiplicare due bispinori generici (che, nel caso considerato, sono ψ e ψ^*). Precisamente, si possono formare: uno scalare (che indicheremo con S), uno pseudoscalare (P), uno spinore misto di rango 2, equivalente ad un vero quadrivettore V^μ (4 grandezze indipendenti), uno spinore misto di rango 2, equivalente ad un 4-pseudovettore A^μ (4 grandezze), un bispinore di rango 2, equivalente ad un quadritensore antisimmetrico $T^{\mu\nu}$ (6 grandezze).

In forma simmetrica (per una rappresentazione generica di ψ) queste combinazioni si scrivono come segue:

$$S=\bar\psi\psi, \quad P=i\bar\psi\gamma^5\psi,$$

$$V^\mu=\bar\psi\gamma^\mu\psi, \quad A^\mu=\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad T^{\mu\nu}=i\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi, \tag{28,1}$$

dove

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)=(\boldsymbol{\alpha},\ i\boldsymbol{\Sigma}) \tag{28,2}$$

(l'elencazione delle componenti nella (28,2) è fatta secondo la regola (19,15))[1]. Tutte le espressioni scritte sono reali.

La scalarità o pseudoscalarità delle grandezze S e P è evidente dalle rispettive espressioni in rappresentazione spinoriale

$$S=\xi^*\eta+\eta^*\xi, \quad P=i\,(\xi^*\eta-\eta^*\xi),$$

---

[1]) Per una trasformazione unitaria di ψ (cioè per un cambiamento di rappresentazione) abbiamo $\psi\to U\psi$, $\gamma\to U\gamma U^{-1}$, $\bar\psi\to\bar\psi U^{-1}$, e l'invarianza delle forme bilineari per tali trasformazioni è evidente.

che corrispondono appunto alle espressioni (19,7) e (19,8). Il carattere vettoriale delle grandezze V^μ diventa quindi evidente dall'equazione di Dirac: moltiplicando l'uguaglianza $p_\mu\gamma^\mu\psi = m\psi$ a sinistra per $\bar{\psi}$, otteniamo

$$(\bar{\psi}p_\mu\gamma^\mu\psi) = m\bar{\psi}\psi;$$

poiché a destra c'è uno scalare, anche nella parte sinistra ci deve essere uno scalare.

La regola di composizione delle grandezze (28,1) è evidente: esse vengono composte considerando le matrici γ^μ come dei quadrivettori, γ^5 come uno pseudoscalare, e tenendo presente che le funzioni $\bar{\psi}$ e ψ, che stanno da ambedue i lati, formano insieme uno scalare[1]). La mancanza di forme bilineari, che abbiano carattere di quadritensore simmetrico, evidente dalla rappresentazione spinoriale, risulta anche dalla regola seguente: poiché la forma simmetrica delle matrici γ è data dalla relazione $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, una tale forma si ridurrebbe ad uno scalare.

Forme lineari doppiamente quantizzate si ottengono sostituendo nella (28,1) le funzioni ψ con gli operatori relativi. Per una maggiore generalità, considereremo che due operatori ψ si riferiscano a campi di particelle diverse; le distingueremo con gli indici a e b. Chiariamo come si trasformano tali forme operatoriali per la coniugazione di carica. Notando che[2])

$$\psi^C = U_C\bar{\psi}, \quad \bar{\psi}^C = U_C^+\psi, \tag{28,3}$$

usando la (26,3) e la (26,21), abbiamo

$$\bar{\psi}_a^C\psi_b^C = (U_C^+\psi_a)(U_C\bar{\psi}_b) = \psi_a U_C^* U_C\bar{\psi}_b =$$
$$= -\psi_a U_C^+ U_C\bar{\psi}_b = -\psi_a\bar{\psi}_b,$$
$$\bar{\psi}_a^C\gamma^\mu\psi_b^C = \psi_a U_C^*\gamma^\mu U_C\bar{\psi}_b = -\psi_a U_C^+\gamma^\mu U_C\bar{\psi}_b = \psi_a\tilde{\gamma}^\mu\bar{\psi}_b.$$

Portando gli operatori nell'ordine di partenza ($\bar{\psi}$ a sinistra di ψ), in virtú delle regole di commutazione di Fermi (25,4), il segno del prodotto si cambierà (e inoltre compariranno termini che non dipendono dallo stato del campo, e che noi omettiamo come è già stato fatto in deduzioni analoghe nel § 13). In tal modo, otteniamo

$$\bar{\psi}_a^C\psi_b^C = \bar{\psi}_b\psi_a, \quad \bar{\psi}_a^C\gamma^\mu\psi_b^C = -\bar{\psi}_b\gamma^\mu\psi_a.$$

---

[1]) La « pseudoscalarità » di γ^5 corrisponde essa stessa a queste regole, poiché

$$\gamma^5 = \frac{i}{24}\, e_{\lambda\mu\nu\rho}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho.$$

[2]) Per ottenere la seconda uguaglianza dalla prima scriviamo

$$\bar{\psi}^C = [U_C^*(\psi\gamma^{0*})]\,\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0 U_C^*\gamma^0\psi = -\tilde{\gamma}^0 U_C^+\gamma^0\psi = \tilde{\gamma}^0\gamma^{0*}U_C^+\psi = U_C^+\psi$$

(si sfrutta il fatto che γ^0 è hermitiana e si usano la (26,3) e la (26,21).

Trasformando in modo analogo anche le altre forme, troveremo che per la coniugazione di carica [1])

$$\text{C:} \qquad S_{ab} \to S_{ba}, \quad P_{ab} \to P_{ba}, \quad V^{\mu}_{ab} \to -V^{\mu}_{ba},$$
$$A^{\mu}_{ab} \to A^{\mu}_{ba}, \quad T^{\mu\nu}_{ab} \to -T^{\mu\nu}_{ba}. \tag{28,4}$$

In maniera simile si può chiarire il comportamento di queste forme per l'inversione del tempo. Nel fare questo, occorre ricordare (vedi § 13) che questa operazione è legata con l'inversione dell'ordine degli operatori, e quindi, ad esempio,

$$(\bar{\psi}_a \psi_b)^T = \psi_b^T \bar{\psi}_a^T.$$

Sostituendo qui la funzione trasposta

$$\psi^T = U_T \bar{\psi}, \quad \bar{\psi}^T = -U_T^{+} \psi, \tag{28,5}$$

otteniamo

$$(\psi_a \psi_b)^T = -(U_T \bar{\psi}_b)(U_T^{+} \psi_a) =$$
$$= -\bar{\psi}_b \tilde{U}_T U_T^{+} \psi_a = \bar{\psi}_b U_T U_T^{+} \psi_a = \bar{\psi}_b \psi_a.$$

Operando allo stesso modo per le altre forme, otteniamo

$$\text{T:} \quad \begin{aligned} &S_{ab} \to S_{ba}, \quad P_{ab} \to -P_{ba}, \quad (V^0, \mathbf{V})_{ab} \to (V^0, -\mathbf{V})_{ba}, \\ &(A^0, \mathbf{A})_{ab} \to (A^0, -\mathbf{A})_{ba}, \quad T^{\mu\nu}_{ab} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})_{ab} \to (\mathbf{p}, -\mathbf{a})_{ba} \end{aligned} \tag{28,6}$$

($\mathbf{p}$, $\mathbf{a}$ sono vettori tridimensionali, equivalenti alle componenti di $T^{\mu\nu}$ secondo la (19,15)).

Per l'inversione spaziale, corrispondentemente al carattere vettoriale delle grandezze, si ha

$$\text{P:} \quad \begin{aligned} &S_{ab} \to S_{ab}, \quad P_{ab} \to -P_{ab}, \quad (V^0, \mathbf{V})_{ab} \to (V^0, -\mathbf{V})_{ab}, \\ &(A^0, \mathbf{A})_{ab} \to (-A^0, \mathbf{A})_{ab}, \quad T^{\mu\nu}_{ab} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})_{ab} \to (-\mathbf{p}, \mathbf{a})_{ab}. \end{aligned} \tag{28,7}$$

Infine, l'applicazione simultanea di tutte e tre le operazioni dà[2])

$$\begin{aligned} &\text{CPT:} \quad S_{ab} \to S_{ab}, \quad P_{ab} \to P_{ab}, \\ &V^{\mu}_{ab} \to -V^{\mu}_{ab}, \quad A^{\mu}_{ab} \to -A^{\mu}_{ab}, \quad T^{\mu\nu}_{ab} \to T^{\mu\nu}_{ab}, \end{aligned} \tag{28,8}$$

---

[1]) Notiamo che per le forme bilineari, composte da funzioni ψ (e non da operatori ψ), le trasformazioni (28,4) avrebbero il segno opposto, poiché il ritorno all'ordine di partenza dei fattori $\bar{\psi}$ e ψ non sarebbe accompagnato da un cambiamento di segno.

[2]) Per evitare equivoci, ricordiamo che le trasformazioni P e T richiedono anche un cambiamento degli argomenti delle funzioni; le parti destre (le forme trasformate) nelle (22,6-8) sono funzioni rispettivamente degli argomenti

$$x^T = (-t, \mathbf{r}), \quad x^P = (t, -\mathbf{r}), \quad x^{CPT} = (-t, -\mathbf{r}),$$

se le parti sinistre sono funzioni di $x = (t, \mathbf{r})$.

che corrisponde appunto al senso di questa trasformazione e cioè di una 4-inversione: poiché la 4-inversione è equivalente ad una rotazione del 4-sistema di coordinate, rispetto ad essa non c'è differenza tra tensori veri e pseudotensori di rango qualsiasi.

Consideriamo i prodotti di coppie di forme bilineari composte da quattro diverse funzioni ψ^a, ψ^b, ψ^c, ψ^d. Noi otterremo un risultato diverso a seconda di quali coppie di queste funzioni vengono moltiplicate tra loro. Risulta, tuttavia, possibile ridurre ogni prodotto di questo tipo a prodotti di forme bilineari con delle coppie fissate di fattori (*W. Pauli*, *M. Fierz*, 1936). Deduciamo la relazione, che sta alla base di questa riduzione.

Consideriamo l'insieme di matrici a quattro righe

$$1, \qquad \gamma^5, \ \gamma^\mu, \ i\gamma^\mu\gamma^5, \ i\sigma^{\mu\nu} \tag{28,9}$$

(1 è la matrice unità). Numeriamo queste 16 (= 1 + 1 + 4 + 4 + 6) matrici in una successione determinata e denotiamole mediante γ^A ($A = 1, \ldots, 16$), mentre le stesse matrici, ma con gli indici quadritensoriali (μ, ν) in basso, le indicheremo con γ_A. Queste matrici godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{gathered} \operatorname{Tr}\gamma^A = 0 \quad (\gamma^A \neq 1), \\ \gamma^A\gamma_A = 1, \quad \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\gamma^A\gamma_B = \delta^A_B. \end{gathered} \tag{28,10}$$

In virtú dell'ultima di queste proprietà le matrici γ^A sono linearmente indipendenti. Poiché il loro numero è uguale al numero $(4\cdot 4)$ degli elementi di una matrice quadrata a quattro righe, le matrici γ^A formano un sistema completo, secondo il quale può essere scomposta qualsiasi matrice a quattro righe Γ:

$$\Gamma = \sum_A c_A\gamma^A, \quad c_A = \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\gamma_A\Gamma, \tag{28,11}$$

o in forma esplicita usando gli indici matriciali (i, $k = 1, 2, 3, 4$):

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{4}\sum_A \Gamma_{lm}\gamma^A_{ml}\gamma_{Aik}.$$

Supponendo, in particolare, che la matrice Γ contenga un solo elemento non nullo (Γ_{lm}), otteniamo la relazione cercata (« condizione di completezza »)

$$\delta_{il}\delta_{km} = \frac{1}{4}\sum_A \gamma_{Aik}\gamma^A_{ml}. \tag{28,12}$$

Moltiplicando questa uguaglianza da ambedue le parti per $\bar\psi^a_i\psi^b_k\bar\psi^c_m\psi^d_l$, otteniamo

$$(\bar\psi^a\psi^d)(\bar\psi^c\psi^b) = \frac{1}{4}\sum_A (\bar\psi^a\gamma_A\psi^b)(\bar\psi^c\gamma^A\psi^d). \tag{28,13}$$

Questa è una delle uguaglianze del tipo detto sopra: essa riduce il prodotto di due forme bilineari scalari a prodotti di forme, composte da altre coppie di fattori[1]).

Altre uguaglianze di questo tipo si possono ottenere dalla (28,13), facendo la sostituzione

$$\psi^d \to \gamma^B \psi^d, \quad \psi^b \to \gamma^C \psi^b$$

e ricorrendo allo sviluppo

$$\gamma^A \gamma^B = \sum_R c_R \gamma^R, \qquad c_R = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \gamma^A \gamma^B \gamma_R$$

(vedi i problemi).

Riportiamo qui, per successivi riferimenti, anche la relazione analoga della (28,12) per le matrici a due righe. Il sistema completo di matrici linearmente indipendenti σ^A ($A = 1, 2, 3, 4$) è formato dalle matrici

$$1, \ \sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z. \tag{28,14}$$

Per esse

$$\operatorname{Tr} \sigma^A = 0 \quad (\sigma^A \neq 1), \tag{28,15}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \sigma^A \sigma^B = \delta_{AB}.$$

La condizione di completezza

$$\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} = \frac{1}{2} \sum_A \sigma^A_{\alpha\beta} \sigma^A_{\delta\gamma} = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\delta\gamma} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma} \tag{28,16}$$

($\alpha, \beta, \ldots = 1, 2$) oppure, in altra forma

$$\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\delta\gamma} = -\frac{1}{2} \sigma_{\alpha\gamma} \sigma_{\delta\beta} + \frac{3}{2} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\delta\beta}. \tag{28,17}$$

PROBLEMI

1. Dedurre le formule, analoghe alla (28,13), per prodotti scalari di due forme P, V, A, T.

Soluzione. Introduciamo le notazioni seguenti:

$$J_S = (\bar{\psi}^a \psi^b)(\bar{\psi}^c \psi^d), \qquad J_P = (\bar{\psi}^a \gamma^5 \psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma^5 \psi^d),$$

$$J_V = (\bar{\psi}^a \gamma^\mu \psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi^d), \quad J_A = (\bar{\psi}^a i \gamma^\mu \gamma^5 \psi^b)(\bar{\psi}^c i \gamma_\mu \gamma^5 \psi^d),$$

$$J_T = (\bar{\psi}^a i \sigma^{\mu\nu} \psi^b)(\bar{\psi}^c i \sigma_{\mu\nu} \psi^d),$$

mentre mediante le stesse lettere munite di apice indichiamo quegli stessi prodotti, ma con le funzioni ψ^b e ψ^d scambiate di posto. Con il metodo esposto nel

---

[1]) Al fine di evitare equivoci, ricordiamo che qui si parla di forme composte da funzioni ψ. Per forme, composte da operatori ψ anticommutativi, il segno della trasformazione sarebbe opposto.

testo troviamo

$$
\begin{aligned}
4J'_S &= J_S + J_V + J_T + J_A + J_P, \\
4J'_V &= 4J_S - 2J_V \qquad\quad + 2J_A - 4J_P, \\
4J'_T &= 6J_S \qquad\quad - 2J_T \qquad\quad + 6J_P, \\
4J'_A &= 4J_S + 2J_V \qquad\quad - 2S_A - 4J_P, \\
4J'_P &= J_S - J_V + J_T - J_A + J_P
\end{aligned}
$$

(la prima riga corrisponde alla (28,13)).

2. Mostrare che

$$J^{ab,\,cd} = -J^{ad,\,cb},$$

dove

$$J^{ab,\,cd} = (\bar{\psi}^a \gamma^\mu (1+\gamma^5)\psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma_\mu (1+\gamma^5)\psi^d).$$

Soluzione. Le grandezze considerate J sono scalari rispetto a rotazioni quadridimensionali, ma non hanno una parità determinata rispetto all'inversione. L'uguaglianza cercata è piú facile da ottenere usando la rappresentazione spinoriale. Notando che

$$\gamma^\mu (1+\gamma^5) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^\mu (1+\gamma^5)$$

e

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\cdot\alpha} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\psi(1-\gamma^5) = \begin{pmatrix} \eta^*_{\cdot\alpha} \\ 0 \end{pmatrix},$$

noi vediamo che lo « scalare » $J^{ab,\,cd}$ deve essere espresso mediante gli spinori di rango 2

$$\zeta^{(ab)}_{\alpha\dot{\beta}} = \eta^{a*}_{\cdot\alpha}\eta^{b}_{\cdot\dot{\beta}}, \quad \zeta^{(cd)}_{\alpha\dot{\beta}} = \eta^{c*}_{\cdot\alpha}\eta^{d}_{\cdot\dot{\beta}}$$

e quindi deve avere la forma

$$J^{ab,\,cd} \sim \zeta^{(ab)}_{\alpha\dot{\beta}}\zeta^{(cd)\alpha\dot{\beta}} = \eta^{a*}_{\cdot\alpha}\eta^{c\alpha*}\eta^{b}_{\cdot\dot{\beta}}\eta^{d\dot{\beta}}.$$

Scambiando gli indici b e d, notando inoltre che

$$\eta^{b}_{\cdot\dot{\beta}}\eta^{d\dot{\beta}} = -\eta^{b\dot{\beta}}\eta^{d}_{\cdot\dot{\beta}},$$

otteniamo il risultato cercato.

§ 29. *Matrice densità di polarizzazione*

La dipendenza dalle coordinate della funzione d'onda ψ, che descrive il moto libero di una particella di impulso p (onda piana), si riduce al fattore generale e^{ipr}, mentre l'ampiezza u_p svolge il ruolo di funzione d'onda di spin. In questo stato (puro), la particella è completamente polarizzata (vedi III, § 59). Nella teoria non relativistica questo significa che lo spin della particella ha direzione determinata nello spazio (piú precisamente, che esiste una direzione, lungo la quale la proiezione dello spin ha un valore determinato

$+1/2$). Nella teoria relativistica questa caratteristica dello stato in un sistema di riferimento generico è impossibile a causa della non conservazione (notata già nel § 23) del vettore spin. La purezza dello stato significa soltanto che lo spin ha una direzione determinata nel sistema di quiete della particella.

In uno stato di polarizzazione parziale non esiste un'ampiezza determinata, ma solo la *matrice densità di polarizzazione* ρ_{ik} (i, k = = 1, 2, 3, 4 sono indici bispinoriali). Noi definiremo questa matrice in modo che per uno stato puro essa si riduca al prodotto

$$\rho_{ik} = u_{pi}\bar{u}_{pk}. \tag{29,1}$$

In relazione a questo la matrice ρ è normalizzata con la condizione

$$\mathrm{Tr}\,\rho = 2m \tag{29,2}$$

(cfr. con la (23,4)).

In uno stato puro il valore medio dello spin è determinato dalla grandezza

$$\bar{s} = \frac{1}{2}\int \psi^*\Sigma\psi\, d^3x = \frac{1}{4\varepsilon}u_p^*\Sigma u_p = \frac{1}{4\varepsilon}\bar{u}_p\gamma^0\Sigma u_p. \tag{29,3}$$

L'espressione corrispondente per uno stato di polarizzazione parziale è

$$\bar{s} = \frac{1}{4\varepsilon}\mathrm{Tr}\,(\rho\gamma^0\Sigma) = \frac{1}{4\varepsilon}\mathrm{Tr}\,(\rho\gamma^5\gamma). \tag{29,4}$$

Le ampiezze $\bar{u}_p$, u_p soddisfano i seguenti sistemi di equazioni algebriche $(\hat{p} - m)\,u_p = 0$, $\bar{u}_p\,(\hat{p} - m) = 0$. Quindi la matrice (29,1) soddisfa le equazioni

$$(\hat{p} - m)\,\rho = \rho\,(\hat{p} - m) = 0. \tag{29,5}$$

A queste stesse equazioni deve soddisfare la matrice densità anche nel caso generale di uno stato miscelato (secondo lo spin) (cfr. la deduzione analoga nel III, § 14).

Se si considera una particella libera nel suo sistema di quiete, ad essa è applicabile la teoria non relativistica. In questa teoria, però, lo stato di polarizzazione parziale è determinato completamente da tre parametri: le componenti del vettore valore medio $\bar{s}$ dello spin (vedi III, § 59). È quindi chiaro che questi stessi parametri determineranno lo stato di polarizzazione anche dopo una qualsiasi trasformazione di Lorentz, cioè per una particella in moto.

Indichiamo il valore medio raddoppiato del vettore spin nel sistema a riposo con ζ (in uno stato puro $|\zeta| = 1$, in uno miscelato $|\zeta| < 1$). Per una descrizione quadridimensionale dello stato di polarizzazione è comodo introdurre il quadrivettore a^μ, che, nel sistema a riposo, coincide con il vettore ζ; poiché ζ è un vettore assiale, a^μ è uno pseudoquadrivettore. Questo quadrivettore è ortogonale al 4-vettore energia-impulso nel sistema a riposo (dove $a^\mu = (0, \zeta)$,

$p^\mu = (m, 0)$, e quindi in un sistema di riferimento generico si avrà

$$a^\mu p_\mu = 0. \tag{29,6}$$

In un sistema di riferimento generico si avrà anche

$$a_\mu a^\mu = -\zeta^2. \tag{29,7}$$

Le componenti del quadrivettore a^μ nel sistema di riferimento, nel quale la particella si muove alla velocità $v = p/\varepsilon$, si trovano con una trasformazione di Lorentz del sistema a riposo e sono uguali a

$$a^0 = \frac{|p|}{m}\zeta_{||}, \quad a_\perp = \zeta_\perp, \quad a_{||} = \frac{\varepsilon}{m}\zeta_{||}, \tag{29,8}$$

dove gli indici $||$ e $\perp$ indicano le componenti dei vettori ζ e a, parallele e perpendicolari alla direzione di p[1]). Queste formule si possono scrivere in forma vettoriale

$$a = \zeta + \frac{p(\zeta p)}{m(\varepsilon+m)}, \quad a^0 = \frac{ap}{\varepsilon} = \frac{p\zeta}{m},$$
$$a^2 = \zeta^2 + \frac{(p\zeta)^2}{m^2}. \tag{29,9}$$

Consideriamo dapprima uno stato non polarizzato ($\zeta = 0$). La matrice densità, in questo caso, può contenere in qualità di parametri soltanto l'energia-impulso p. L'unica forma possibile di tale matrice, che soddisfi le equazioni (29,5), è

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m) \tag{29,10}$$

(*I. E. Tamm*, 1930, *H. B. G. Casimir*, 1933). Il coefficiente costante è scelto in corrispondenza alla condizione di normalizzazione (29,2).

Nel caso generale di polarizzazione parziale ($\zeta \neq 0$), cercheremo la matrice densità nella forma

$$\rho = \frac{1}{4m}(\hat{p} + m)\rho'(\hat{p} + m), \tag{29,11}$$

---

[1]) Per le loro proprietà di trasformazione le componenti del vettore spin medio $\bar{s}$ (come anche di ogni momento angolare) sono, nella meccanica relativistica, le componenti spaziali del tensore antisimmetrico $S^{\lambda\mu}$. Il quadrivettore a^λ è legato a questo tensore dalla relazione

$$S^{\lambda\mu} = \frac{1}{2m} e^{\lambda\mu\nu\rho} a_\nu p_\rho, \quad a^\lambda = -\frac{2}{m} e^{\lambda\mu\nu\rho} S_{\mu\nu} p_\rho.$$

Sottolineiamo che in un sistema generico di riferimento la parte spaziale a del 4-vettore a^λ non coincide affatto con il vettore $2\bar{s}$. È facile vedere che

$$2\bar{s}_{||} = \frac{1}{m}(a_{||}\varepsilon - a^0|p|) = \zeta_{||}, \quad 2\bar{s}_\perp = \frac{\varepsilon}{m} a_\perp = \frac{\varepsilon}{m}\zeta_\perp.$$

che soddisfa automaticamente le equazioni (29,5). Per $\zeta = 0$ la matrice ausiliaria ρ' deve trasformarsi nella matrice unità; poiché $(\hat{p} + m)^2 = 2m\,(\hat{p} + m)$, la (29,11) coinciderà allora con l'espressione (29,10). Inoltre essa deve contenere il quadrivettore a in maniera lineare in qualità di parametro, deve cioè avere la forma

$$\rho' = 1 - A\gamma^5\hat{a}; \tag{29,12}$$

nel secondo membro figura il prodotto « scalare » dello pseudovettore a con il « 4-pseudovettore matriciale » $\gamma^5\gamma$. Per determinare il coefficiente A scriviamo la matrice densità nel sistema a riposo

$$\rho = \frac{m}{4}(1+\gamma^0)(1+A\gamma^5\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\zeta})(1+\gamma^0) = \frac{m}{2}(1+\gamma^0)(1+A\gamma^5\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\zeta})$$

e calcoliamo il valore medio dello spin secondo la (29,4). Usando le regole elencate nel § 22, troviamo facilmente che l'unico termine diverso da zero nella traccia è

$$2\bar{s} = \frac{1}{2m}\,\mathrm{Tr}\,(\rho\gamma^5\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{A}{4}\,\mathrm{Tr}\,((\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\zeta})\,\boldsymbol{\gamma}) = A\boldsymbol{\zeta}.$$

Uguagliando questa espressione a ζ, troviamo $A = 1$. Per ottenere l'espressione definitiva per ρ, sostituiamo la (29,12) nella (29,11) e scambiamo i fattori ρ' e $(\hat{p} + m)$; in virtú dell'ortogonalità di a e p il prodotto γp anticommuta con γa

$$\hat{a}\hat{p} = 2ap - \hat{p}\hat{a} = -\hat{p}\hat{a},$$

e quindi commuta con $\gamma^5\hat{a}$.

In tal modo, la matrice densità di un elettrone parzialmente polarizzato è data dall'espressione

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p}+m)(1-\gamma^5\hat{a}) \tag{29,13}$$

(*L. Michel, A. S. Wightman*, 1955). Se la matrice ρ è nota, il quadrivettore a, che caratterizza lo stato, (e con esso anche il vettore ζ) si può trovare secondo la formula

$$a^\mu = \frac{1}{2m}\,\mathrm{Tr}\,(\rho\gamma^5\gamma^\mu). \tag{29,14}$$

Le formule per la matrice densità del positrone sono completamente analoghe alle formule per l'elettrone. Se descrivessimo il positrone (di 4-impulso p) mediante l'ampiezza positronica $u_p^{(\mathrm{pos})}$ e la matrice densità $\rho^{(\mathrm{pos})}$, definita corrispondentemente all'ampiezza, non esisterebbe nessuna differenza dal caso dell'elettrone, e la matrice sarebbe determinata dalla stessa formula (29,13). Tuttavia, nei calcoli pratici delle sezioni d'urto dei processi di diffusione con la partecipazione di positroni si deve lavorare (come vedremo in seguito) non con $u_p^{(\mathrm{pos})}$, ma con le ampiezze a « frequenza negativa »

u_{-p}. In relazione a questo, anche la matrice densità di polarizzazione (che indicheremo con $\rho^{(-)}$) deve essere definita in modo tale che per uno stato puro si riduca a $u_{-pi}\bar{u}_{-pk}$.

In accordo con la (26,1) l'ampiezza positronica $u_p^{(pos)} = U_C\bar{u}_{-p}$. Inversamente

$$u_{-p} = U_C\bar{u}_p^{(pos)}, \quad \bar{u}_{-p} = U_C^+ u_p^{(pos)} = u_p^{(pos)} U_C^*$$

(cfr. con (28,3)). Se

$$\rho_{ik}^{(-)} = u_{-pi}\bar{u}_{-pk}, \quad \rho_{ik}^{(pos)} = u_{pi}^{(pos)}\bar{u}_{pk}^{(pos)},$$

mediante queste formule troviamo

$$\rho^{(-)} = U_C\tilde{\rho}^{(pos)}U_C^*. \tag{29,15}$$

Portando qui per $\rho^{(pos)}$ l'espressione (29,13) e operando (mediante le (26,3) e (26,21)) delle semplici trasformazioni, troviamo

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2}(\hat{p} - m)(1 - \gamma^5\hat{a}). \tag{29,16}$$

In particolare, per uno stato non polarizzato

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2}(\hat{p} - m). \tag{29,17}$$

Nel seguito, parlando di matrici densità positroniche, intenderemo le matrici $\rho^{(-)}$ e ometteremo l'indice (—) (le matrici $\rho^{(pos)}$ in pratica non si usano).

Nei calcoli è spesso necessario eseguire la media rispetto agli stati spinoriali di espressioni del tipo $\bar{u}Fu$ ($\equiv \bar{u}_i F_{ik} u_k$), dove F è una matrice (a quattro righe), e u l'ampiezza bispinoriale dello stato di dato 4-impulso p. Questa media è equivalente alla sostituzione dei prodotti $u_k\bar{u}_i$ con la matrice densità ρ_{ki} dello stato parzialmente polarizzato.

In particolare, la media totale rispetto ai due stati spinoriali indipendenti è equivalente al passaggio allo stato non polarizzato; secondo la (29,10), abbiamo

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{polar}} \bar{u}_p F u_p = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\hat{p} + m)F. \tag{29,18}$$

Analogamente per le funzioni d'onda a frequenza negativa

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{\text{polar}} \bar{u}_{-p} F u_{-p} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\hat{p} - m)F. \tag{29,19}$$

Se si tratta non della media, ma della somma sugli stati spinoriali, il risultato è di due volte maggiore.

Vediamo in che modo la matrice densità (29,13) diventa, nel limite, l'espressione non relativistica corrispondente. Per fare questo, passiamo al sistema di riferimento di quiete dell'elettrone. Nella rappresentazione standard delle funzioni d'onda le ampiezze u_p in questo sistema diventano grandezze a due componenti; insieme ad esse la matrice densità deve diventare una matrice a due righe. In effetti, nel sistema a riposo abbiamo

$$\rho = \frac{m}{2}(\gamma^0 + 1)(1 - \gamma^5 \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\zeta}),$$

e con l'aiuto delle espressioni delle matrici γ (21,20) e (22,18), troviamo

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{\text{non rel}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\text{non rel}} = m(1 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}) \tag{29,20}$$

(gli zeri indicano matrici zero a due righe). Se al posto della normalizzazione $2m$, si assume per la matrice densità la normalizzazione 1 (cioè $\operatorname{Tr} \rho_{\text{non rel}} = 1$) come nella teoria non relativistica, l'espressione (29,20) andrà divisa per $2m$, cosicché si ottiene

$$\frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta})$$

in accordo con le III (59,4-5).

Analogamente il limite non relativistico della matrice densità positronica sarà

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{\text{non rel}} \end{pmatrix}, \quad \rho_{\text{non rel}} = -m(1 - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}).$$

Scriviamo, infine, l'espressione semplificata della matrice densità nel caso ultrarelativistico. Ponendo nella (29,8) $|\boldsymbol{p}| \approx \varepsilon$ (e quindi si trascurano le grandezze dell'ordine di $(m/\varepsilon)^2$) sostituendo queste espressioni nella (29,13) o nella (29,16) e dirigendo $\boldsymbol{p}$ secondo l'asse x, scriviamo

$$\rho = \frac{1}{2}[\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1) \pm m]\left[1 - \gamma^5\left(\frac{\varepsilon}{m}(\gamma^0 - \gamma^1)\zeta_{\parallel} + \boldsymbol{\zeta}_{\perp}\boldsymbol{\gamma}_{\perp}\right)\right],$$

dove il segno superiore si riferisce al caso dell'elettrone, e il segno inferiore al caso del positrone. Sviluppando il prodotto i termini principali vengono meno, e i termini dell'ordine seguente danno

$$\rho = \frac{1}{2}\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1)[1 - \gamma^5[\pm\zeta_{\parallel} + \boldsymbol{\zeta}_{\perp}\boldsymbol{\gamma}_{\perp})]$$

oppure, tornando a scrivere $\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1)$ sotto forma di p,

$$\rho = \frac{1}{2}\hat{p}[1 - \gamma^5(\pm\zeta_{\parallel} + \boldsymbol{\zeta}_{\perp}\boldsymbol{\gamma}_{\perp})]. \tag{29,21}$$

Questa è l'espressione cercata della matrice densità nel caso ultrarelativistico. Notiamo che tutte le componenti del vettore polarizzazione ζ compaiono alla pari come termini di uno stesso ordine di grandezza. Ricordiamo che $\zeta_{\parallel}$ è la componente di questo vettore, parallela (per $\zeta_{\parallel} > 0$) o antiparallela (per $\zeta_{\parallel} < 0$) alla quantità di moto della particella. In particolare, per lo stato di elicità della particella, si ha $\zeta_{\parallel} = 2\lambda = \pm 1$; in questo caso, la matrice densità assume una forma particolarmente semplice[1])

$$\rho = \frac{1}{2}\hat{p}\,(1 \mp 2\lambda\gamma^5). \tag{29,22}$$

§ 30. *Neutrino*

Nel § 20 abbiamo visto che la necessità di descrivere una particella a spin 1/2 mediante due spinori (ξ, η) è connessa con la massa della particella. Questa causa viene a cadere se la massa è nulla. L'equazione d'onda, che descrive una particella di massa nulla, può essere composta mediante un solo spinore, ad esempio, uno spinore puntato η

$$p^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} = 0, \tag{30,1}$$

oppure, equivalentemente,

$$(p_0 + \mathbf{p}\sigma)\,\eta = 0. \tag{30,2}$$

Sempre nel paragrafo citato è stato anche notato che l'equazione d'onda, contenente la massa m, risulta automaticamente simmetrica rispetto all'inversione spaziale (cioè la trasformazione $\xi \to \eta$). Nella descrizione di una particella con un solo spinore, questa simmetria viene a mancare. Questa proprietà, tuttavia, non è necessaria, poiché la simmetria rispetto all'inversione spaziale non è una proprietà universale della natura.

Per $m = 0$, l'energia e la quantità di moto sono legate dalla relazione $\varepsilon = |\boldsymbol{p}|$. Quindi, per un'onda piana ($\eta_p \sim e^{-ipx}$) l'equazione (30,2) dà

$$(\boldsymbol{n}\sigma)\,\eta_p = -\eta_p, \tag{30,3}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore del vettore $\boldsymbol{p}$. Un'equazione analoga

$$(\boldsymbol{n}\sigma)\,\eta_{-p} = -\eta_{-p} \tag{30,4}$$

ha luogo anche per l'onda a « frequenza negativa » ($\eta_{-p} \sim e^{ipx}$).

---

[1]) Che coincide, come doveva essere, con la forma della matrice densità del neutrino o dell'antineutrino, particelle di massa nulla e di elicità determinata (vedi piú avanti, § 30).

Per l'operatore di seconda quantizzazione ψ abbiamo

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_p (\eta_p a_p + \eta_{-p} b_p^+) \\ \eta^+ &= \sum_p (\eta_p^* a_p^* + \eta_{-p}^* b_p). \end{aligned} \tag{30,5}$$

Da qui discende, come al solito, che η_{-p}^* sono le funzioni d'onda dell'antiparticella.

Dalla definizione degli operatori $p^{\alpha\dot{\beta}}$ (20,1) si vede che $p^{\alpha\dot{\beta}*} = -p^{\alpha\dot{\beta}}$. Quindi lo spinore coniugato complesso η^* soddisfa l'equazione $p^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}}^* = 0$, oppure, ciò che è lo stesso,

$$p_{\alpha\dot{\beta}}\eta^{\dot{\beta}*} = 0.$$

Introduciamo la notazione $\eta^{\dot{\beta}*} = \xi^\beta$, esprimendo in questo modo che la coniugazione complessa trasforma uno spinore puntato in uno non puntato. In questo modo, le funzioni d'onda dell'antiparticella soddisfano l'equazione

$$p_{\alpha\dot{\beta}}\xi^\beta = 0, \tag{30,6}$$

oppure

$$(p_0 - \mathbf{p}\sigma)\,\xi = 0. \tag{30,7}$$

Da qui per un'onda piana abbiamo

$$(\boldsymbol{n}\sigma)\,\xi_p = \xi_p. \tag{30,8}$$

Ora 1/2 $(\boldsymbol{n}\sigma)$ è l'operatore di proiezione dello spin sulla direzione del moto. Quindi le equazioni (30,3) e (30,8) significano che gli stati di particelle di impulso determinato risultano automaticamente stati di elicità, cioè la proiezione dello spin sulla direzione del moto ha un valore determinato. Se lo spin della particella è opposto all'impulso (elicità $-1/2$), lo spin della antiparticella è diretto secondo l'impulso (elicità $+1/2$).

Particelle con tali proprietà sono, con tutta probabilità, i *neutrini*, realmente esistenti in natura. La particella di elicità $-1/2$ è convenzionalmente chiamata neutrino, e la particella di elicità $+1/2$ antineutrino[1]).

Gli stati del neutrino non sono degeneri rispetto alle direzioni dello spin; in relazione a questo, ricordiamo la nota fatta nel § 8 a

---

[1]) L'esistenza del neutrino fu teoricamente predetta da *Pauli* per spiegare le proprietà del decadimento β (1931). L'equazione (30,1) venne studiata per la prima volta da *H. Weyl*, (1929). La teoria del neutrino fondata su queste equazioni venne formulata da *L. D. Landau*, *T. D. Lee* e *C. N. Yang*, *A. Salam* (1957).

proposito del fatto che una particella di massa nulla gode solo di simmetria assiale rispetto alle direzioni dell'impulso. Nel caso di particelle realmente neutre, i fotoni, in questa simmetria entrano sia le rotazioni attorno all'asse, sia le riflessioni nei piani passanti per questo asse. Nel caso del neutrino, invece, la simmetria rispetto alle riflessioni manca, e si ha soltanto il gruppo delle rotazioni attorno all'asse, che conserva la proiezione del momento angolare sull'asse, ma che non ne cambia il segno. La simmetria rispetto alle riflessioni è presente solo alla condizione che simultaneamente venga fatta la sostituzione della particella con l'antiparticella.

Occorre ancora notare che il fatto che si abbia obbligatoriamente solo la polarizzazione longitudinale significa che per il neutrino lo spin non è separabile dal momento angolare orbitale (come anche per il fotone in relazione alla polarizzazione trasversale obbligatoria, vedere § 6).

Mediante il solo spinore η (o ξ) si possono formare in tutto quattro combinazioni lineari, che compongono insieme il quadrivettore

$$j^{\mu} = (\eta^* \eta,\ \eta^* \sigma \eta). \tag{30,9}$$

È facile verificare che, in virtú delle equazioni

$$(p_0 + \mathbf{p}\sigma)\,\eta = 0, \quad \eta^* (p_0 - \mathbf{p}\sigma) = 0$$

ha luogo l'equazione di continuità $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$, cioè j^{μ} svolge il ruolo di quadrivettore densità di corrente di particelle.

Le onde piane neutriniche si possono normalizzare in maniera analoga a quella usata nel § 23 per particelle con massa

$$\eta_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\, u_p e^{-ipx}, \qquad \eta_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\, u_{-p} e^{ipx}; \tag{30,10}$$

le ampiezze spinoriali sono normalizzate con la condizione invariante

$$u^*_{\pm p}(1, \sigma)\, u_{\pm p} = 2(\nu, \boldsymbol{p}). \tag{30,11}$$

In questo caso la densità delle particelle e la densità della loro corrente $j^0 = 1$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{p}/\varepsilon = \boldsymbol{n}$.

Poiché un neutrino libero di impulso dato è sempre polarizzato completamente, non esiste, in questo caso, il concetto di stato miscelato (rispetto allo spin). Può risultare, tuttavia, comodo introdurre una « matrice densità » di polarizzazione a due righe, definita semplicemente come uno spinore di rango 2

$$\rho_{\alpha\beta} = u_{\alpha} u^*_{\beta} \tag{30,12}$$

(per il quale $\mathrm{Tr}\,\rho = 2\varepsilon$). L'espressione di questa matrice si può scrivere, notando che essa deve soddisfare le equazioni

$$(\varepsilon + \boldsymbol{p}\sigma)\,\rho = \rho\,(\varepsilon + \boldsymbol{p}\sigma) = 0.$$

Da qui si vede che

$$\rho = \varepsilon - p\sigma. \tag{30,13}$$

Nello studio dei diversi processi di interazione i neutrini possono figurare accanto ad altre particelle (a spin 1/2), che hanno massa e che quindi sono descritte da funzioni d'onda a quattro componenti. In questi casi è opportuno osservare una certa uniformità nelle notazioni, introducendo formalmente anche per il neutrino una funzione d'onda « bispinoriale », due componenti della quale sono, però, nulle: $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$. Questa forma della funzione ψ è alterata nel passaggio ad un'altra rappresentazione (non spinoriale). Questa difficoltà può essere superata notando che in rappresentazione spinoriale abbiamo l'identità

$$\frac{1+\gamma^5}{2}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad (\eta^* \xi^*)\frac{1-\gamma^5}{2} = (\eta^*, 0),$$

dove ξ è un generico « spinore test », che nel risultato non compare (la matrice γ^5 è definita secondo la (22,18)). Quindi la condizione secondo la quale il neutrino ha in realtà « due componenti » sarà osservata in una descrizione mediante una funzione ψ a quattro componenti in qualsiasi rappresentazione, se per ψ si intenderà la soluzione dell'equazione di Dirac per $m = 0$,

$$\hat{p}\psi = 0, \tag{30,14}$$

sottoposta alla condizione addizionale, $1/2\,(1+\gamma^5)\ \psi = \psi$, oppure

$$\gamma^5\psi = \psi. \tag{30,15}$$

Si può tener conto di questa condizione se ci si accorda di sostituire ovunque compaiano le funzioni ψ e $\bar{\psi}$ nel modo seguente:

$$\psi \to \frac{1+\gamma^5}{2}\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}\frac{1-\gamma^5}{2}. \tag{30,16}$$

Cosí il quadrivettore corrente si scriverà, operando la sostituzione (30,16) nell'espressione $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$:

$$j^\mu = \frac{1}{4}\bar{\psi}(1-\gamma^5)\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi. \tag{30,17}$$

In relazione a questa regola la matrice densità a quattro righe del neutrino dovrà essere scritta come segue:

$$\rho = \frac{1}{4}(1+\gamma^5)\,\hat{p}\,(1-\gamma^5) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\,\hat{p}. \tag{30,18}$$

In rappresentazione spinoriale essa si riduce, come è ovvio, alla matrice a due righe (30,13)

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon - \sigma p & 0 \end{pmatrix}.$$

Le formule analoghe per l'antineutrino si differenziano da quelle scritte per il neutrino per il cambiamento di segno davanti a γ^5.

Il neutrino è una particella elettricamente neutra. Il neutrino, con le proprietà descritte sopra, non è, tuttavia, una particella realmente neutra. Notiamo, a questo proposito, che il « campo neutrinico », descritto da uno spinore a due componenti, per il numero di stati delle particelle in esso possibili (ma, ovviamente, non per le altre proprietà fisiche), è equivalente ad un campo realmente neutro, descritto da un bispinore a quattro componenti. Al posto di stati con particelle e antiparticelle di elicità assegnata, si avrebbero qui altrettanti stati ad una sola particella coi due valori possibili della elicità, e automaticamente sarebbe osservata la simmetria rispetto all'inversione spaziale. Notiamo, tuttavia, che l'uguaglianza a zero della massa del neutrino a « quattro componenti » avrebbe, per cosí dire, un carattere « accidentale », poiché non sarebbe connessa con le proprietà di simmetria dell'equazione d'onda che descrive il neutrino stesso (e che ammette anche una massa diversa da zero). Quindi, il tener conto delle diverse interazioni di tale particella porterebbe automaticamente all'assegnazione di una massa di quiete piccola, ma non rigorosamente nulla.

§ 31. Equazione d'onda per particelle a spin 3/2

Una particella a spin 3/2 è descritta, nel suo sistema di quiete da uno spinore simmetrico tridimensionale di rango 3 (avente $2s + 1 = 4$ componenti indipendenti). Corrispondentemente, in un sistema di riferimento generico, per la descrizione di tale particella possono risultare necessari i quadrispinori $\xi^{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$, $\eta^{\cdot}_{\alpha\beta\gamma}$ e $\zeta^{\alpha\beta\gamma}$, $\chi^{\cdot\cdot\cdot}_{\alpha\dot\beta\dot\gamma}$, ognuno dei quali è simmetrico rispetto agli indici dello stesso tipo (puntati o non puntati); per inversione gli spinori della prima e della seconda coppia si trasformano tra loro.

Affinché nel sistema di quiete i 4-spinori $\xi^{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$ e $\eta^{\cdot}_{\alpha\beta\gamma}$ si riducano a spinori tridimensionali, simmetrici rispetto a tutti e tre gli indici, essi devono soddisfare le condizioni

$$p^{\dot\alpha\beta}\eta^{\cdot}_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad p_{\alpha\dot\beta}\xi^{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} = 0. \tag{31,1}$$

Effettivamente, nel sistema di quiete abbiamo

$$p^{\dot{\alpha}\beta} \to p_0 \delta^{\beta}_{\alpha} = m\delta^{\beta}_{\alpha}$$

(come si vede dalla (20,1)). Quindi le condizioni (31,1) portano alle uguaglianze

$$\delta^{\beta}_{\alpha}\eta'^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0, \quad \delta^{\beta}_{\alpha}\xi'^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0,$$

dove le lettere con l'apice indicano i corrispondenti spinori tridimensionali; in altre parole, questi spinori danno zero nella contrazione rispetto agli indici $\alpha\beta$, e questo significa che essi sono simmetrici rispetto a questi indici, e quindi rispetto a tutti e tre gli indici.

Il legame differenziale tra gli spinori ξ e η è stabilito dalle relazioni

$$\begin{aligned} p^{\delta\dot{\gamma}}\eta^{\dot{\beta}}_{\alpha\delta} &= m\xi^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha}, \\ p_{\delta\dot{\gamma}}\xi^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha} &= m\eta^{\dot{\beta}}_{\alpha\delta}. \end{aligned} \tag{31,2}$$

La simmetria dei membri a sinistra di queste equazioni (rispetto agli indici $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ o α, δ) è garantita dalle condizioni (31,1), in forza delle quali essi si annullano per contrazione rispetto a tutti gli indici. Nel sistema di quiete gli spinori tridimensionali ξ' e η', in forza delle equazioni (31,2), come ci si attende, coincidono. Eliminando dalle equazioni (31,2) ξ e η troviamo che ciascuna delle componenti degli spinori ξ e η soddisfa la seguente equazione del secondo ordine:

$$(p^2 - m^2)\,\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}} = 0. \tag{31,3}$$

L'insieme delle equazioni (31,1-2) forma il sistema completo di equazioni d'onda per una particella a spin 3/2[1]). L'aggiunta degli spinori ζ e χ non avrebbe dato niente di nuovo. Essi si costruiscono come segue:

$$m\zeta^{\alpha\beta\gamma} = p^{\alpha\dot{\delta}}\eta^{\beta\gamma}_{\dot{\delta}},$$

$$m\chi_{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}} = p_{\alpha\dot{\delta}}\xi^{\dot{\delta}}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}.$$

Le equazioni di particelle di spin 3/2 possono venire formulate anche sotto un'altra forma, nella quale vengono usati gli aspetti vettoriali delle proprietà degli spinori (*W. Rarita*, *J. Schwinger*, 1941; *A. S. Davydov*, *I. E. Tamm*, 1942). Alla coppia di indici spinoriali $\alpha\dot{\beta}$ si mette in corrispondenza l'indice vettoriale quadridi-

[1]) Sulla formulazione lagrangiana di queste equazioni vedi l'articolo di *Fierz* e *Pauli*, citato alla pag. 76.

mensionale μ. Quindi alle componenti dello spinore di rango 3 $\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$ si possono mettere in corrispondenza le componenti delle grandezze « miste » $\psi_{\mu}^{\dot{\gamma}}$ con un indice vettoriale e uno spinoriale. Analogamente, allo spinore $\eta^{\dot{\beta}\alpha\gamma}$ si mettono in corrispondenza le grandezze ψ_{μ}^{γ}, e all'insieme dei due spinori si mette in corrispondenza il bispinore « vettoriale » ψ_{μ} (l'indice bispinoriale non viene scritto). L'equazione d'onda si scriverà allora in forma di « equazione di Dirac » per ognuna delle componenti vettoriali ψ_{μ}

$$(\hat{p} - m)\,\psi_{\mu} = 0 \tag{31,4}$$

con la condizione addizionale

$$\gamma^{\mu}\psi_{\mu} = 0. \tag{31,5}$$

Usando le espressioni per le matrici γ^{μ} in rappresentazione spinoriale e le formule che legano le componenti di uno spinore con quelle di un vettore (18,6-7), è facile convincersi che le equazioni (31,2) sono contenute nella (31,4), e la condizione (31,5) è equivalente alla condizione di simmetria degli spinori $\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$ e $\eta^{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ rispetto agli indici $\dot{\beta}\dot{\gamma}$ o $\beta\gamma$. Moltiplicando l'equazione (31,4) per γ^{μ}, otteniamo, in virtú della (31,5),

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}p_{\nu}\psi_{\mu} = 0$$

oppure, usando le regole di commutazione per le matrici γ^{μ},

$$2g^{\mu\nu}p_{\nu}\psi_{\mu} - \gamma^{\nu}p_{\nu}\gamma^{\mu}\psi_{\mu} = 0. \tag{31,6}$$

Il secondo membro si annulla nuovamente in conseguenza della (31,5), mentre il primo dà

$$p^{\mu}\psi_{\mu} = 0. \tag{31,7}$$

È facile vedere che questa condizione, che discende automaticamente dalle (31,4-5), è equivalente alle condizioni (31,1).

Infine, un terzo metodo per la formulazione dell'equazione d'onda consiste nell'introdurre le grandezze ψ_{ikl} (i, k, l = 1, 2, 3, 4) con tre indici bispinoriali, rispetto ai quali le funzioni ψ_{ikl} sono simmetriche (*V. Bargmann*, *E. P. Wigner*, 1948). L'insieme di queste grandezze è equivalente all'insieme delle componenti di tutti e quattro gli spinori ξ, η, ζ, χ. L'equazione d'onda si scrive sotto forma di un sistema di « equazioni di Dirac »

$$p_{\mu}\gamma^{\mu}_{im}\psi_{mkl} = m\psi_{ikl}. \tag{31,8}$$

È facile vedere che queste equazioni portano già al numero necessario (quattro) di componenti indipendenti ψ_{ikl}, e quindi non c'è necessità di condizioni supplementari. Effettivamente, nel sistema di

quiete le (31,8) si trasformano nelle uguaglianze

$$\gamma^0_{im}\psi_{mkl} = \psi_{ikl},$$

in virtú delle quali si annullano (nella rappresentazione standard) tre componenti con i, k, $l = 3, 4$, cioè ψ_{ikl} diventano componenti di uno spinore tridimensionale di rango 3.

I risultati esposti si generalizzano in maniera ovvia al caso di particelle di spin semintero s. Nella descrizione mediante equazioni della forma (31,4-5) la funzione d'onda sarà un 4-tensore simmetrico di rango $(2s - 1)/2$ con un indice bispinoriale. Nella descrizione mediante equazione della forma (31,8) la funzione d'onda avrà $2s$ indici bispinoriali, rispetto ai quali essa sarà simmetrica.

Capitolo IV

PARTICELLE IN UN CAMPO ESTERNO

§ 32. *Equazione di Dirac per un elettrone in un campo esterno*

Le equazioni d'onda di particelle libere esprimono, in sostanza, soltanto quelle proprietà, che sono connesse alle richieste generali di simmetria spazio-temporale. I processi fisici, cui partecipano le particelle, dipendono invece dalle proprietà delle loro interazioni.

Nella teoria relativistica risulta impossibile una descrizione, basata su una qualsiasi semplice generalizzazione delle equazioni d'onda, di particelle suscettibili di interazioni forti, poiché tale descrizione esorbita dal quadro delle informazioni contenute nelle equazioni delle particelle libere.

Il metodo delle equazioni d'onda, tuttavia, è applicabile alla descrizione delle interazioni elettromagnetiche di particelle incapaci di interazioni forti. A questo gruppo appartengono gli elettroni (e i positroni), e quindi, alla teoria esistente risulta accessibile tutto l'enorme campo della elettrodinamica quantistica degli elettroni. Anche le particelle instabili, i muoni, non sono suscettibili di interazioni forti; esse vengono descritte dalla elettrodinamica quantistica limitatamente ai fenomeni che avvengono in intervalli di tempo piccoli rispetto alla loro vita media (connessa alle interazioni deboli).

In questo capitolo studieremo una sfera di problemi di elettrodinamica quantistica limitata alla teoria di una singola particella. Questi sono problemi nei quali il numero di particelle non varia, e l'interazione può essere introdotta mediante il concetto di campo elettromagnetico esterno. Oltre alle condizioni che permettono di considerare il campo esterno come dato, i limiti di applicabilità di tale teoria sono fissati anche da condizioni legate alle cosiddette correzioni radiative (che saranno studiate nella seconda parte del libro).

Le equazioni d'onda di un elettrone in un campo esterno dato possono essere ottenute come nella teoria non relativistica (III, § 111). Sia $A^{\mu} = (\Phi, \boldsymbol{A})$ il quadripotenziale del campo elettromagnetico esterno ($\boldsymbol{A}$ è il potenziale vettore, Φ il potenziale scalare). L'equazione cercata si otterrà sostituendo nell'equazione di Dirac l'operatore di energia-impulso p con la differenza $\mathrm{p} - e\boldsymbol{A}$, dove e è la

carica della particella[1]):

$$[\gamma (\mathbf{p} - e\boldsymbol{A}) - m]\,\psi = 0. \tag{32,1}$$

L'hamiltoniano corrispondente a questa equazione si ricava dalla (21,13) mediante la stessa sostituzione:

$$\mathrm{H} = \boldsymbol{\alpha}\,(\mathbf{p} - e\boldsymbol{A}) + \beta m + e\Phi. \tag{32,2}$$

L'invarianza dell'equazione di Dirac per le trasformazioni di gauge dei potenziali del campo elettromagnetico si esprime nel fatto che la sua forma rimane invariata se, simultaneamente alla trasformazione $A \to A + i\mathrm{p}\chi$ (dove χ è una funzione generica), si esegue nella funzione d'onda la sostituzione

$$\psi \to \psi e^{ie\chi} \tag{32,3}$$

(cfr. la trasformazione analoga per l'equazione di Schrödinger III (111,9).

La densità di corrente, espressa mediante la funzione d'onda, è data dalla stessa formula (21,11)

$$j = \bar{\psi}\gamma\psi,$$

che vale anche in assenza del campo esterno. È facile vedere che ripetendo per l'equazione (32,1) (e per l'equazione (32,4)) gli stessi calcoli, che furono fatti per la deduzione della (21,11), il campo esterno viene a mancare e l'equazione di continuità si ottiene per l'espressione originaria della corrente.

Facciamo sulla (32,1) l'operazione di coniugazione di carica. A tal fine, scriviamo

$$\bar{\psi}\,[\gamma\,(\mathbf{p} + e\boldsymbol{A}) + m] = 0, \tag{32,4}$$

che si ricava dalla (32,1) mediante la coniugazione complessa, analogamente a come venne a suo tempo ricavata l'equazione (21,9) (nel fare questo occorre ricordare che il quadrivettore $\boldsymbol{A}$ è reale). Riscrivendo questa equazione nella forma

$$[\tilde{\gamma}\,(\mathbf{p} + e\boldsymbol{A}) + m]\,\bar{\psi} = 0,$$

moltiplicandola a sinistra per la matrice U_C e usando le relazioni (26,3), troviamo

$$[\gamma\,(\mathbf{p} + e\boldsymbol{A}) - m]\,(\mathrm{C}\psi) = 0. \tag{32,5}$$

In tal modo, la funzione d'onda coniugata di carica soddisfa un'equazione che si differenzia da quella di partenza per il cambiamento di segno della carica. D'altra parte, l'operazione di coniugazione di carica significa il passaggio da particelle ad antiparticelle.

---

[1]) Qui si intende la carica con il suo segno, quindi per l'elettrone $e = -|e|$.

Vediamo che se le particelle sono dotate di carica elettrica, i segni della carica dell'elettrone e del positrone, in quanto grandezze che determinano la loro interazione con il campo elettromagnetico, risultano automaticamente opposti.

Le equazioni del primo ordine (32,1) possono essere trasformate in equazioni del secondo ordine applicando alla (32,1) l'operatore $\gamma(\mathrm{p} - eA) + m$:

$$[\gamma^\mu\gamma^\nu(\mathrm{p}_\mu - eA_\mu)(\mathrm{p}_\nu - eA_\nu) - m^2]\,\psi = 0.$$

Sostituiamo il prodotto $\gamma^\mu\gamma^\nu$ con

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu},$$

dove $\sigma^{\mu\nu}$ è il « quadritensore matriciale » antisimmetrico (28,2). Moltiplicando per $\sigma^{\mu\nu}$ si può antisimmetrizzare, eseguire cioè la sostituzione

$$(\mathrm{p}_\mu - eA_\mu)(\mathrm{p}_\nu - eA_\nu) \to \frac{1}{2}\{(\mathrm{p}_\mu - eA_\mu)(\mathrm{p}_\nu - eA_\nu)\}_- =$$

$$= \frac{1}{2}e(-A_\mu\mathrm{p}_\nu + \mathrm{p}_\nu A_\mu - \mathrm{p}_\mu A_\nu + A_\nu\mathrm{p}_\mu) =$$

$$= \frac{1}{2}ie(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = -\frac{ie}{2}F_{\mu\nu}$$

($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è il tensore del campo elettromagnetico). In conclusione, otteniamo un'equazione del secondo ordine della forma

$$\left[(\mathrm{p} - eA)^2 - m^2 - \frac{i}{2}eF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]\psi = 0. \qquad (32,6)$$

Il prodotto $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ può essere riscritto in forma tridimensionale, esprimendolo mediante le componenti

$$\sigma^{\mu\nu} = (\boldsymbol{\alpha}, i\boldsymbol{\Sigma}), \quad F^{\mu\nu} = (-\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}).$$

Allora

$$[(\mathrm{p} - eA)^2 - m^2 + e\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{H} - ie\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}]\,\psi = 0 \qquad (32,7)$$

oppure, in unità ordinarie,

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}\Phi\right)^2 - \left(i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - m^2c^2 + \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{H} - i\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}\right]\psi = 0 \qquad (32,7a)$$

La comparsa in queste equazioni di termini, contenenti $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$, è connessa con la presenza dello spin nella particella; torneremo su questo nel paragrafo seguente.

Tra le soluzioni dell'equazione del secondo ordine ci sono, certamente, anche soluzioni « ridondanti », le quali non soddisfano l'equazione del primo ordine originaria (32,1) (queste sono soluzioni

dell'equazione $[\gamma (\mathrm{p} - eA) + m]\psi = 0$ col segno cambiato davanti a m). La scelta delle soluzioni necessarie nei casi concreti è solitamente evidente e non presenta difficoltà. Un criterio generale di scelta consiste in questo: se φ è una soluzione qualsiasi dell'equazione del secondo ordine, la soluzione della giusta equazione del primo ordine è

$$\psi = [\gamma (\mathrm{p} - eA) + m]\,\varphi. \tag{32,8}$$

Effettivamente, moltiplicando questa uguaglianza per $\gamma (\mathrm{p} - eA) - m$, si vede che la parte destra si annulla se φ soddisfa l'equazione (32,6).

Occorre sottolineare che l'introduzione del campo esterno nell'equazione d'onda relativistica mediante la sostituzione di p con $\mathrm{p} - eA$, non è evidente. In questo procedimento noi ci siamo basati, in sostanza, su un principio addizionale: la sostituzione indicata deve essere eseguita nell'equazione del primo ordine. Proprio come conseguenza di questo nell'equazione (32,6) sono comparsi termini supplementari, che non sarebbero comparsi se la sostituzione fosse stata fatta direttamente nell'equazione del secondo ordine[1]).

Fra le soluzioni stazionarie dell'equazione di Dirac in un campo esterno possono essere presenti sia stati dello spettro continuo che dello spettro discreto. Come anche nella teoria non relativistica, gli stati dello spettro continuo corrispondono ad un moto infinito, nel quale la particella può allontanarsi all'infinito, dove essa può essere considerata come particella libera. Poiché gli autovalori dell'hamiltoniano di una particella libera sono uguali a $\pm\sqrt{p^2 + m^2}$, è chiaro che lo spettro continuo degli autovalori dell'energia giace in un campo determinato dalle relazioni $\varepsilon \geqslant m$ e $\varepsilon \leqslant -m$. Se invece $-m < \varepsilon < m$, la particella non può trovarsi all'infinito, e quindi il moto è finito, e lo stato appartiene allo spettro discreto.

Come anche per le particelle libere, le funzioni d'onda a « frequenza positiva » ($\varepsilon > 0$) e quelle a « frequenza negativa » ($\varepsilon < 0$)

---

[1]) In accordo con questo principio si sarebbe dovuto introdurre il campo esterno anche nelle equazioni d'onda di particelle dotate di altri spin, e le equazioni sarebbero dovute essere state scelte nella forma, nella quale esse si ottengono mediante il principio variazionale, senza ricorrere a condizioni supplementari. Cosí, nel caso di spin 1 la sostituzione $\mathrm{p} \to \mathrm{p} - eA$ deve essere eseguita nelle equazioni (14,1-2). Notiamo che questa sostituzione (per spin 1) nell'equazione del secondo ordine (14,4) e nella condizione supplementare (14,3) avrebbe condotto, in generale, ad un sistema incompatibile di equazioni (nel caso di spin 3/2 l'incompatibilità sarebbe già sorta per il fatto che si usavano le equazioni del primo ordine (31,2) con le condizioni supplementari (31,1)).

Nel caso di spin 0, la sostituzione $\mathrm{p} \to \mathrm{p} - eA$ nelle equazioni del primo ordine (10,4) è equivalente alla sostituzione nell'equazione del secondo ordine (10,5).

Non ci soffermeremo piú dettagliatamente su questi problemi, poiché essi non hanno senso fisico diretto; l'interazione elettromagnetica di particelle a spin differente da 1/2 non può essere descritta mediante equazioni d'onda.

entrano nello schema della seconda quantizzazione in modo determinato. Per particelle in un campo esterno questo schema viene generalizzato in maniera naturale mediante la sostituzione delle onde piane nelle formule (25,1) con le autofunzioni, debitamente normalizzate, dell'equazione di Dirac $\psi_n^{(+)}$ e $\psi_n^{(-)}$, associate a frequenze positive ($\varepsilon_n^{(+)}$) e a frequenze negative ($-\varepsilon_n^{(-)}$):

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_n \{a_n \psi_n^{(+)} e^{-i\varepsilon_n^{(+)} t} + b_n^+ \psi_n^{(-)} e^{i\varepsilon_n^{(-)} t}\}, \\ \overline{\psi} &= \sum_n \{a_n^{(+)} \overline{\psi}_n^{(+)} e^{i\varepsilon_n^{(+)} t} + b_n \overline{\psi}_n^{(-)} e^{-i\varepsilon_n^{(-)} t}\}. \end{aligned} \tag{32,9}$$

Questo schema di quantizzazione può, tuttavia, portare a difficoltà. Queste sono legate al fatto che, con l'aumentare della profondità della buca di potenziale, i livelli energetici possono passare la frontiera $\varepsilon = 0$, possono cioè da positivi diventare negativi (oppure, per un potenziale di segno diverso, da negativi diventare positivi). Tuttavia, per ragioni di continuità, noi dobbiamo continuare a considerare questi livelli come elettronici (e non positronici). Per questa ragione, in un approccio piú rigoroso dovrebbero venire considerati elettronici tutti gli stati che, per uno « spegnimento » infinitamente lento del campo, si avvicinano alla frontiera positiva dello spettro continuo ($\varepsilon = m$). L'energia dell'elettrone può, tuttavia, risultare negativa, e quindi il vuoto non è piú lo stato energeticamente piú basso; questo può portare, in un campo appropriato, alla generazione di coppie elettrone-positrone[1]). Inoltre, continuando ad aumentare la profondità della buca di potenziale, il livello elettronico può raggiungere la frontiera negativa dello spettro continuo. In questo caso l'energia minima necessaria per la generazione di una coppia (uguale a $m + \varepsilon_{el}$), sarà uguale a zero, cioè inizierà immediatamente la formazione spontanea di coppie, processo che non può, in ogni caso, venire considerato nel quadro della teoria ad una particella.

Tutto questo mostra che l'applicabilità del concetto di campo esterno è, nella teoria relativistica, limitata. In particolare, non è possibile considerare buche di potenziale troppo profonde. Nel quadro di una teoria a piú particelle il problema non è ancora stato studiato.

PROBLEMA

Determinare i livelli energetici di un elettrone in un campo magnetico costante.

Soluzione. **Per il potenziale vettore abbiamo $A_x = A_z = 0$, $A_y = Hx$ (il campo H è diretto lungo l'asse z). Oltre all'energia, si conservano le componenti p_y, p_z dell'impulso generalizzato.**

---

[1]) **In particolare, questo avrà luogo in presenza di due buche di potenziale di segno opposto molto profonde.**

Usiamo l'equazione del secondo ordine per la funzione ausiliaria φ (vedi la (32,8)) e assumiamo φ come autofunzione dell'operatore Σ_z (con gli autovalori $\sigma = \pm 1$), e degli operatori p_y e p_z. L'equazione per φ ha la forma

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + (eHx - p_y)^2 - eH\sigma \right\} \varphi = (\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2)\varphi.$$

Per la forma questa equazione coincide con l'equazione di Schrödinger per l'oscillatore lineare. Gli autovalori ε sono determinati dalla formula

$$\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2 = |e| H(2n+1) - eH\sigma, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(cfr. III, § 112). Notiamo che la funzione d'onda ψ, definita attraverso φ dalla formula (32,8), non è un'autofunzione dell'operatore Σ_z; questo fatto è in accordo con l'affermazione che per una particella in moto lo spin non è una grandezza conservativa.

§ 33. *Sviluppo in potenze di* $1/c$[1]

Nel § 21 abbiamo visto che nel limite non relativistico ($v \to 0$) due componenti (χ) del bispinore $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ si annullano. Quindi per velocità piccole dell'elettrone si può porre $\chi \ll \varphi$. Questo fatto dà la possibilità di ottenere un'equazione approssimata, contenente soltanto la grandezza a due componenti φ, sviluppando formalmente la funzione d'onda in potenze di $1/c$.

Come punto di partenza prendiamo l'equazione di Dirac per un elettrone in un campo esterno, scritta nella forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ c\boldsymbol{\alpha} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) + \beta mc^2 + e\Phi \right\} \psi. \tag{33,1}$$

Nell'energia relativistica della particella è contenuta anche la sua energia di quiete mc^2. Nel passaggio all'approssimazione non relativistica quest'ultima deve essere esclusa; per fare questo introduciamo al posto di ψ la funzione ψ' secondo la formula

$$\psi = \psi' e^{-imc^2 t/\hbar}.$$

Allora

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + mc^2 \right) \psi' = \left\{ c\boldsymbol{\alpha} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) + \beta mc^2 + e\Phi \right\} \psi'.$$

Rappresentando ψ' nella forma $\psi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix}$, otteniamo un sistema di equazioni

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) \varphi' = c\boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \chi', \tag{33,2}$$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi + 2mc^2 \right) \chi' = c\boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \varphi' \tag{33,3}$$

---

[1]) In questo paragrafo usiamo il sistema di unità ordinario.

(in seguito ometteremo gli apici apposti a φ e χ; questo non potrà causare malintesi, poiché in questo paragrafo noi useremo soltanto la funzione trasformata ψ').

In prima approssimazione, nel membro a sinistra dell'equazione (33,3) lasciamo solo il membro $2mc^2\chi$ e otteniamo

$$\chi = \frac{1}{2mc}\sigma\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi \tag{33,4}$$

(notiamo che $\chi \sim \varphi/c$). Sostituendo questa espressione nella (33,2), otteniamo

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\right)\varphi = \frac{1}{2m}\left(\sigma\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right)^2\varphi.$$

Per le matrici di Pauli vale la relazione

$$(\sigma\boldsymbol{a})(\sigma\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ab} + i\sigma[\boldsymbol{ab}], \tag{33,5}$$

dove $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono vettori qualsiasi (vedi (20,9)). Nel nostro caso $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$, ma il prodotto vettoriale $[\boldsymbol{ab}]$ non si annulla in virtú della non commutatività di $\mathbf{p}$ e $\boldsymbol{A}$:

$$\left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\varphi = i\frac{e\hbar}{c}\{[\boldsymbol{A}\nabla] + [\nabla\boldsymbol{A}]\}\varphi = i\frac{e\hbar}{c}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot\varphi.$$

Abbiamo quindi

$$\left(\sigma\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right)^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{c}\sigma\boldsymbol{H} \tag{33,6}$$

(dove $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ è il campo magnetico), e per φ si ottiene l'equazione

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mathrm{H}\varphi = \left[\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + e\Phi - \frac{e\hbar}{2mc}\sigma\boldsymbol{H}\right]\varphi. \tag{33,7}$$

Questa è la cosí detta *equazione di Pauli*. Essa si differenzia dall'equazione non relativistica di Schrödinger per la presenza nell'hamiltoniano dell'ultimo membro, che ha la forma dell'energia potenziale di un dipolo magnetico in un campo esterno (vedi III, § 111). Quindi, nell'approssimazione del primo ordine (in $1/c$) l'elettrone si comporta come una particella che, oltre alla carica elettrica, possiede anche un momento magnetico:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc}\sigma = \frac{|e|}{mc}\hbar\mathbf{s}. \tag{33,8}$$

Come si vede, il rapporto giromagnetico (e/mc) è due volte maggiore di quello che si avrebbe per il momento magnetico, connesso con il moto orbitale[1]).

[1]) Questo importante risultato fu ottenuto da *Dirac* nel 1928. La funzione d'onda a due componenti, che soddisfa l'equazione (33,7), fu introdotta da *W. Pauli* (1927) ancora prima che Dirac scoprisse la sua equazione.

La densità è $\rho = \psi^*\psi = \varphi^*\varphi + \chi^*\chi$. In prima approssimazione il secondo membro deve essere trascurato, e si ha quindi $\rho = |\varphi|^2$, come deve essere per l'equazione di Schrödinger.

Per la densità di corrente abbiamo

$$j = c\psi^*\alpha\psi = c(\varphi^*\sigma\chi + \chi^*\sigma\varphi).$$

In conformità con la (33,4), sostituiamo in questa espressione

$$\chi = \frac{1}{2mc}\sigma\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right)\varphi, \quad \chi^* = \frac{1}{2mc}\left(i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right)\varphi^*\cdot\sigma,$$

e i prodotti, che contengono due volte il fattore σ, si trasformano mediante la formula (33,5) scritta nella forma

$$(\sigma a)\,\sigma = a + i\,[\sigma a], \qquad \sigma\,(\sigma a) = a + i\,[ab]. \tag{33,9}$$

Come risultato otteniamo

$$j = \frac{i\hbar}{2m}(\varphi\nabla\varphi^* - \varphi^*\nabla\varphi) - \frac{e}{mc}A\varphi^*\varphi + \frac{\hbar}{2m}\operatorname{rot}(\varphi^*\sigma\varphi), \tag{33,10}$$

in accordo con l'espressione III (115,4) della teoria non relativistica.

Troviamo ora l'approssimazione del secondo ordine, continuando lo sviluppo fino ai membri $\sim 1/c^2$ [1]). Supponiamo di avere soltanto un campo elettrico esterno ($A = 0$).

Notiamo innanzitutto che, se si tiene conto dei membri $\sim 1/c^2$, per la densità abbiamo

$$\rho = |\varphi|^2 + |\chi|^2 = |\varphi|^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}|\sigma\nabla\varphi|^2.$$

Questa espressione si differenzia da quella di Schrödinger. Volendo trovare (in seconda approssimazione) un'equazione d'onda, analoga all'equazione di Schrödinger, noi dobbiamo introdurre al posto di φ un'altra funzione (a due componenti) φ_{Schr}, per la quale l'integrale conservativo abbia la forma $\int |\varphi_{\text{Schr}}|^2 dV$, come deve essere per l'equazione di Schrödinger.

Per chiarire la forma della trasformazione richiesta, scriviamo la condizione

$$\int \varphi^*_{\text{Schr}}\varphi_{\text{Schr}}\,dV = \int \left\{\varphi^*\varphi + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}(\nabla\varphi^*\cdot\sigma)(\sigma\nabla\varphi)\right\} dV$$

e integrando per parti otteniamo

$$\int (\nabla\varphi^*\cdot\sigma)(\sigma\nabla\varphi)\,dV = -\int \varphi^*(\sigma\nabla)(\sigma\nabla)\varphi\,dV = -\int \varphi^*\Delta\varphi\,dV$$

---

[1]) L'esposizione segue qui il metodo di *V. B. Berestetskij* e *L. D. Landau* (1949).

(oppure questa stessa espressione con φ e φ^* scambiate di posto). In tal modo

$$\int \varphi^*_{\text{Schr}}\varphi_{\text{Schr}}\, dV = \int \left\{ \varphi^*\varphi - \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\varphi^*\Delta\varphi + \varphi\Delta\varphi^*) \right\} dV,$$

da dove si vede che

$$\varphi_{\text{Schr}} = \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi, \qquad \varphi = \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi_{\text{Schr}}. \qquad (33,11)$$

Per semplificare la scrittura supporremo che lo stato è stazionario, cioè sostituiremo l'operatore $-i\hbar\partial/\partial t$ con l'energia ε (dove è stata sottratta l'energia a riposo). Nell'approssimazione successiva (alla (33,4)), dalla (33,3) abbiamo

$$\chi = \frac{1}{2mc}\left(1 - \frac{\varepsilon - e\Phi}{2mc^2}\right)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\,\varphi.$$

Bisogna ora portare questa espressione nella (33,2) e quindi sostituire φ con φ_{Schr} secondo la (33,11), omettendo sempre i membri di ordine superiore a $1/c^2$. Dopo un semplice calcolo otteniamo l'equazione per φ_{Schr} nella forma $\varepsilon\varphi_{\text{Schr}} = \mathrm{H}\varphi_{\text{Schr}}$, dove l'hamiltoniano è

$$\mathrm{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{e}{4m^2c^2}\left\{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\,\Phi\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) - \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2\Phi + \Phi\mathbf{p}^2)\right\}.$$

L'espressione entro parentesi graffa si trasforma mediante le formule

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\,\Phi\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) = \Phi\mathbf{p}^2 + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\Phi)\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) = \Phi\mathbf{p}^2 + i\hbar\,(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E})\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}),$$

$$\mathbf{p}^2\Phi - \Phi\mathbf{p}^2 = -\hbar^2\Delta\Phi + 2i\hbar\boldsymbol{E}\mathbf{p}$$

(dove $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ è il campo elettrico). L'espressione definitiva dell'hamiltoniano è la seguente:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\,\boldsymbol{\sigma}\,[\boldsymbol{E}\mathbf{p}] - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\operatorname{div}\boldsymbol{E}. \qquad (33,12)$$

Gli ultimi tre termini sono le correzioni cercate di ordine $1/c^2$. Il primo di essi è la conseguenza della dipendenza relativistica dell'energia cinetica dall'impulso (sviluppo della differenza $c\sqrt{p^2 + m^2c^2} - mc^2$). Il secondo, che può essere chiamato energia di *interazione spin-orbita*, è l'energia di interazione del momento magnetico in moto con il campo elettrico[1]). L'ultimo termine è

[1]) Introducendo il momento magnetico (33,8) e la velocità $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/m$, otteniamo questa energia nella forma $-\frac{1}{2c}\,\boldsymbol{\mu}\,[\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}]$. Di primo acchito questo risultato può sembrare innaturale, poiché nel passaggio al sistema di riferimento solidale con la particella compare il campo magnetico $\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}]$, nel quale il momento magnetico dovrebbe possedere l'energia $-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H}$. Questo ragionamento,

diverso da zero soltanto in quei punti dove ci sono delle cariche elettriche che creano il campo esterno (ad esempio, per il campo coulombiano di una carica puntiforme Ze si ha $\Delta\Phi = -4\pi Ze\delta(\boldsymbol{r})$) (*C. G. Darwin*, 1928).

Se il campo elettrico gode di simmetria centrale, allora si ha

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{d\Phi}{dr},$$

e l'operatore di interazione spin-orbita può essere rappresentato nella forma

$$\frac{e\hbar}{4m^2c^2r}\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{r}\mathbf{p}]\frac{d\Phi}{dr} = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2r}\frac{dU}{dr}\mathbf{ls}. \qquad (33,13)$$

Qui $\mathbf{l}$ è l'operatore del momento angolare orbitale, $\mathbf{s} = 1/2\boldsymbol{\sigma}$ l'operatore di spin dell'elettrone, e $U = e\Phi$ è l'energia potenziale dell'elettrone nel campo[1]).

§ 34. *Struttura fina dei livelli dell'atomo di idrogeno*

Determiniamo le correzioni relativistiche ai livelli energetici dell'atomo di idrogeno, cioè di un elettrone nel campo coulombiano di un nucleo fisso[2]). La velocità dell'elettrone nell'atomo di idrogeno è $v/c \sim \alpha \ll 1$. Quindi le correzioni cercate possono essere calcolate, applicando la teoria delle perturbazioni, come valori medi nello stato imperturbato (cioè rispetto alla funzione d'onda non relativistica) dei membri relativistici nell'hamiltoniano approssimato (33,12). Per una maggiore generalità poniamo la carica del nucleo uguale a Ze, supponendo, tuttavia, che sia sempre valida la relazione $Z\alpha \ll 1$.

L'intensità del campo del nucleo è $\boldsymbol{E} = Ze\boldsymbol{r}/r^3$, e il suo potenziale soddisfa l'equazione $\Delta\Phi = -4\pi Ze\delta(\boldsymbol{r})$. Sostituendo questo nella (33,12) (gli ultimi tre termini) e tenendo conto del fatto che la carica dell'elettrone è negativa, otteniamo l'operatore di perturbazione

$$V = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3} + \frac{Z\alpha}{2r^3m^2}\mathbf{ls} + \frac{Z\alpha\pi}{2m^2}\delta(\boldsymbol{r}). \qquad (34,1)$$

Poiché, secondo l'equazione non relativistica di Schrödinger, si ha

$$\mathbf{p}^2\psi = 2m\left(\varepsilon_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi$$

---

tuttavia, in realtà non tiene conto, nel modo dovuto, della non inerzialità del sistema di riferimento solidale con la particella. La comparsa del fattore 1/2 (introdotto da *L. Thomas* nel 1926) è connessa con le condizioni generali di invarianza relativistica unitamente alle proprietà specifiche dell'elettrone in quanto particella « spinoriale » con un proprio valore del rapporto giromagnetico (vedi § 41).

[1]) La formula (33,13) venne usata nel III, § 72.

[2]) L'influenza del moto del nucleo sul valore di queste correzioni costituisce un effetto di ordine superiore e qui viene trascurato.

(dove $\varepsilon_0 = -mZ^2\alpha^2/2n^2$ è il livello imperturbato, n il numero quantico principale), per il valore medio otteniamo

$$\overline{\mathbf{p}^4} = 4m^2 \overline{\left(\varepsilon_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2}.$$

Questa quantità, come anche il valore medio del secondo membro nella (34,1), si calcola mediante le formule (vedi III, § 36)

$$\overline{r^{-1}} = \frac{m\alpha Z}{n^2}, \quad \overline{r^{-2}} = \frac{(m\alpha Z)^2}{n^3(l+1/2)}, \qquad (34,2)$$
$$\overline{r^{-3}} = \frac{(m\alpha Z)^3}{n^3 l(l+1/2)(l+1)}$$

(l'ultima formula vale per $l \neq 0$); gli autovalori dell'operatore $\boldsymbol{ls}$ sono

$$\boldsymbol{ls} = \frac{1}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right] \quad \text{per} \quad l \neq 0,$$
$$\boldsymbol{ls} = 0 \quad \text{per} \quad l = 0.$$

Infine, la media del terzo termine vien calcolata mediante le formule

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z\alpha m}{n}\right)^{3/2}, \quad l = 0; \quad \psi(0) = 0, \quad l \neq 0. \qquad (34,3)$$

Il risultato di semplici calcoli, eseguiti mediante le formule riportate, può essere rappresentato in tutti i casi (per tutti i j e l) nella forma

$$\Delta\varepsilon = -\frac{m(Z\alpha)^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right). \qquad (34,4)$$

La formula (34,4) dà la correzione relativistica cercata all'energia dei livelli dell'idrogeno, cioè l'energia della struttura fina[1]). Ricordiamo che nella teoria non relativistica ha luogo sia la degenerazione rispetto alle direzioni dello spin, sia la degenerazione coulombiana rispetto a l. La struttura fina (l'interazione spin-orbita) rimuove questa degenerazione, ma non completamente: rimangono doppiamente degeneri i livelli con gli stessi n, j ma con diversi $l = j \pm 1/2$ (non degeneri risultano soltanto i livelli con il valore massimo possibile, per un dato n, $j = j_{\max} = l_{\max} + 1/2 =$

---

[1]) Questa formula (come anche la formula piú precisa (36,10)) fu ricavata per la prima volta da *A. Sommerfeld* nell'ambito della vecchia teoria di Bohr ancora prima della creazione della meccanica quantistica.

$= n - 1/2$)[1]). In tal modo, la successione dei livelli dell'idrogeno, tenuto conto della struttura fina, è la seguente:

$$1s_{1/2};$$
$$\underbrace{2s_{1/2},\ 2p_{1/2}},\ 2p_{3/2};$$
$$\underbrace{3s_{1/2},\ 3p_{1/2}},\ \underbrace{3p_{3/2},\ 3d_{3/2}},\ 3d_{5/2}.$$
$$\cdots\cdots$$

Il livello con numero quantico principale n si scinde in n componenti della struttura fina.

Vedremo in seguito che la degenerazione restante viene rimossa dalle cosiddette correzioni radiative (*spostamento di Lamb*), delle quali non tiene conto l'equazione di Dirac nel problema di un elettrone.

Anticipiamo qui che per l'ordine di grandezza queste correzioni sono $\sim mZ^4\alpha^5 \ln(1/\alpha)$. La correzione del secondo ordine, dovuta all'interazione spin-orbita, sarebbe $\sim m(Z\alpha)^6$, cosicché il suo rapporto rispetto alle correzioni radiative vale $\sim Z^2\alpha/\ln(1/\alpha)$. Per l'idrogeno ($Z = 1$) questo rapporto è chiaramente piccolo, e quindi il problema della soluzione esatta dell'equazione di Dirac non ha, in questo caso, alcun senso. Questo problema può, tuttavia, avere senso per i livelli energetici dell'elettrone nel campo di nuclei con Z grandi (§ 36).

§ 35. *Moto in un campo a simmetria centrale*

Studiamo il moto di un elettrone in un campo elettrico a simmetria centrale.

Poiché nel moto in un campo centrale si conservano il momento angolare e la parità (rispetto al centro del campo, scelto come inizio delle coordinate), per quanto riguarda la dipendenza angolare delle

---

[1]) Questa degenerazione è connessa all'esistenza di una legge di conservazione supplementare, specifica per il campo coulombiano; l'hamiltoniano dell'equazione di Dirac $\mathrm{H} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m - e^2/r$ commuta con l'operatore

$$\mathrm{I} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\,\boldsymbol{\Sigma} + \frac{i}{me^2}\,\beta\,(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l} + 1)\,\gamma^5\,(\mathrm{H} - m\beta)$$

(*M. H. Johnson, B. A. Lippmann*, 1950). Nel limite non relativistico si ha $\mathrm{I} \to \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}$, dove

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{1}{2me^2}\,\{[\mathbf{lp}] - [\mathbf{pl}]\}$$

è l'operatore corrispondente all'integrale coulombiano classico del moto (cfr. I, § 15). La degenerazione accidentale non relativistica nel campo coulombiano è connessa con la legge di conservazione della grandezza $\mathbf{A}$.

funzioni d'onda di questo moto vale tutto quanto è stato detto nel § 24 a proposito delle onde sferiche delle particelle libere. Cambiano soltanto le funzioni radiali. In accordo con quanto detto, cercheremo la funzione d'onda degli stati stazionari (nella rappresentazione standard) nella forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r)\,\Omega_{jlm} \\ (-1)^{\frac{1+l-l'}{2}}\, g(r)\,\Omega_{jl'm} \end{pmatrix}, \tag{35,1}$$

dove $l = j \pm 1/2$, $l' = 2j - l$, mentre il fattore -1 è stato introdotto per comodità.

L'equazione di Dirac in rappresentazione standard dà il seguente sistema di equazioni per φ e χ:

$$\begin{aligned} (\varepsilon - m - U)\,\varphi &= \sigma\mathbf{p}\chi, \\ (\varepsilon + m - U)\,\chi &= \sigma\mathbf{p}\varphi, \end{aligned} \tag{35,2}$$

dove $U(r) = e\Phi(r)$ è l'energia potenziale dell'elettrone nel campo. Il calcolo del risultato che si ottiene sostituendo qui le espressioni (35,1) si riduce al calcolo dei membri destri di queste equazioni.

Esprimendo lo spinore sferico $\Omega_{jl'm}$ attraverso Ω_{jlm} secondo la formula

$$\Omega_{jl'm} = i^{l-l'}\left(\sigma\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\Omega_{jlm}$$

(vedi la (24,8)), scriviamo

$$(\sigma\mathbf{p})\,\chi = -i\,(\sigma\mathbf{p})\,(\sigma\boldsymbol{r})\,\frac{g}{r}\,\Omega_{jlm}.$$

Trasformando ora il prodotto $(\sigma\mathbf{p})\,(\sigma\boldsymbol{r})$ mediante le formule (33,5) e sviluppando le operazioni vettoriali troviamo

$$\begin{aligned} (\sigma\mathbf{p})\,\chi &= -i\,\{\mathbf{p}\boldsymbol{r} + i\sigma\,[\mathbf{p}\boldsymbol{r}]\}\,\frac{g}{r}\,\Omega_{jlm} = \\ &= \{-\operatorname{div}\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\nabla) - \sigma\,[\boldsymbol{r}\mathbf{p}]\}\,\frac{g}{r}\,\Omega_{jlm} = \\ &= -\left\{g' + \frac{2}{r}\,g + \frac{g}{r}\,\sigma\mathbf{l}\right\}\Omega_{jlm}, \end{aligned}$$

dove $\mathbf{l} = [\boldsymbol{r}\mathbf{p}]$ è l'operatore del momento angolare orbitale; l'apice significa la derivazione rispetto a r. Gli autovalori del prodotto $\sigma\mathbf{l} = 2\mathbf{l}\boldsymbol{s}$ sono

$$\sigma\boldsymbol{l} = \boldsymbol{j}^2 - \boldsymbol{l}^2 - \boldsymbol{s}^2 = j\,(j+1) - l\,(l+1) - \frac{3}{4} = \\ = \begin{cases} j - 1/2 & \text{per} \quad l = j - 1/2, \\ -j - 3/2 & \text{per} \quad l = j + 1/2. \end{cases}$$

Allo scopo di uniformare la scrittura in ambedue i casi ($l = j \pm 1/2$), è comodo introdurre la notazione

$$\varkappa = \begin{cases} -(j+1/2) = -(l+1) & \text{per} \quad j = l + 1/2, \\ +(j+1/2) = l & \text{per} \quad j = l - 1/2. \end{cases} \tag{35,3}$$

Il numero $\varkappa$ assume tutti i valori interi, escluso lo 0 (i numeri positivi corrispondono al caso $j = l - 1/2$, mentre quelli negativi al caso $j = l + 1/2$). Allora $l\sigma = -(1 + \varkappa)$, e quindi

$$(\sigma\mathbf{p})\,\chi = -\left(g' + \frac{1-\varkappa}{r}\,g\right)\Omega_{jlm}.$$

Sostituendo questa espressione nella prima delle equazioni (35,2), lo spinore sferico Ω_{jlm} nei due membri dell'equazione si elide. Operando analogamente anche con la seconda equazione[1]), come risultato otteniamo il seguente sistema per le funzioni radiali:

$$\begin{cases} f' + \dfrac{1+\varkappa}{r}\,f - (\varepsilon + m - U)\,g = 0, \\ g' + \dfrac{1-\varkappa}{r}\,g + (\varepsilon - m - U)\,f = 0, \end{cases} \tag{35,4}$$

oppure

$$\begin{cases} (fr)' + \dfrac{\varkappa}{r}\,(fr) - (\varepsilon + m - U)\,gr = 0, \\ (gr)' - \dfrac{\varkappa}{r}\,(gr) + (\varepsilon - m - U)\,fr = 0. \end{cases} \tag{35,5}$$

Studiamo il comportamento di f e di g alle piccole distanze, supponendo che il campo $U(r)$ cresca per $r \to 0$ piú rapidamente di $1/r$. Allora nella regione delle piccole distanze le equazioni (35,4) assumono la forma

$$f' + Ug = 0, \qquad g' - Uf = 0.$$

Esse hanno soluzioni reali del tipo

$$\begin{aligned} f &= \text{costante}\cdot\text{sen}\left(\int U dr + \delta\right), \\ g &= \text{costante}\cdot\cos\left(\int U dr + \delta\right), \end{aligned} \tag{35,6}$$

dove δ è una costante arbitraria. Queste funzioni oscillano per $r \to 0$, senza tendere a nessun limite. È facile vedere che questa situazione corrisponde alla « caduta » della particella nel centro.

Notiamo innanzitutto che nel caso considerato la funzione d'onda possiede uno spettro continuo per qualsiasi ε, incluso anche il caso

---

[1]) Non c'è bisogno di ripetere questi calcoli. È sufficiente notare che il passaggio dalla prima alla seconda equazione si realizza (come si vede dalle (35,1-2)) mediante la sostituzione

$$f \to g, \; g \to -f, \; m \to -m, \; l \to l', \; \varkappa \to -\varkappa.$$

$|\varepsilon| < m$. Effettivamente, la regione delle piccole distanze in questo caso non impone limitazioni sulla scelta della soluzione: la condizione al contorno per $r = 0$ per una funzione oscillante, in sostanza, non esiste, e quindi la scelta della costante rimane arbitraria. Un comportamento corretto della funzione d'onda nella regione dei grandi r (« saldata » con la funzione (35,8)) può essere ottenuto per qualsiasi ε mediante una scelta opportuna di δ.

Tuttavia, in uno stato dello spettro continuo qualsiasi pacchetto d'onde finisce, col trascorrere del tempo, per uscire da qualsivoglia regione finita di spazio (come è dimostrato dai ragionamenti esposti alla fine del III, § 10). Poiché per $|\varepsilon| < m$ la particella non può allontanarsi verso l'infinito, questo significa che essa va a finire nel centro delle coordinate, cioè cade nel centro. Il moto risulta, per cosí dire, infinito dalla parte dei piccoli r. La situazione ora descritta è assolutamente inammissibile nella teoria relativistica. Effettivamente, in forza della continuità dello spettro per $|\varepsilon| < m$ gli stati a frequenza positiva e quelli a frequenza negativa risultano non separati. Questo rende impossibile una qualsiasi descrizione razionale del sistema. In particolare, tale sistema sarebbe assolutamente instabile: qualsiasi perturbazione causerebbe la generazione di un numero incalcolabile di coppie. Quindi, un campo con potenziale, che per $r \to 0$ cresce piú rapidamente di $1/r$, non può essere considerato nell'ambito della teoria di Dirac. Sottolineiamo che questo vale per i potenziali di ambedue i segni. Sebbene si possa parlare di « caduta » soltanto nel caso di attrazione, poiché il segno di $U = e\Phi$ dipende anche dal segno della carica e, in un caso si comportano in modo anomalo i livelli elettronici e nell'altro quelli positronici.

Consideriamo ora il comportamento delle funzioni d'onda alle grandi distanze. Se il campo $U(r)$ decresce abbastanza rapidamente per $r \to \infty$, nel determinare la forma asintotica delle funzioni d'onda alle grandi distanze, si può trascurare completamente il campo nelle equazioni. Per $\varepsilon > m$, cioè nella regione dello spettro continuo, si ritorna allora all'equazione del moto libero, e quindi la forma asintotica delle funzioni d'onda (onde sferiche) si differenzia da quella per una particella libera soltanto per la comparsa di « spostamenti di fase » supplementari, il valore dei quali è determinato dalla forma del campo alle piccole distanze[1]). Questi spostamenti dipendono dai valori di j e l, oppure, ciò che è lo stesso, dal numero $\varkappa$ introdotto prima (ed anche, ovviamente, dall'energia ε). Indicando questi spostamenti con $\delta_\varkappa$ e usando l'espressione dell'onda sferica libera (24,7), possiamo scrivere immediatamente la forma

---

[1]) Cfr. III, § 33. Come anche nella teoria non relativistica, $U(r)$ deve decrescere piú rapidamente di $1/r$. Il caso $U \sim 1/r$ sarà trattato a parte nel § 36.

asintotica cercata

$$\psi \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon+m}\,\Omega_{jlm}\operatorname{sen}\left(pr-\frac{\pi l}{2}+\delta_\varkappa\right)\\ -\sqrt{\varepsilon-m}\,\Omega_{jl'm}\operatorname{sen}\left(pr-\frac{\pi l'}{2}+\delta_\varkappa\right)\end{pmatrix} \qquad (35,7)$$

(dove $p=\sqrt{\varepsilon^2-m^2}$). Il coefficiente comune corrisponde alla normalizzazione delle funzioni radiali secondo la (24,5).

Le funzioni d'onda dello spettro discreto ($\varepsilon<m$) per $r\to\infty$ decrescono esponenzialmente secondo la legge

$$f=-\sqrt{\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon}}\,g=\frac{A_0}{r}\exp\left(-r\sqrt{m^2-\varepsilon^2}\right), \qquad (35,8)$$

dove A_0 è una costante.

Come anche nella teoria non relativistica, gli spostamenti di fase $\delta_\varkappa$ (piú precisamente, le quantità $e^{2i\delta_\varkappa}-1$) determinano l'ampiezza di diffusione nel campo considerato (di questo si parlerà piú dettagliatamente nel § 37). Non ci soffermeremo qui a studiare le proprietà di analicità di queste grandezze (cfr. III, § 128). Notiamo soltanto che $e^{2i\delta_\varkappa}$, come funzione dell'energia, ha, come prima, dei poli nei punti corrispondenti ai livelli degli stati legati della particella. Il residuo della funzione $e^{2i\delta_\varkappa}$ in questi poli è connesso in modo determinato al coefficiente dell'espressione asintotica della corrispondente funzione d'onda dello spettro discreto. Troviamo questa connessione, che generalizza la formula non relativistica III (128,17). I calcoli necessari sono del tutto analoghi a quelli fatti nel III, § 128.

Deriviamo le equazioni (35,5) rispetto all'energia

$$\left(\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}\right)'+\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}-(\varepsilon+m-U)\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}=rg,$$

$$\left(\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}\right)'-\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}+(\varepsilon-m-U)\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}=-rf.$$

Moltiplichiamo queste due equazioni rispettivamente per rg e $-rf$, e le due equazioni (35,5) rispettivamente per $-rg$ e rf, e quindi sommiamo membro a membro tutte e quattro le equazioni. Dopo tutte le semplificazioni otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(g\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}-f\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right)\right]=r^2(f^2+g^2).$$

Integriamo questa uguaglianza rispetto a r

$$r^2\left(g\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}-f\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right)=\int_0^r(f^2+g^2)\,r^2\,dr,$$

e quindi eseguiamo il passaggio al limite $r \to \infty$. In virtú della condizione di normalizzazione l'integrale nella parte destra dell'uguaglianza è uguale a 1. Nella parte sinistra invece teniamo conto del fatto che nella regione asintotica le funzioni g e f sono legate dall'uguaglianza

$$rg = \frac{(rf)'}{\varepsilon + m}$$

(che si ottiene dalla (35,5) trascurando i membri contenenti U e $1/r$). Come risultato finale otteniamo

$$\frac{1}{\varepsilon + m}\left[(rf)' \frac{\partial rf}{\partial \varepsilon} - rf\left(\frac{\partial rf}{\partial \varepsilon}\right)'\right] = 1. \qquad (35,9)$$

Questa formula differisce dalla formula analoga non relativistica (per la funzione χ) soltanto per il coefficiente ($\varepsilon + m$ invece di $2m$). Non c'è quindi bisogno di ripetere tutti i successivi calcoli, e riporteremo immediatamente la formula finale, valida nella regione vicino al punto $\varepsilon = \varepsilon_0$ (ε_0 è il livello energetico):

$$e^{2i\delta_\varkappa} = (-1)^l \frac{2A_0^2}{\varepsilon - \varepsilon_0} \sqrt{\frac{m - \varepsilon_0}{m + \varepsilon_0}}, \qquad (35,10)$$

dove A_0 è il coefficiente dell'espressione asintotica (35,8).

PROBLEMA

Trovare la forma della funzione d'onda nel limite dei piccoli r nel campo $U \sim r^{-s}$, dove $s < 1$.

Soluzione. Per una particella libera ai piccoli r abbiamo $f \sim r^l$, $g \sim r^{l'}$, e quindi per $l < l'$ abbiamo $f \gg g$, e per $l > l'$: $f \ll g$. Facciamo l'ipotesi (giustificata a posteriori dal risultato) che questa relazione sia valida anche nel campo considerato. Per $l < l'$ (cioè $l = j - 1/2$, $\varkappa = -l - 1$) nella prima delle equazioni (35,4) si può omettere il termine contenente g, e quindi si ha, come prima, $f \sim r^l$. Dalla seconda equazione abbiamo allora $g \sim rfU$, cioè $g \sim r^{l+1-s} = r^{l'-s}$. In modo analogo si tratta il caso $l > l'$. Come risultato otteniamo

$$\text{per } l < l': \quad f \sim r^l, \quad g \sim r^{l'-s};$$

$$\text{per } l > l': \quad f \sim r^{l-s}, \quad g \sim r^{l'}.$$

§ 36. *Moto in un campo coulombiano*

Iniziamo lo studio delle proprietà del moto nel caso molto importante del campo coulombiano analizzando il comportamento delle funzioni d'onda alle piccole distanze. Per concretezza considereremo un campo attrattivo $U = -Z\alpha/r$[1]).

---

[1]) In unità ordinarie $U = -Ze^2/r$. Passando alle unità relativistiche e^2 viene sostituito con la costante adimensionale α.

Per piccoli r nelle equazioni (35,5) si possono omettere i membri contenenti $\varepsilon \pm m$; allora

$$(fr)' + \frac{\varkappa}{r} fr - \frac{Z\alpha}{r} gr = 0,$$

$$(gr)' - \frac{\varkappa}{r} gr + \frac{Z\alpha}{r} fr = 0.$$

Le due funzioni fr e gr compaiono in ognuna di queste equazioni con parità di diritti. Quindi possiamo cercare queste funzioni ambedue sotto forma di uguali potenze di r: $fr = ar^{\gamma}, gr = br^{\gamma}$. Sostituendo nelle equazioni otteniamo le relazioni

$$a(\gamma + \varkappa) - bZ\alpha = 0, \qquad aZ\alpha + b(\gamma - \varkappa) = 0,$$

dalle quali

$$\gamma^2 = \varkappa^2 - (Z\alpha)^2. \tag{36,1}$$

Sia $(Z\alpha)^2 < \varkappa^2$. Allora γ è reale, e dei due valori deve essere scelto quello positivo: la soluzione corrispondente o non diverge per $r = 0$, oppure diverge meno rapidamente dell'altra[1]). In tal modo

$$\begin{gathered} f = \frac{Z\alpha}{\gamma + \varkappa} g = \text{costante} \cdot r^{-1+\gamma}, \\ \gamma = \sqrt{\varkappa^2 - Z^2\alpha^2} = \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2\alpha^2}. \end{gathered} \tag{36,2}$$

Sebbene la funzione d'onda possa diventare infinita per $r = 0$ (se $\gamma < 1$), l'integrale di $|\psi|^2$ rimane, ovviamente, convergente.

Se $(Z\alpha)^2 > \varkappa^2$, ambedue i valori di γ nella (36,2) risultano immaginari. Le soluzioni corrispondenti, per $r \to 0$, oscillano (come $r^{-1} \cos(|\gamma| \ln r)$), e quindi si ha di nuovo, come abbiamo già spiegato, la situazione della « caduta nel centro », inammissibile nella teoria relativistica. Poiché $\varkappa^2 \geqslant 1$, questo significa che il campo puramente coulombiano può essere considerato nella teoria di Dirac solo per $Z\alpha < 1$, cioè per $Z < 137$.

Nel caso reale del moto nel campo del nucleo l'andamento del potenziale alle piccole distanze si discosta dall'andamento coulombiano a causa della finitezza delle dimensioni del nucleo. Questo porta alla possibilità di principio che possano esistere nuclei a Z maggiori[2]).

Occorre ancora notare che anche nel caso di una carica puntiforme l'andamento del potenziale alle piccole distanze viene deformato

---

[1]) La scelta della soluzione che diverge meno rapidamente può essere argomentata considerando il potenziale « troncato » ad un certo raggio r_0 ed eseguendo poi il passaggio al limite $r_0 \to 0$, similmente a come è stato fatto nel III, § 35.

[2]) Per lo studio del problema dei potenziali « troncati » vedi V. S. Popov, Jadernaja Fisica, 12, 429, 1970; ZETF, 59, 965, 1970.

dalle correzioni radiative, circostanza che può anche cambiare il risultato. Il ruolo di queste correzioni per valori di $Z\alpha$ vicini all'unità non è stato, tuttavia, ancora studiato.

Passiamo ora alla soluzione esatta dell'equazione d'onda (*G. Darwin*, 1928; *W. Gordon*, 1928).

a) *Spettro discreto* ($\varepsilon < m$). Cercheremo le funzioni f e g nella forma

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{m+\varepsilon}\, e^{-\rho/2}\rho^{\gamma-1}(Q_1+Q_2), \\ g &= -\sqrt{m-\varepsilon}\, e^{-\rho/2}\rho^{\gamma-1}(Q_1-Q_2), \end{aligned} \tag{36,3}$$

dove sono state introdotte le notazioni

$$\rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m^2-\varepsilon^2}, \quad \gamma = \sqrt{\varkappa^2 - Z^2\alpha^2}. \tag{36,4}$$

Questa forma risulta naturale dall'andamento, già noto, delle funzioni per $\rho \to 0$ (36,2) e dalla decrescenza esponenziale ($\sim e^{-\rho/2}$) per $\rho \to \infty$. Poiché per $\rho \to \infty$ le funzioni f e g devono avere un comportamento asintotico uguale, da qui discende che per $\rho \to \infty$ sarà $Q_1 \gg Q_2$.

Sostituendo la (36,3) nella (35,4) otteniamo le equazioni

$$\rho(Q_1+Q_2)' + (\gamma+\varkappa)(Q_1+Q_2) - \rho Q_2 + Z\alpha\sqrt{\frac{m-\varepsilon}{m+\varepsilon}}(Q_1-Q_2) = 0,$$

$$\rho(Q_1-Q_2)' + (\gamma-\varkappa)(Q_1-Q_2) + \rho Q_2 - Z\alpha\sqrt{\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon}}(Q_1+Q_2) = 0$$

(l'apice significa la derivazione rispetto a ρ). La somma e la differenza di queste equazioni danno rispettivamente

$$\begin{aligned} \rho Q_1' + \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_1 + \left(\varkappa - \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) Q_2 &= 0, \\ \rho Q_2' + \left(\gamma + \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} - \rho\right) Q_2 + \left(\varkappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) Q_1 &= 0, \end{aligned} \tag{36,5}$$

oppure, eliminando Q_1 o Q_2

$$\rho Q_1'' + (2\gamma+1-\rho)Q_1' - \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_1 = 0,$$

$$\rho Q_2'' + (2\gamma+1-\rho)Q_2' - \left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_2 = 0$$

(occorre tener presente che $\gamma^2 - (Z\alpha\varepsilon/\lambda)^2 = \varkappa^2 - (Z\alpha m/\lambda)^2$). Le soluzioni, finite in $\rho = 0$, di queste equazioni sono

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda},\ 2\gamma+1,\ \rho\right), \\ Q_2 &= BF\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda},\ 2\gamma+1,\ \rho\right), \end{aligned} \tag{36,6}$$

dove $F(\alpha, \beta, z)$ è una funzione ipergeometrica confluente. Ponendo $\rho = 0$ in una qualsiasi delle equazioni (36,5), troviamo il legame tra le costanti A e B

$$B = -\frac{\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}}{\varkappa - \frac{Z\alpha m}{\lambda}} A. \tag{36,7}$$

Ambedue le funzioni ipergeometriche nella (36,6) devono ridursi a polinomi (in caso contrario esse cresceranno per $\rho \to \infty$ come e^{ρ}, e con esse crescerà, come $e^{\rho/2}$, tutta la funzione d'onda). La funzione $F(\alpha, \beta, z)$ si riduce ad un polinomio se il parametro α è un numero intero negativo o è uguale a zero. Introduciamo la notazione seguente:

$$\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} = -n_r. \tag{36,8}$$

Se $n_r = 1, 2, \ldots$, ambedue le funzioni ipergeometriche si riducono a polinomi. Se invece $n_r = 0$, solo una di esse si riduce a polinomio. L'uguaglianza $n_r = 0$ significa, però, che $\gamma = Z\alpha\varepsilon/\lambda$, e allora, come è facile verificare, $Z\alpha m/\lambda = |\varkappa|$. Se $\varkappa < 0$, il coefficiente B (36,7) si annulla e quindi $Q_2 = 0$, e la condizione richiesta non viene violata. Se invece $\varkappa > 0$, allora $B = -A$ e Q_2 rimane, per $n_r = 0$, una funzione divergente. In conclusione sono possibili i seguenti valori del numero quantico n_r:

$$n_r = \begin{cases} 0, 1, 2, \ldots & \text{per} \quad \varkappa < 0; \\ 1, 2, 3, \ldots & \text{per} \quad \varkappa > 0. \end{cases} \tag{36,9}$$

Dalla definizione (36,8) ricaviamo ora la seguente espressione per i livelli energetici discreti:

$$\frac{\varepsilon}{m} = \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(\sqrt{\varkappa^2 - (Z\alpha)^2} + n_r)^2}\right]^{-1/2}. \tag{36,10}$$

Per $Z\alpha \ll 1$ i primi termini dello sviluppo di questa formula danno

$$\frac{\varepsilon}{m} - 1 = -\frac{(Z\alpha)^2}{2(|\varkappa| + n_r)^2}\left\{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{|\varkappa| + n_r}\left[\frac{1}{|\varkappa|} - \frac{3}{4(|\varkappa| + n_r)}\right]\right\}.$$

Introducendo la notazione $n_r + |\varkappa| = n$ $(= 1, 2, \ldots)$ e notando che $|\varkappa| = j + 1/2$, si ritorna alla formula (34,4), da noi ricavata precedentemente mediante la teoria delle perturbazioni. Come abbiamo già detto alla fine del paragrafo 34, i termini successivi di questo sviluppo non hanno senso, poiché essi si confondono con le correzioni radiative. La formula (36,10), tuttavia, ha senso nella sua forma esatta per $Z\alpha \sim 1$. Notiamo che la doppia degenerazione dei livelli, evidente dalla formula approssimata (34,4), si mantiene

anche nella formula esatta; poiché in quest'ultima compare solo $|\varkappa|$, i livelli con l differenti coincidono come prima per uno stesso j.

Nella funzione d'onda ci è rimasto da determinare ancora il coefficiente generale di normalizzazione A. Come sempre, una funzione d'onda dello spettro discreto deve essere normalizzata con la condizione $\int |\psi|^2 dV = 1$; per le funzioni f e g questo significa

$$\int_0^\infty (f^2+g^2)\, r^2\, dr = 1.$$

Il metodo piú semplice per ricavare A è di ricorrere alla forma asintotica delle funzioni per $r \to \infty$. Mediante la formula asintotica

$$F(-n_r,\ 2\gamma+1,\ \rho) \approx \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)}(-\rho)^{n_r}$$

(vedi III (d,14)) troviamo

$$f \approx (-1)^{n_r} A \sqrt{m+\varepsilon}\, \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)}\, e^{-\lambda r}\, (2\lambda r)^{\gamma+n_r-1}.$$

Confrontando questa formula con l'espressione (36,22), che verrà ricavata piú avanti, troviamo

$$A = \frac{\lambda^2}{\Gamma(2\gamma+1)}\left[\frac{2\Gamma(2\gamma+1+n_r)\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\varkappa\right)}{Z\alpha m^2 \cdot n_r!}\right]^{1/2}.$$

Riunendo le formule ottenute, scriviamo le espressioni finali complete delle funzioni d'onda normalizzate

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \frac{\pm(2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma+1)}\left[\frac{(m\pm\varepsilon)\,\Gamma(2\gamma+n_r+1)}{4m\,\frac{Z\alpha m}{\lambda}\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\varkappa\right) n_r!}\right]^{1/2} \times$$
$$\times (2\lambda r)^{\gamma-1} e^{-\lambda r}\left\{\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\varkappa\right) F(-n_r,\ 2\gamma+1,\ 2\lambda r) \mp \right.$$
$$\left. \mp\, n_r F(1-n_r,\ 2\gamma+1,\ 2\lambda r)\right\} \qquad (36,11)$$

(i segni in alto si riferiscono a f, quelli in basso a g).

b) *Spettro continuo* ($\varepsilon > m$). Non è necessario risolvere nuovamente l'equazione d'onda per gli stati dello spettro continuo. Le funzioni d'onda, in questo caso, si ricavano dalle funzioni dello spettro discreto mediante la sostituzione[1])

$$\sqrt{m-\varepsilon} \to -i\sqrt{\varepsilon-m},\quad \lambda \to -ip,\quad -n_r \to \gamma - i\frac{Z\alpha\varepsilon}{p} \qquad (36,12)$$

(a proposito della scelta del segno nel prolungamento analitico della radice $\sqrt{m-\varepsilon}$ vedi III, § 128). Tuttavia, la normalizzazione delle funzioni deve essere calcolata di nuovo.

[1]) Da qui fino alla fine di questo paragrafo p significa $|p| = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$.

Eseguendo nella (36,11) la sostituzione indicata, rappresentiamo le funzioni f e g nella forma

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \sqrt{\varepsilon+m} \\ i\sqrt{\varepsilon-m} \end{matrix}\right\} \cdot A' e^{ipr} (2pr)^{\gamma-1} [e^{i\xi} F(\gamma - i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr) \mp$$
$$\mp e^{-i\xi} F(\gamma+1-i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr)],$$

dove A' è la nuova costante di normalizzazione e dove sono state introdotte le notazioni

$$\nu = \frac{Z\alpha\varepsilon}{p}, \qquad e^{-2i\xi} = \frac{\gamma - i\nu}{\varkappa - i\nu \dfrac{m}{\varepsilon}} \tag{36,13}$$

(la grandezza ξ è reale poiché $\gamma^2 + (Z\alpha\varepsilon/p)^2 = \varkappa^2 + (Z\alpha m/p)^2$).

In accordo con la nota formula

$$F(\alpha, \beta, z) = e^z F(\beta - \alpha, \beta, -z)$$

(vedi III (d, 10)) abbiamo

$$F(\gamma+1-i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr) = e^{-2ipr} F(\gamma+i\nu,\ 2\gamma+1,\ 2ipr) =$$
$$= e^{-2ipr} F^*(\gamma - i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr).$$

Quindi, otteniamo

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2iA' \sqrt{\varepsilon \pm m}\, (2pr)^{\gamma-1} \begin{matrix} \mathrm{Im} \\ \mathrm{Re} \end{matrix} \{e^{i(pr+\xi)} F(\gamma - i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr)\}. \tag{36,14}$$

L'espressione asintotica di queste funzioni si trova mediante la formula III (d, 14), nella quale, nel caso considerato, è essenziale soltanto il primo termine (il secondo decresce con una potenza maggiore di $1/r$)[1]:

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2iA' \sqrt{\varepsilon \pm m}\, \Gamma(2\gamma+1)\, (2pr)^{\gamma-1} \begin{matrix} \mathrm{Im} \\ \mathrm{Re} \end{matrix} \left\{ \frac{(2ipr)^{-\gamma+i\nu} e^{i(pr+\xi)}}{\Gamma(\gamma+1+i\nu)} \right\} =$$
$$= \frac{iA'\sqrt{\varepsilon+m}}{pr} e^{-\frac{\pi\nu}{2}} \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{|\Gamma(\gamma+1+i\nu)|} \begin{matrix} \mathrm{sen} \\ \cos \end{matrix} \left(pr + \delta_\varkappa + \nu \ln 2pr - \frac{\pi l}{2} \right), \tag{36,15}$$

dove

$$\delta_\varkappa = \xi - \arg \Gamma(\gamma+1+i\nu) - \frac{\pi\gamma}{2} + \frac{\pi l}{2}, \tag{36,16}$$

oppure

$$e^{2i\delta_\varkappa} = \frac{\varkappa - i\nu m/\varepsilon}{\gamma - i\nu} \frac{\Gamma(\gamma+1-i\nu)}{\Gamma(\gamma+1+i\nu)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \tag{36,17}$$

---

[1]) Come anche nel caso dell'equazione di Schrödinger, il fatto che il potenziale coulombiano decresca lentamente porta ad una deformazione delle fasi dell'onda, la quale diventa una funzione che varia lentamente al variare di r.

Per futuri rimandi, scriviamo qui l'espressione delle fasi nel caso ultrarelativistico ($\varepsilon \gg m$, $\nu \approx Z\alpha$):

$$e^{2i\delta_\varkappa} = \frac{\varkappa}{\gamma - iZ\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1-iZ\alpha)}{\Gamma(\gamma+1+iZ\alpha)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \tag{36,18}$$

Confrontando la (36,15) con la formula generale (35,7) per un'onda sferica normalizzata (e tenendo inoltre presente la definizione delle funzioni f e g (35,1)) si può ricavare la costante di normalizzazione A':

$$\frac{iA'}{p} e^{-\frac{\pi\nu}{2}} \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{|\Gamma(\gamma+1+i\nu)|} = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}.$$

In tal modo, otteniamo la seguente espressione definitiva per le funzioni d'onda dello spettro continuo[1]):

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{\frac{m \pm \varepsilon}{\pi\varepsilon}} e^{\frac{\pi\nu}{2}} \frac{|\Gamma(\gamma+1+i\nu)|}{\Gamma(2\gamma+1)} \frac{(2pr)^\gamma}{r} \times$$

$$\times \begin{matrix} \mathrm{Im} \\ \mathrm{Re} \end{matrix} \{e^{i(pr+\xi)} F(\gamma - i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr)\}. \tag{36,19}$$

Nel prolungamento analitico nella regione $\varepsilon < m$, l'espressione (36,17) assume la forma

$$e^{2i\delta_\varkappa} = \frac{\varkappa - Z\alpha m/\lambda}{\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda} \frac{\Gamma(\gamma+1-Z\alpha\varepsilon/\lambda)}{\Gamma(\gamma+1+Z\alpha\varepsilon/\lambda)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \tag{36,20}$$

Questa espressione ha dei poli nei punti dove $\gamma + 1 - Z\alpha\varepsilon/\lambda = 1 - n_r$, $n_r = 1, 2, \ldots$ (i poli della funzione Γ al denominatore), e anche nel punto $\gamma - Z\alpha\varepsilon = -n_r = 0$ (se contemporaneamente si ha $\varkappa < 0$); come era naturale, questi punti coincidono con i livelli discreti dell'energia.

Nell'intorno di uno qualsiasi dei poli con $n_r \neq 0$, abbiamo

$$e^{2i\delta_\varkappa} \approx \frac{\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda} - \varkappa\right) e^{i\pi(l-\gamma)}}{n_r \Gamma(2\gamma+1+n_r)} \Gamma\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right).$$

La forma della funzione Γ vicino al suo polo può essere stabilita mediante la nota formula $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \pi/\mathrm{sen}\,\pi z$:

$$\Gamma\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) \approx \frac{\pi}{\Gamma(n_r)\,\mathrm{sen}\,\pi(\gamma+1-Z\alpha\varepsilon/\lambda)},$$

$$\mathrm{sen}\,\pi\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) \approx \pi\cos\pi n_r \cdot \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)\cdot(\varepsilon-\varepsilon_0) =$$

$$= (-1)^{n_r} \frac{\pi Z\alpha m^2}{\lambda^3}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

---

[1]) Le funzioni d'onda per il caso di un campo repulsivo si ottengono cambiando il segno davanti a $Z\alpha$, cioè cambiando il segno di ν.

(ε_0 è il livello energetico). In tal modo[1])

$$e^{2i\delta_\varkappa} \approx (-1)^{l+n_r} \frac{e^{-i\pi\gamma}\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\varkappa\right)}{n_r!\Gamma(2\gamma+1+n_r)} \frac{\lambda^3}{Z\alpha m^2} \frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_0}. \qquad (36,21)$$

Alla fine del paragrafo precedente venne ricavata una formula, che legava il residuo della funzione $e^{2i\delta_\varkappa}$ nel suo polo con il coefficiente nella formula asintotica della funzione d'onda dello stato legato corrispondente. Nel caso di campo coulombiano, tuttavia, questa formula (35,10) deve essere un poco cambiata in relazione al fatto che invece dello sfasamento costante $\delta_\varkappa$ (come era nella (35,7)) nella (36,15) compare la somma $\delta_\varkappa + \nu \ln(2pr)$. Nel termine a sinistra della (35,10) occorre quindi scrivere non $e^{2i\delta_\varkappa}$, ma

$$\exp(2i\delta_\varkappa + 2i\nu \ln 2pr) \to e^{2i\delta_\varkappa}(2i\lambda r)^{2(n_r+\gamma)}.$$

Usando la (36,21) e determinando dalla (35,10) il coefficiente A_0 (che sarà ora una funzione di potenze di r), troviamo la forma asintotica della funzione d'onda normalizzata dello spettro discreto:

$$f = \left[\frac{(Z\alpha m/\lambda-\varkappa)(m+\varepsilon)\lambda^2}{2n_r!Z\alpha m^2\Gamma(2\gamma+1+n_r)}\right]^{1/2}(2\lambda r)^{n_r+\gamma}\frac{e^{-\lambda r}}{r}. \qquad (36,22)$$

Questa formula è già stata usata per ricavare il coefficiente nella (36,11).

§ 37. *Diffusione in un campo a simmetria centrale*

Scriviamo l'espressione asintotica della funzione d'onda, che descrive la diffusione di particelle nel campo di un centro di forza fisso, nella forma[2])

$$\psi = u_{\varepsilon p}e^{ipz} + u'_{\varepsilon' p'}\frac{e^{ipr}}{r}. \qquad (37,1)$$

Qui $u_{\varepsilon p}$ è l'ampiezza bispinoriale dell'onda piana incidente. Il bispinore $u'_{\varepsilon p'}$ è una funzione della direzione di diffusione $\boldsymbol{n}'$, e per ogni dato valore di $\boldsymbol{n}'$ coincide nella forma (ma naturalmente non nella normalizzazione) con l'ampiezza bispinoriale dell'onda piana che si propaga nella direzione $\boldsymbol{n}'$.

Abbiamo visto nel paragrafo 24 che l'ampiezza bispinoriale di un'onda piana è determinata completamente da una grandezza a due componenti, lo spinore tridimensionale w che rappresenta la funzione d'onda non relativistica nel sistema a riposo della particella. Mediante questo spinore viene espressa anche la densità di corrente: essa è proporzionale a w^*w (con un coefficiente di proporzionalità

---

[1]) È facile convincersi che questa formula resta valida anche nel caso $n_r = 0$.

[2]) Nei §§ 37, 38 p indica $|\boldsymbol{p}|$, e quindi gli indici ε, p apposti all'ampiezza vengono scritti separatamente.

che dipende solo dall'energia ε e che è quindi uguale per le particelle incidenti e per quelle emergenti). Quindi la sezione d'urto di diffusione è $d\sigma = (w'^* w'/(w^* w)\, do$ oppure, se (come anche nel § 24) si normalizza l'onda incidente con la condizione $w^* w = 1$,

$$d\sigma = w'^* w'\, do.$$

Introduciamo l'operatore di diffusione mediante la relazione

$$w' = \mathrm{f} w. \tag{37,2}$$

Poiché le grandezze w, w' hanno due componenti, l'operatore, definito in questo modo, è del tutto analogo all'ampiezza operatoriale di diffusione, che compare nella teoria non relativistica, nella quale si tiene conto dello spin (III, § 140). Quindi si possono usare qui direttamente le formule, ottenute nel vol. III, che esprimono l'operatore attraverso gli sfasamenti delle funzioni d'onda nel campo diffusore. Occorre soltanto trasformare questi sfasamenti esprimendo le fasi δ_l^+ e δ_l^-, introdotte nel III, § 140, attraverso lo sfasamento $\delta_\varkappa$, che compare nella formula relativistica (35,7). Ricordiamo che le fasi δ_l^+ e δ_l^- si riferivano a stati di momento angolare orbitale l e di momento totale $j = l + 1/2$ e $j = l - 1/2$. In accordo con la definizione (35,3) abbiamo $\varkappa = -l - 1$ per $j = l + 1/2$, e $\varkappa = l$ per $j = l - 1/2$. Quindi noi dobbiamo cambiare le notazioni come segue:

$$\delta_l^+ \to \delta_{-(l+1)}, \quad \delta_l^- \to \delta_l$$

(e ricordare che l'indice apposto alle fasi indica ora un valore del numero $\varkappa$!). In tal modo, otteniamo le seguenti formule:

$$\mathrm{f} = A + B\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}, \tag{37,3}$$

$$A = \frac{1}{2ip} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(e^{2i\delta_{-l-1}} - 1) + l(e^{2i\delta_l} - 1)]\, P_l(\cos\theta), \tag{37,4}$$

$$B = \frac{1}{2p} \sum_{l=1}^{\infty} (e^{2i\delta_{-l-1}} - e^{2i\delta_l})\, P_l^1(\cos\theta), \tag{37,5}$$

dove $\mathbf{v} = [\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']/|[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']|$.

Poiché w è la funzione d'onda spinoriale nel sistema di riferimento in quiete, anche le proprietà di polarizzazione della diffusione vengono descritte mediante f dalle stesse formule, ricavate nel vol III, § 140.

Nel caso di un campo coulombiano risulta possibile esprimere ambedue le funzioni $A(\theta)$ e $B(\theta)$ mediante una sola funzione. Indichiamo brevemente lo sviluppo dei calcoli corrispondenti[1]).

---

[1]) R. L. Gluckstern, S. R. Lin, J. Math. Phys. 5, 1594 (1964).

Per un campo coulombiano gli sfasamenti $\delta_\varkappa$ sono dati dalla formula (36,17), che rappresentiamo ora nella forma

$$\begin{aligned} e^{2i\delta_\varkappa} &= -\left(\varkappa - i\,\frac{Ze^2m}{p}\right)\frac{\varkappa}{|\varkappa|}\,C_\varkappa, \\ C_\varkappa &= -\frac{\Gamma(\gamma - i\nu)}{\Gamma(\gamma+1+i\nu)}\,e^{i\pi(|\varkappa|-\gamma)} \end{aligned} \tag{37,6}$$

(notiamo che $e^{i\pi l} = e^{i\pi\varkappa}$ per $\varkappa > 0$, e $e^{i\pi l} = -e^{i\pi\varkappa}$ per $\varkappa < 0$). Mediante le grandezze introdotte le serie (37,4-5) possono essere rappresentate nella forma

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{p}\,G(\theta) - i\,\frac{Ze^2m}{p^2}\,F(\theta), \\ B(\theta) &= -\frac{i}{p}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\cdot G(\theta) + \frac{Ze^2m}{p^2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}\cdot F(\theta), \end{aligned} \tag{37,7}$$

dove

$$G(\theta) = \frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l^2 C_l\,(P_l + P_{l-1}), \qquad F(\theta) = \frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l C_l\,(P_l - P_{l-1}). \tag{37,8}$$

Nella trasformazione della serie $B(\theta)$ sono state usate le seguenti formule di ricorrenza tra i polinomi di Legendre:

$$P_l^1 + P_{l-1}^1 = -\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}\cdot l\,(P_l - P_{l-1}), \tag{37,9}$$

$$P_l^1 - P_{l-1}^1 = \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\cdot l\,(P_l + P_{l-1}). \tag{37,10}$$

D'altra parte, in virtú dell'identità

$$\begin{aligned} (1+\cos\theta)\,\frac{d}{d\cos\theta}\,[P_l(\cos\theta) - P_{l-1}(\cos\theta)] &= \\ = l\,[P_l(\cos\theta) + P_{l-1}(\cos\theta)] \end{aligned} \tag{37,11}$$

le funzioni $F(\theta)$ e $G(\theta)$ sono legate tra loro dalla relazione

$$G = (1-\cos\theta)\,\frac{dF}{d\cos\theta} = -\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}\,\frac{dF}{d\theta}. \tag{37,12}$$

Quindi $A(\theta)$ e $B(\theta)$ risultano espresse attraverso l'unica funzione $F(\theta)$[1]).

§ 38. *Diffusione nel caso ultrarelativistico*

Studiamo a parte la diffusione nel caso ultrarelativistico ($\varepsilon \gg m$). In prima approssimazione trascuriamo completamente, nella funzione d'onda, la massa m. A questo scopo, è comodo usare

[1]) La funzione $F(\theta)$ non è esprimibile, in forma chiusa, attraverso funzioni elementari. Risulta, tuttavia, possibile scriverla sotto forma di un integrale definito doppio; vedi articolo indicato sopra.

la rappresentazione spinoriale $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, cosí che per $m = 0$ le equazioni per ξ e η si scindono

$$\begin{aligned} -i\sigma\nabla\xi &= (\varepsilon - U)\,\xi, \\ -i\sigma\nabla\eta &= -(\varepsilon - U)\,\eta \end{aligned} \tag{38,1}$$

(assumono la forma « neutrinica», § 30).

Allo stato di elicità dell'elettrone, polarizzato lungo la direzione $\boldsymbol{p}$, corrisponde la funzione d'onda $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre all'elettrone con la polarizzazione opposta corrisponde $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$. Per il fatto che le equazioni per ξ e η sono separate, è evidente che la proprietà appena citata non viene meno nel processo di diffusione. In altre parole, nella diffusione di elettroni ultrarelativistici la elicità si conserva. Da considerazioni di simmetria (polarizzazione longitudinale) è chiaro che nella diffusione di particelle di elicità determinata manca l'asimmetria azimutale. Si può anche affermare che la sezione d'urto di diffusione di elettroni a elicità determinata non dipende dal segno della elicità; questo discende dal fatto che un campo centrale è invariante rispetto all'inversione, mentre il segno della elicità per l'inversione cambia in quello opposto.

Nel caso ultrarelativistico le formule (37,3-5) possono essere fortemente semplificate (*D. R. Yennie*, *D. G. Ravenhall*, *R. N. Wilson*, 1954).

Sia l'elettrone incidente polarizzato, per esempio, lungo la direzione del moto $\boldsymbol{n}$. Per un'onda piana con un dato valore di $\boldsymbol{n}\sigma$ lo spinore $\xi\ (= (\varphi + \chi)/\sqrt{2})$ è proporzionale a quello stesso spinore tridimensionale w, che figurava nella rappresentazione standard dell'onda. Per questo, il legame tra le ampiezze spinoriali dell'onda incidente e dell'onda diffusa è realizzato, nella nuova rappresentazione, dal medesimo operatore f.

A seguito della diffusione la polarizzazione ruota insieme all'impulso e assume la direzione $\boldsymbol{n}'$. L'azione dell'operatore f sulla funzione d'onda di spin dell'elettrone si riduce quindi alla rotazione di un angolo θ (angolo formato da $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{n}'$) attorno all'asse $\boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']$. A sua volta, questa rotazione è equivalente alla rotazione del sistema di coordinate attorno a quello stesso asse nella direzione opposta, cioè di un angolo $-\theta$. Da qui discende che l'operatore f deve coincidere (a meno di un coefficiente) con l'operatore che realizza la trasformazione della funzione d'onda per la rotazione citata del sistema di coordinate, cioè con l'operatore (18,17), dove $\theta \to -\theta$. Da un confronto della (37,3) con la (18,17) troviamo la relazione

$$\frac{B}{A} = -i\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}. \tag{38,2}$$

In tal modo, nel limite ultrarelativistico abbiamo

$$\mathrm{f} = A(\theta)\left[1 - i\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}\right]. \tag{38,3}$$

L'espressione (37,4) per A (θ) può venire anch'essa semplificata se si sfrutta la relazione tra gli sfasamenti $\delta_\varkappa$ e $\delta_{-\varkappa}$, che compare nel limite ultrarelativistico. Per ricavare questa relazione notiamo che le equazioni (35,4) per le funzioni f e g, dopo l'esclusione dei termini contenenti m, diventano invarianti per la sostituzione

$$\varkappa \to -\varkappa, \quad f \to g, \quad g \to -f,$$

che non interessa i parametri della particella o del campo stesso. Per questa ragione deve valere la relazione $f_\varkappa/g_\varkappa = -g_{-\varkappa}/f_{-\varkappa}$, e, dopo la sostituzione delle espressioni asintotiche, troviamo le relazioni

$$\mathrm{tg}\left(pr - \frac{l\pi}{2} + \delta_\varkappa\right) = -\,\mathrm{cotg}\left(pr - \frac{l'\pi}{2} + \delta_{-\varkappa}\right),$$

$$\delta_\varkappa = \delta_{-\varkappa} - (l' - l)\frac{\pi}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

dalle quali discende

$$e^{2i\delta_\varkappa} = e^{2i\delta_{-\varkappa}}. \tag{38,4}$$

Usando questa relazione (e sostituendo nel primo termine della somma nella (37,4) l'indice di sommatoria l con $l - 1$) otteniamo[1])

$$A(\theta) = \frac{1}{2ip}\sum_{l=1}^{\infty} l\,(e^{2i\delta_l} - 1)\,[P_l(\cos\theta) + P_{l-1}(\cos\theta)]. \tag{38,5}$$

Dalla (38,2) discende che $\mathrm{Re}\,(AB^*) = 0$. Questo significa che nell'approssimazione considerata la sezione d'urto non dipende dalla polarizzazione iniziale delle particelle, e che un fascio non polarizzato rimane tale anche dopo la diffusione (vedi le formule III (140,8-10)). Notiamo anche che per $\theta \to \pi$ l'espressione A (θ) (38,5) tende a zero come $(\pi - \theta)^2$ (ricordiamo che $P_l(-1) = (-1)^l$). Contemporaneamente tende a zero anche la sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{do} = |A|^2 + |B|^2 = \frac{|A(\theta)|^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}. \tag{38,6}$$

Le proprietà citate vengono meno, naturalmente, nelle approssimazioni successive in m/ε. In particolare, un'analisi mostra che per $\theta \to \pi$ la sezione d'urto tende ad un limite proporzionale a $(m/\varepsilon)^2$.

[1]) Con una trasformazione analoga alla formula (37,5) si può ottenere di nuovo la relazione (38,2). Per fare questo è necessario usare le formule di ricorrenza per i polinomi di Legendre (37,10).

Per il campo coulombiano nel caso ultrarelativistico gli sfasamenti $\delta_\varkappa$ non dipendono dall'energia, come è chiaro dalla formula (36,18)[1]. In un campo coulombiano puro la sezione d'urto di diffusione per $\varepsilon \gg m$ ha, quindi, la forma

$$d\sigma = \frac{\tau(\theta)}{\varepsilon^2}\, do, \tag{38,7}$$

dove τ è funzione solo dell'angolo.

§ 39. *Sistema di funzioni d'onda dello spettro continuo per la diffusione nel campo coulombiano*

In seguito (§ 93) verranno studiati diversi processi anelastici, che avvengono nella diffusione di elettroni ultrarelativistici nel campo di un nucleo pesante ($Z\alpha \sim 1$). Per il calcolo dei corrispondenti elementi di matrici ci saranno necessarie le funzioni d'onda, la cui forma asintotica (per $r \to \infty$) si ottiene componendo un'onda piana e un'onda sferica.

Noi vedremo che nel caso ultrarelativistico (energia dell'elettrone $\varepsilon \gg m$) il ruolo fondamentale nella diffusione è svolto dai trasferimenti di impulso (dall'elettrone al nucleo) dell'ordine $q = |\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}| \sim m$. A questi valori di q corrispondono « distanze d'urto » $\rho \sim 1/q \sim 1/m$, e per gli angoli di diffusione dell'elettrone valgono le relazioni[2])

$$\theta \sim \frac{q}{p} \sim \frac{m}{\varepsilon}. \tag{39,1}$$

In termini di coordinate r (distanza dal centro) e di variabile $z = r\cos\theta$ queste relazioni danno il seguente dominio di valori:

$$\rho \equiv r \operatorname{sen}\theta \sim \frac{1}{m}, \quad p(r-z) = pr(1-\cos\theta) \sim 1. \tag{39,2}$$

Inoltre vale la relazione $r \sim \varepsilon/m^2$, cioè siamo nella regione delle grandi distanze.

Scriviamo l'equazione di Dirac nella forma

$$(\varepsilon - U - m\beta + i\boldsymbol{\alpha}\nabla)\psi = 0, \quad U = -\frac{Z\alpha}{r}. \tag{39,3}$$

Applicando l'operatore $(\varepsilon - U + m\beta - i\boldsymbol{\alpha}\nabla)$, trasformiamo la (39,3) in un'equazione del secondo ordine

$$(\Delta + p^2 - 2\varepsilon U)\psi = (-i\boldsymbol{\alpha}\nabla U - U^2)\psi. \tag{39,4}$$

Poiché nella regione considerata $r \gg Z\alpha/\varepsilon$, si ha la relazione $U \ll \varepsilon$. In prima approssimazione, nella (39,4) si può trascurare la

[1]) Questo si vede direttamente dalle equazioni (38,1), poiché per il campo coulombiano l'energia ε può venire esclusa completamente dalle equazioni mediante la sostituzione $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}'/\varepsilon$.

[2]) In questo paragrafo p sta per $|\boldsymbol{p}|$.

parte destra. La parte restante dell'equazione

$$\left(\Delta + p^2 + \frac{2\varepsilon Z\alpha}{r}\right)\psi = 0 \tag{39,5}$$

coincide nella forma con l'equazione non relativistica di Schrödinger in un campo coulombiano

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta + \frac{p^2}{2m} + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi = 0,$$

differendo da essa solo per un cambiamento evidente delle notazioni dei parametri (nell'« energia potenziale » c'è, in piú, il fattore ε/m). Noi possiamo, quindi, scrivere immediatamente la soluzione avente la forma asintotica dovuta (vedi III, § 136).

Cosí, la funzione d'onda, contenente un'onda asintoticamente piana ($\backsim e^{ipr}$) e un'onda sferica divergente, ha la forma

$$\begin{gathered}\psi_{\varepsilon p}^{(+)} = C\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{ipr}F\left(\frac{iZ\alpha\varepsilon}{p},\ 1,\ i(pr - \boldsymbol{pr})\right),\\ C = e^{\pi Z\alpha\varepsilon/2p}\Gamma\left(1 - i\frac{Z\alpha\varepsilon}{p}\right),\end{gathered} \tag{39,6}$$

dove F è una funzione ipergeometrica confluente, e $u_{\varepsilon p}$ è l'ampiezza bispinoriale costante dell'onda piana, normalizzata con la condizione da noi adottata (23,4)

$$\bar{u}_{\varepsilon p}u_{\varepsilon p} = 2m. \tag{39,7}$$

La funzione d'onda (39,6) è normalizzata in modo che l'onda piana abbia la forma asintotica solita

$$\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{ipr},$$

corrispondente ad una « particella nell'unità di volume ». Poiché nel caso ultrarelativistico $p \approx \varepsilon$, nella (39,6) si può fare la sostituzione $Z\alpha\varepsilon/p \approx Z\alpha$:

$$\begin{gathered}\psi_{\varepsilon p}^{(+)} = C\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{ipr}F(iZ\alpha,\ 1,\ i(pr - \boldsymbol{pr})).\\ C = e^{Z\alpha\pi/2}\Gamma(1 - iZ\alpha).\end{gathered} \tag{39,8}$$

Notiamo che, anche se si considerano distanze tanto grandi per le quali vale la relazione $pr \gg 1$, nella (39,8) non si può sostituire la funzione ipergeometrica con la sua espressione asintotica; argomento della funzione F, infatti, non è pr, ma la quantità $pr\,(1 - \cos\theta)$, che noi non supponiamo grande[1]).

---

[1]) Nel vol. III, § 135 venivano considerati r grandi a piacere, talché questa sostituzione era possibile per angoli θ qualsiasi.

Per le applicazioni, nella funzione ψ risulta necessaria anche l'approssimazione successiva, avente una struttura spinoriale, differente dalla struttura della (39,8) (che si riduce al fattore $u_{\varepsilon\mu}$). Per trovare questa nuova approssimazione, scriviamo nella forma

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ipr} (u_{\varepsilon\mu} F + \varphi).$$

Nel membro destro dell'equazione (39,4) conserviamo ora il termine con la prima potenza di U, e per la funzione φ otteniamo l'equazione

$$(\Delta - 2i\boldsymbol{p}\nabla - 2\varepsilon U)\,\varphi = -iu_{\varepsilon\mu}\boldsymbol{\alpha}\nabla U. \qquad (39,9)$$

La soluzione è facile da trovare, se si nota che la funzione F soddisfa l'equazione

$$(\Delta - 2i\boldsymbol{p}\nabla - 2\varepsilon U)\,F = 0$$

(cosa facilmente verificabile sostituendo la (39,6) nella (39,5)). Applicando a quest'equazione l'operatore ∇, otteniamo

$$(\Delta - 2i\boldsymbol{p}\,\nabla - 2\varepsilon U)\,\nabla F = 2\varepsilon F\,\nabla U.$$

Confrontando con l'equazione (39,9), troviamo

$$\varphi = -\frac{i}{2\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}\nabla)\,u_{\varepsilon\mu} F.$$

Scriviamo l'espressione definitiva per $\psi^{(+)}$ e per la corrispondente funzione $\psi^{(-)}$ che contiene nella sua espressione asintotica un'onda sferica convergente.

$$\psi^{(+)}_{\varepsilon\mu} = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ipr}\left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F(iZ\alpha,\ 1,\ i(pr - \boldsymbol{pr}))\,u_{\varepsilon\mu},$$

$$\psi^{(-)}_{\varepsilon\mu} = \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ipr}\left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F(-iZ\alpha,\ 1,\ -i(pr + \boldsymbol{pr}))\,u_{\varepsilon\mu}, \qquad (39,10)$$

$$C = e^{\pi Z\alpha/2}\Gamma(1 - iZ\alpha)$$

(*W. H. Furry*, 1934). Scriviamo anche le funzioni analoghe ($\psi_{-\varepsilon-\mu}$) a « frequenza negativa », che saranno necessarie nello studio di processi con la partecipazione di positroni. Queste funzioni si possono ricavare dalla funzione $\psi_{\varepsilon\mu}$ mediante la sostituzione $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$, $\varepsilon \to -\varepsilon$, dove $p = |\boldsymbol{p}|$ non cambia (come conseguenza di quest'ultimo fatto, il parametro della funzione ipergeometrica $iZ\alpha$ cambia segno, come si vede dall'espressione originaria (39,6), nella quale questo parametro compare nella forma $iZ\alpha\varepsilon/p$). In tal modo, otteniamo

$$\psi^{(+)}_{-\varepsilon-\mu} = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ipr}\left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F(-iZ\alpha,\ 1,\ i(pr + \boldsymbol{pr}))\,u_{-\varepsilon-\mu},$$

$$\psi^{(-)}_{-\varepsilon-\mu} = \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ipr}\left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F(iZ\alpha,\ 1,\ -i(pr - \boldsymbol{pr}))\,u_{-\varepsilon-\mu}, \qquad (39,11)$$

$$C = e^{-\pi Z\alpha/2}\Gamma(1 + iZ\alpha).$$

A proposito dei calcoli eseguiti, è necessario fare ancora l'osservazione seguente. La condizione asintotica da noi posta non è di per se stessa affatto sufficiente per una scelta univoca della soluzione dell'equazione d'onda (questo è chiaro anche solo dal fatto che a ψ si può sempre aggiungere, senza violare questa condizione, una qualsiasi onda sferica divergente coulombiana). Scrivendo la soluzione dell'equazione (39,5) nella forma (39,6), implicitamente abbiamo scelto una soluzione finita per $r = 0$. Questa richiesta era necessaria nel vol. III, §§ 135, 136, dove si consideravano soluzioni dell'equazione esatta di Schrödinger, che valevano in tutto lo spazio[1]). Nel caso considerato, invece, l'equazione (39,5) vale solo per le grandi distanze, e quindi la scelta fatta della soluzione necessita di una giustificazione supplementare.

Questa è data dal fatto che a grandi « distanze d'urto » $\rho = r \operatorname{sen} \theta$ corrispondono grandi momenti angolari orbitali l e piccoli angoli di diffusione θ; per $\rho \sim 1/m$ abbiamo

$$l \sim \rho p \sim \rho\varepsilon \sim \frac{\varepsilon}{m} \gg 1,$$

mentre l'angolo θ può essere stimato in maniera quasi-classica

$$\theta \sim \frac{1}{p} \int \frac{dU}{dr} dt \sim \frac{U'(\rho)\rho}{p} \sim \frac{m}{\varepsilon} \ll 1.$$

Questo significa che nello sviluppo di ψ in onde sferiche compariranno (nel dominio considerato di r e θ) principalmente onde con i grandi valori di l indicati. Un'onda sferica a grandi l decresce chiaramente fino ad assumere valori piccoli a misura che ci si avvicina all'origine delle coordinate oltre le distanze « classicamente raggiungibili » $r \ll l/\varepsilon$ (fatto reso possibile dalla barriera centrifuga). Se si effettua la « saldatura » della soluzione dell'equazione (39,5) con la soluzione dell'equazione esatta (39,4) alle piccole distanze per $r \sim r_1$, dove $l/\varepsilon \gg r_1 \gg Z\alpha/\varepsilon$, la condizione al contorno per la soluzione dell'equazione (39,5) consisterà nel richiedere che essa sia piccola, fatto che giustifica la scelta da noi fatta.

PROBLEMA

Trovare la correzione (di ordine relativo $\sim Z\alpha$) alla funzione d'onda non relativistica dello spettro discreto nel caso di un campo coulombiano attrattivo con $Z\alpha \ll 1$.

Soluzione. La velocità dell'elettrone nello stato legato è $v \sim Z\alpha$ e quindi per $Z\alpha \ll 1$ in approssimazione zero la funzione d'onda è non relativistica, cioè

$$\psi = u\psi_{\text{non rel}},$$

[1]) Nella soluzione esposta nel vol. III, § 135, questa condizione era garantita dalla scelta dell'integrale particolare della forma (135,1) al posto della somma generale di integrali con vari valori di β_1 e β_2.

dove $\psi_{\text{non rel}}$ è la funzione di Schrödinger, u è un bispinore della forma $u = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$, dove w è uno spinore che descrive lo stato di polarizzazione dell'elettrone. Nell'approssimazione successiva scriviamo $\psi = u\psi_{\text{non rel}} + \psi^{(1)}$ e, sostituendo nella (39,4), troviamo per $\psi^{(1)}$ l'equazione

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta - |\varepsilon_n| + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi^{(1)} = i\frac{Z\alpha}{2m}\left(\nabla\frac{1}{r}\right)(\alpha u)\,\psi_{\text{non rel}},$$

dove ε_n è il livello energetico discreto non relativistico. Qui sono stati omessi i termini di ordine $(Z\alpha)^2$ (occorre tener presente che nel caso non relativistico le distanze fondamentali sono dell'ordine del raggio di Bohr $r \sim 1/mZ\alpha$). La soluzione di questa equazione è $\psi^{(1)} = -\frac{i}{2m}\alpha u\nabla\psi_{\text{non rel}}$ e quindi per ψ troviamo

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m}\alpha\nabla\right)u\psi_{\text{non rel}}.$$

§ 40. *Elettrone nel campo di un'onda elettromagnetica piana*

L'equazione di Dirac può essere risolta esattamente per un elettrone che si muove nel campo di un'onda elettromagnetica piana (*D. M. Volkov*, 1937).

Il campo di un'onda piana a quadrivettore d'onda k ($k^2 = 0$) dipende dalle 4-coordinate solo nella combinazione $\varphi = kx$, e quindi per il 4-potenziale abbiamo

$$A^\mu = A^\mu(\varphi), \tag{40,1}$$

che soddisfa la condizione di gauge di Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = k_\mu A^{\mu\prime} = 0$$

(l'apice significa la derivazione rispetto a φ). Poiché in A un termine costante non è essenziale, in questa condizione si può omettere l'apice e scrivere

$$kA = 0. \tag{40,2}$$

Partiamo dall'equazione del secondo ordine (32,6), nella quale il tensore del campo ha la forma

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu. \tag{40,3}$$

Sviluppando il quadrato $(i\partial - eA)^2$ occorre tenere presente che, in virtú della (40,2), si ha $\partial_\mu(A^\mu\psi) = A^\mu\partial_\mu\psi$. Come risultato otteniamo l'equazione

$$[-\partial^2 - 2ie(A\partial) + e^2A^2 - m^2 - ie\hat{k}\hat{A}']\,\psi = 0 \tag{40,4}$$

($\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu$).

Cerchiamo la soluzione di questa equazione nella forma

$$\psi = e^{-ipx}F(\varphi), \tag{40,5}$$

dove p è un quadrivettore costante. L'aggiunta a p di qualsiasi vettore del tipo costante $\cdot k$ non cambia la forma della funzione ψ (è necessario solo il corrispondente cambio di notazione della funzione $F(\varphi)$). Senza perdita di generalità, si può quindi imporre a p una condizione addizionale. Sia

$$p^2 = m^2. \tag{40,6}$$

Allora, spegnendo il campo, i numeri quantici p^μ si trasformano in componenti del quadrivettore energia-impulso di una particella libera. Il senso delle componenti del 4-vettore p, in presenza di un campo, risulta piú chiaro in un sistema di riferimento speciale, scelto in modo che in esso sia $A_0 = 0$. Sia il vettore $\boldsymbol{A}$, in questo sistema, diretto secondo l'asse x^1, e $\boldsymbol{k}$ secondo l'asse x^3 (sia cioè il campo elettrico dell'onda diretto lungo l'asse x^1, il campo magnetico lungo l'asse x^2, e l'onda si propaghi nella direzione x^3). Allora la (40,5) sarà un'autofunzione degli operatori

$$\mathrm{p}_1 = i\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \mathrm{p}_2 = i\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \mathrm{p}_0 - \mathrm{p}_3 = i\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

con gli autovalori p_1, p_2, $p_0 - p_3$ (questi operatori, come è facile vedere, commutano con l'hamiltoniano dell'equazione di Dirac). In tal modo, nel dato sistema di riferimento, p^1, p^2 sono le componenti dell'impulso generalizzato lungo gli assi x^1, x^2 e $p^0 - p^3$ è la differenza tra l'energia totale e la componente dell'impulso generalizzato lungo l'asse x^3.

Operando la sostituzione della (40,5) nella (40,4) notiamo che

$$\partial^\mu F = k^\mu F', \quad \partial_\mu \partial^\mu F = k^2 F'' = 0,$$

e per $F(\varphi)$ troviamo l'equazione

$$2i(kp)F' + [-2e(pA) + e^2A^2 - ie\hat{k}\hat{A}']F = 0.$$

L'integrale di questa equazione è

$$F = \exp\left\{-i\int_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\varphi + \frac{e\hat{k}\hat{A}}{2(kp)}\right\}\frac{u}{\sqrt{2p_0}},$$

dove $u/\sqrt{2p_0}$ è un bispinore costante qualsiasi (circa la forma della sua scrittura vedi piú avanti).

Tutte le potenze di $\hat{k}\hat{A}$ superiori alla prima sono nulle, poiché

$$\hat{k}\hat{A}\hat{k}\hat{A} = -\hat{k}\hat{k}\hat{A}\hat{A} + 2(kA)\hat{k}\hat{A} = -k^2A^2 = 0.$$

Si può quindi fare la sostituzione

$$\exp\frac{e\hat{k}\hat{A}}{2(kp)} = 1 + \frac{e}{2(kp)}\hat{k}\hat{A},$$

in modo che ψ assuma la forma

$$\psi_p = \left[1 + \frac{e}{2(pk)} \hat{k}\hat{A}\right] \frac{u}{\sqrt{2p_0}} e^{iS}, \tag{40,7}$$

dove[1])

$$S = -px - \int_0^{kx} \left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)} A^2\right] d\varphi. \tag{40,8}$$

Per chiarire le condizioni, imposte al bispinore u, supponiamo che l'onda subisca uno smorzamento piccolo a piacere. Allora per $A \to 0$ $x \to \infty$ e anche ψ deve trasformarsi nella soluzione dell'equazione libera di Dirac. A questo scopo $u = u(p)$ deve soddisfare l'equazione

$$(\hat{p} - m)\, u = 0. \tag{40,9}$$

Con questa condizione vengono eliminate tutte le soluzioni « ridondanti » dell'equazione del secondo ordine. Poiché u non dipende dalle coordinate, questa condizione vale anche per valori finiti di x, dove la presenza di un debole smorzamento non influisce sulla forma di ψ. In tal modo, $u(p)$ coincide con l'ampiezza bispinoriale dell'onda piana libera; supporremo che essa sia normalizzata con la stessa condizione (23,4): $\bar{u}u = 2m$.

I ragionamenti esposti permettono anche di chiarire immediatamente la normalizzazione delle funzioni d'onda (40,7). Per le funzioni d'onda dello spettro continuo l'integrale di normalizzazione si forma nelle regioni lontane dello spazio. Dopo l'introduzione di un debole smorzamento le funzioni d'onda in queste regioni coincideranno con le funzioni del moto libero. Da qui discende che le funzioni (40,7) soddisfano la stessa condizione di normalizzazione

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi^*_{p'} \psi_p d^3x = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \bar{\psi}_{p'} \gamma^0 \psi_p d^3x = \delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}), \tag{40,10}$$

cui soddisfano le onde libere piane.

Troviamo la densità di corrente, corrispondente alle funzioni (40,7). Notando che

$$\bar{\psi}_p = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2p_0}} \left[1 + \frac{e}{2(pk)} \hat{A}\hat{k}\right] e^{iS},$$

con una moltiplicazione diretta troviamo

$$j^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p = \frac{1}{p_0} \left\{ p^\mu - eA^\mu + k^\mu \left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2 A^2}{2(kp)} \right) \right\}. \tag{40,11}$$

Se $A^\mu(\varphi)$ sono funzioni periodiche, il loro valore medio (rispetto al tempo) si annulla, e quindi il valore medio della densità di cor-

[1]) Notiamo che S coincide con l'azione classica per una particella che si muove nel campo dell'onda, vedi II, § 47, problema 2.

rente è

$$\overline{j^\mu} = \frac{1}{p_0}\left(p^\mu - \frac{e^2}{2(kp)}\overline{A^2}k^\mu\right). \tag{40,12}$$

Troviamo anche la densità di impulso cinetico nello stato ψ_p. L'operatore dell'impulso cinetico è dato dalla differenza $\mathrm{p} - eA = i\partial - eA$. Mediante calcoli diretti troviamo

$$\psi_p^*(\mathrm{p}^\mu - eA^\mu)\psi_p = \bar{\psi}_p\gamma^0(\mathrm{p}^\mu - eA^\mu)\psi_p =$$
$$= p^\mu - eA^\mu + k^\mu\left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2A^2}{2(kp)}\right) + k^\mu\frac{ie}{8(kp)p_0}F_{\lambda\nu}(u^*\sigma^{\lambda\nu}u). \tag{40,13}$$

Il valore medio, rispetto al tempo, di questo quadrivettore, che indicheremo con q^μ, è

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2\overline{A^2}}{2(kp)}k^\mu. \tag{40,14}$$

Il suo quadrato è

$$q^2 = m_*^2, \quad m_* = m\sqrt{1 + \frac{e^2}{m^2}\overline{A^2}}, \tag{40,15}$$

dove m_* ha il ruolo di « massa efficace » dell'elettrone. Confrontando la (40,14) e la (40,12), vediamo che

$$\overline{j^\mu} = \frac{q^\mu}{p_0}. \tag{40,16}$$

Notiamo anche che la condizione di normalizzazione (40,10), espressa attraverso il vettore $\boldsymbol{q}$, ha la forma

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \psi_{p'}^*\psi_p d^3x = \frac{q_0}{p_0}\delta(\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}) \tag{40,17}$$

(il passaggio dalla (40,10) alla (40,17) è piú facilmente realizzabile nello speciale sistema di riferimento indicato prima).

§ 41. Moto dello spin in un campo esterno

Il passaggio all'approssimazione quasi-classica nell'equazione di Dirac viene fatto in modo analogo a quello seguito nella teoria non relativistica. Nell'equazione del secondo ordine (32,7a) sostituiamo ψ nella forma[1])

$$\psi = ue^{\frac{i}{\hbar}S}$$

(dove S è uno scalare, u un bispinore che varia lentamente). Si suppone che sia soddisfatta la condizione solita di quasi-classicità: l'impulso della particella deve variare poco su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda $\hbar/|\boldsymbol{p}|$.

[1]) Qui vengono usate unità ordinarie.

Nell'approssimazione di ordine zero in $\hbar$ si ottiene l'equazione relativistica classica ordinaria di Hamilton — Jacobi per l'azione S. Tutti i termini contenenti lo spin (e proporzionali a $\hbar$) scompaiono dalle equazioni di moto. Lo spin compare soltanto nell'approssimazione successiva in $\hbar$. In altre parole, l'effetto del momento magnetico dell'elettrone sul suo moto è sempre dello stesso ordine di grandezza delle correzioni quantistiche. Questo è del tutto naturale, vista la natura puramente quantistica dello spin, il cui valore è proporzionale a $\hbar$.

In questa situazione acquista un senso il problema del comportamento dello spin dell'elettrone, che compie un dato moto quasiclassico in un campo esterno. La soluzione del problema posto è contenuta nell'approssimazione successiva in $\hbar$ dell'equazione di Dirac. Noi ricorreremo, tuttavia, ad un altro metodo, piú significativo e che non è legato direttamente all'equazione di Dirac. Esso presenta il vantaggio di permettere di considerare il moto di qualsiasi particella, ivi comprese particelle con rapporto giromagnetico « anomalo », che non è descritto dall'equazione di Dirac.

Il nostro scopo è quello di stabilire l'equazione di moto dello spin per un moto (dato) qualsiasi della particella. Iniziamo dal caso non relativistico.

L'hamiltoniano non relativistico di una particella in un campo esterno è

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' - \mu\sigma\boldsymbol{H}, \tag{41,1}$$

dove in H′ sono stati inclusi tutti i termini non contenenti lo spin (vedi III, § 110); μ è il momento magnetico della particella. Questa forma dell'hamiltoniano non è legata con una particolare specie di particelle. Per gli elettroni $\mu = e\hbar/2mc$ (la carica dell'elettrone è $e = -|e|$), mentre per i nucleoni μ contiene anche una parte « anomala »[1])

$$\mu' = \mu - \frac{e\hbar}{2mc}. \tag{41,2}$$

In accordo con le regole generali della meccanica quantistica, l'equazione operatoriale del moto dello spin si ricava dalla formula seguente:

$$\dot{\mathrm{s}} = \frac{i}{\hbar}(\mathrm{Hs} - \mathrm{sH}) = \frac{i}{2\hbar}(\mathrm{H}\sigma - \sigma\mathrm{H}). \tag{41,3}$$

Sostituendo qui la (41,1) troviamo

$$\dot{\mathrm{s}}_i = -\frac{i\mu}{2\hbar} H_k(\sigma_k\sigma_i - \sigma_i\sigma_k) = -\frac{\mu}{\hbar} e_{ikl} H_k \sigma_l,$$

---

[1]) Se si tiene conto delle cosiddette correzioni radiative, anche il momento magnetico dell'elettrone contiene una piccolissima « parte anomala ».

ovvero

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{2\mu}{\hbar}[\mathbf{s}\boldsymbol{H}]. \tag{41,4}$$

Mediamo questa uguaglianza operatoriale rispetto allo stato del pacchetto d'onde quasi-classico, che si muove lungo una traiettoria data. Questa operazione si riduce alla sostituzione dell'operatore di spin con il suo valore medio $\bar{\boldsymbol{s}}$, e del vettore $\boldsymbol{H}$ con la funzione $\boldsymbol{H}(t)$, che rappresenta la variazione del campo magnetico nel punto dove si trova la particella (il pacchetto d'onda) per un moto dato secondo una traiettoria della particella stessa. Nell'approssimazione non relativistica (cioè nell'ambito dell'equazione di Pauli) $\mathbf{s} = \sigma/2$ è l'operatore di spin della particella nel suo sistema a riposo, il cui valore medio è stato indicato nel § 29 con $\zeta/2$. In tal modo, noi arriviamo all'equazione

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2\mu}{\hbar}[\zeta\boldsymbol{H}(t)]. \tag{41,5}$$

In questa forma l'equazione ha, in sostanza, carattere puramente classico. Questo significa che il vettore momento magnetico compie una precessione attorno alla direzione del campo con la velocità angolare $-2\mu\boldsymbol{H}/\hbar$, restando invariato in modulo[1]).

Nel caso non relativistico la velocità $\boldsymbol{v}$ della particella varia secondo l'equazione

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e}{mc}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}],$$

cioè il vettore $\boldsymbol{v}$ ruota attorno alla direzione di $\boldsymbol{H}$ con la velocità angolare $-e\boldsymbol{H}/mc$. Se $\mu' = 0$, allora $\mu = e\hbar/2mc$, e questa velocità angolare coincide con la velocità $-2\mu\boldsymbol{H}/\hbar$ con cui ruota il vettore ζ; in altre parole, il vettore polarizzazione conserva costante l'angolo che esso forma con la direzione del moto (vedremo piú avanti che questo risultato rimane valido anche nel caso relativistico).

Generalizziamo ora l'equazione (41,5) al caso relativistico. Per una descrizione covariante della polarizzazione occorre ricorrere ai 4-vettori a, introdotti al § 29, e l'equazione di moto dello spin deve determinare la derivata $da/d\tau$ rispetto al tempo proprio τ[2]).

---

[1]) Classicamente, l'equazione (41,5) si ricava direttamente dall'uguaglianza

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = [\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H}],$$

dove $\boldsymbol{M}$ è il momento della quantità di moto del sistema, $\boldsymbol{\mu}$ il suo momento magnetico; $[\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H}]$ è il momento delle forze agente sul sistema. Ponendo $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\hbar\zeta$, $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mu}{2s}\zeta = \mu\zeta$, otteniamo la (41,5).

[2]) Da questo punto in avanti porremo nuovamente $c = 1$, $\hbar = 1$.

La forma possibile di questa equazione può essere stabilita già da considerazioni di invarianza relativistica, se si tiene presente che la sua parte destra deve essere lineare e omogenea rispetto al tensore del campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ e al quadrivettore a^μ, e può contenere, oltre a queste grandezze, soltanto la 4-velocità $u^\mu = p^\mu/m$. A queste condizioni soddisfa soltanto un'equazione del tipo

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = \alpha F^{\mu\nu} a_\nu + \beta u^\mu F^{\nu\lambda} u_\nu a_\lambda, \tag{41,6}$$

dove α, β sono coefficienti costanti. È facile vedere che, in virtú della condizione $a_\mu u^\mu = 0$ e della antisimmetria del tensore $F^{\mu\nu}$ (da cui discende che $F^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 0$), non è possibile comporre nessun'altra espressione della forma richiesta.

Per $v \to 0$ questa equazione deve coincidere con la (41,5). Ponendo $a^\mu = (0, \zeta)$, $u^\mu = (1, 0)$, $\tau = t$, otteniamo

$$\frac{d\zeta}{dt} = \alpha\,[\zeta \boldsymbol{H}].$$

Confrontando con la (41,5), troviamo $\alpha = 2\mu$.

Per determinare β usiamo la condizione $a^i u_i = 0$. Derivando questa uguaglianza rispetto a τ e usando l'equazione classica del moto di una carica in un campo

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu} u_\nu$$

(vedi II, § 23), otteniamo

$$u_\mu \frac{da^\mu}{d\tau} = -a_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = -a_\mu \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\mu a_\nu.$$

Moltiplicando ora l'equazione (41,6) da ambedue le parti per u_μ, tenendo conto dell'uguaglianza $u_\mu u^\mu = 1$ e dividendo per il fattore comune $F^{\mu\nu} u_\mu a_\nu$, otteniamo

$$\beta = -2\left(\mu - \frac{e}{2m}\right) = -2\mu'.$$

In tal modo, otteniamo finalmente l'equazione relativistica del moto dello spin

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = 2\mu F^{\mu\nu} a_\nu - 2\mu' u^\mu F^{\nu\lambda} u_\nu a_\lambda \tag{41,7}$$

(*V. Bargmann, L. Michel, V. Telegdi*, 1959)[1]).

Passiamo ora dal quadrivettore a alla grandezza ζ, che caratterizza direttamente la polarizzazione della particella nel suo sistema « istantaneo » in quiete; il legame tra a e ζ è dato dalle formule

[1]) In una forma diversa, questa equazione venne per la prima volta ottenuta da *Ja. I. Frenkel* (1926).

(29,7-9). Notiamo subito che dalla (41,7) discende immediatamente che $a_\mu da^\mu/d\tau = 0$, e quindi $a_\mu a^\mu =$ costante. Poiché $a_\mu a^\mu = -\zeta^2$, questo è un risultato naturale: nel moto della particella la sua polarizzazione ζ rimane invariata in modulo.

L'equazione, che determina il cambiamento di direzione della polarizzazione, si ottiene passando, nella (41,7), a notazioni tridimensionali. Sviluppando le componenti spaziali di questa equazione, troviamo

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{2\mu m}{\varepsilon}[\boldsymbol{aH}] + \frac{2\mu m}{\varepsilon}(\boldsymbol{av})\boldsymbol{E} - \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{aE}) + \\ + \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}[\boldsymbol{aH}]) + \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{av})(\boldsymbol{vE}).$$

Qui occorre sostituire la (29,9), tenendo conto, nella derivazione, delle uguaglianze $\boldsymbol{p} = \varepsilon\boldsymbol{v}$, $\varepsilon^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ e delle equazioni del moto

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E} + e[\boldsymbol{vH}], \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = e(\boldsymbol{vE}). \tag{41,8}$$

Un calcolo elementare, anche se abbastanza lungo, porta alla seguente equazione[1]):

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{2\mu m + 2\mu'(\varepsilon - m)}{\varepsilon}[\boldsymbol{\zeta H}] + \frac{2\mu'\varepsilon}{\varepsilon + m}(\boldsymbol{vH})[\boldsymbol{v\zeta}] + \\ + \frac{2\mu m + 2\mu'\varepsilon}{\varepsilon + m}[\boldsymbol{\zeta}[\boldsymbol{Ev}]]. \tag{41,9}$$

Di particolare interesse non è tanto il cambiamento di direzione assoluta della polarizzazione nello spazio, quanto il suo cambiamento rispetto alla direzione del moto. Rappresentiamo $\boldsymbol{\zeta}$ nella forma

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{n}\zeta_{\parallel} + \boldsymbol{\zeta}_{\perp} \tag{41,10}$$

(dove $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}/v$) e scriviamo l'equazione per la proiezione della polarizzazione lungo la direzione del moto. Il calcolo, eseguito mediante le formule (41,8-9), porta al seguente risultato[2]):

$$\frac{d\zeta_{\parallel}}{dt} = 2\mu'(\boldsymbol{\zeta}_{\perp}[\boldsymbol{Hn}]) + \frac{2}{v}\left(\frac{\mu m^2}{\varepsilon^2} - \mu'\right)(\boldsymbol{\zeta}_{\perp}\boldsymbol{E}). \tag{41,11}$$

---

[1]) Se, come si fa spesso, si introduce per le particelle cariche il coefficiente giromagnetico (fattore di Lande) g secondo la formula $\mu = g\frac{e}{2m}\frac{1}{2}\left(= g\frac{e}{2mc}\frac{\hbar}{2}\right)$, questa equazione assume la forma

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{e}{2m}\left(g - 2 + 2\frac{m}{\varepsilon}\right)[\boldsymbol{\zeta H}] + \frac{e}{2m}(g-2)\frac{\varepsilon}{\varepsilon + m}(\boldsymbol{vH})[\boldsymbol{v\zeta}] + \\ + \frac{e}{2m}\left(g - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + m}\right)[\boldsymbol{\zeta}[\boldsymbol{Ev}]]. \tag{41,9a}$$

[2]) Un metodo piú breve per ottenere questa equazione consiste nello sviluppare la componente temporale dell'equazione (41,7).

Una serie di esempi di applicazione delle equazioni ricavate verrà data nei problemi alla fine di questo paragrafo. Qui ci limitiamo ad osservare che nel moto in un campo magnetico puro la polarizzazione di una particella priva di momento magnetico anomalo conserva costante l'angolo che essa forma con la velocità ($\zeta|_1$ = costante). In questo modo, il risultato ottenuto, già indicato per il caso non relativistico, ha effettivamente un carattere generale.

Precisiamo ora le condizioni dell'applicabilità delle equazioni ottenute. La richiesta, ricordata all'inizio, di una variazione sufficientemente lenta della quantità di moto della particella è equivalente ad una determinata condizione di piccolezza delle intensità dei campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$; in particolare, il raggio Larmor nel campo magnetico ($\sim p/eH$) deve essere grande rispetto alla lunghezza d'onda della particella. Oltre che questa condizione tuttavia, deve essere soddisfatta, rigorosamente parlando, anche la condizione che i campi varino nello spazio non troppo rapidamente: il campo deve variare di poco su distanze dell'ordine delle dimensioni del pacchetto d'onda quasi-classico. In tal modo, il campo deve variare debolmente su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda della particella ($1/p$), e anche della lunghezza d'onda Compton, $1/m$[1]).

Praticamente, nei problemi del moto in campi macroscopici, la condizione di una variazione lenta è evidentemente soddisfatta, e quindi di fatto si richiede che l'intensità dei campi sia sufficientemente piccola.

Nel § 33 sono state calcolate le prime correzioni relativistiche all'hamiltoniano di un elettrone, che si muove in un campo esterno. Per un elettrone in un campo elettrico l'hamiltoniano approssimato ha la forma (vedi la (33,12))

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' - \frac{e}{4m}\left(\boldsymbol{\sigma}\left[\boldsymbol{E}\,\frac{\mathbf{p}}{m}\right]\right) \quad (\mathbf{p} = -i\Delta), \tag{41,12}$$

dove in H′ sono stati inclusi i termini che non contengono lo spin. Nel nostro caso, in virtú della lenta variazione del campo, in H′ occorre trascurare il termine con le derivate rispetto a $\boldsymbol{E}$ (cioè con div $\boldsymbol{E}$); si può omettere anche il piccolo termine con $\mathbf{p}^4$, non avente nessuna relazione con gli effetti del campo che a noi qui interessano; in tal modo H′ (in assenza di campo magnetico) si riduce all'hamiltoniano non relativistico $\mathrm{H}' = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi$.

---

[1]) L'ultima richiesta discende dalla condizione che la dispersione delle velocità nel pacchetto d'onde sia, nel suo sistema di quiete, piccolo rispetto a c; in caso contrario in questo sistema non si potrebbero usare le formule non relativistiche.

Se il campo varia troppo rapidamente nelle equazioni possono risultare essenziali dei termini supplementari, che contengono derivate del campo rispetto alle coordinate.

La formula (41,12) si può ottenere anche partendo dall'equazione (41,9) senza ricorrere direttamente all'equazione di Dirac. In questo modo si otterrà la generalizzazione (nel caso quasi-classico) per particelle dotate di momento magnetico anomalo.

A meno di termini del primo ordine rispetto alla velocità v, l'equazione del moto dello spin in un campo elettrico si ricava dalla (41,9) nella forma

$$\frac{d\zeta}{dt} = (\mu + \mu')\,[\zeta\,[\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}]] = \left(\frac{e}{2m} + 2\mu'\right)[\zeta\,[\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}]].$$

Se si impone di ottenere questa equazione con il metodo quantomeccanico della commutazione dell'operatore dello spin con l'hamiltoniano (secondo la (41,3)), come è facile verificare, occorre porre

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' - \left(\mu' + \frac{e}{4m}\right)\left(\sigma\left[\boldsymbol{E}\,\frac{\mathbf{p}}{m}\right]\right). \qquad (41,13)$$

Questa è l'espressione cercata. Per $\mu' = 0$ si ritorna alla (41,12). Sottolineiamo che il momento magnetico « normale » $e/2m$ compare con il fattore addizionale 1/2 rispetto al momento anomalo μ'[1]).

PROBLEMI

1. Determinare il cambiamento di direzione della polarizzazione di una particella nel moto che essa compie in un piano perpendicolare ad un campo magnetico omogeneo ($\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{H}$).

Soluzione. Nella parte destra dell'equazione (41,9) rimane solo il primo termine, cioè il vettore ζ effettua una precessione attorno alla direzione di $\boldsymbol{H}$ (asse z) alla velocità angolare

$$-\frac{2\mu m + 2\mu'(\varepsilon - m)}{\varepsilon}\,\boldsymbol{H} = -\left(\frac{e}{\varepsilon} + 2\mu'\right)\boldsymbol{H}.$$

Con questa stessa velocità angolare ruota nel piano xy la proiezione di ζ su questo piano (indichiamola con ζ_1). Il vettore $\boldsymbol{v}$ ruota in questo stesso piano alla velocità angolare $-e\boldsymbol{H}/\varepsilon$ (come si vede dall'equazione di moto $\dot{\boldsymbol{p}} = \varepsilon\dot{\boldsymbol{v}} = e\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]$. Da qui si vede che ζ_1 ruota attorno alla direzione di $\boldsymbol{v}$ alla velocità angolare $-2\mu'\boldsymbol{H}$.

2. Il problema 1 per il caso che il moto avvenga in un piano parallelo alla direzione del campo magnetico.

Soluzione. Se le direzioni di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{H}$ coincidono, l'equazione (41,9) si riduce alla forma

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2\mu m}{\varepsilon}\,[\zeta\boldsymbol{H}],$$

cioè ζ compie una precessione attorno alla direzione comune di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{H}$ alla velocità angolare $-2\mu m\boldsymbol{H}/\varepsilon$.

3. Il problema 1 per il caso di un moto in un campo elettrico omogeneo.

Soluzione. Sia il campo $\boldsymbol{E}$ diretto lungo l'asse x, mentre il moto avviene nel piano xy (cioè p_y = costante). Dalla (41,9) si vede che il vettore ζ compie una

---

[1]) Questo è il « fattore di Thomas », ricordato nella nota a pag. 154. La deduzione qui esposta mostra chiaramente la sua origine.

precessione attorno all'asse z alla velocità angolare istantanea

$$-\left(\frac{e}{\varepsilon+m}+2\mu'\right)E\,\frac{p_y}{\varepsilon}.$$

Scomponiamo ancora ζ nelle componenti ζ_z e ζ_1 (nel piano xy). Allora

$$\zeta_{\parallel}=\zeta_1\cos\varphi,\quad \zeta_{\perp}\boldsymbol{E}=-\zeta_1\operatorname{sen}\varphi\cdot\frac{v_y}{v}.$$

Dalla (41,11) troviamo che ζ_1 ruota attorno alla direzione di $\boldsymbol{v}$ alla velocità angolare istantanea

$$\dot{\varphi}=\frac{2v_y}{v^2}\left(\frac{\mu m^2}{\varepsilon^2}-\mu'\right)=\frac{p_y}{\varepsilon}\left(\frac{em}{p^2}-2\mu'\right).$$

§ 42. *Diffusione di neutroni in un campo elettrico*

Negli urti di neutroni con nuclei la diffusione a grandi angoli è determinata dall'interazione fondamentale, le forze nucleari. Nella diffusione ad angoli piccoli invece diventa importante, come vedremo, l'interazione del momento magnetico del neutrone con il campo elettrico del nucleo (*J. Schwinger*, 1948).

Supporremo il neutrone non relativistico, e quindi l'interazione considerata è descritta dall'hamiltoniano approssimato (41,13). Tutto il momento magnetico di una particella elettricamente neutra è « anomalo », e l'operatore H′ si riduce, in questo caso, all'operatore dell'energia cinetica[1])

$$\mathrm{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+i\frac{\mu\hbar}{mc}\sigma\,[\boldsymbol{E}\nabla]. \tag{42,1}$$

Essendo l'interazione elettromagnetica del neutrone piccola, l'ampiezza di diffusione f_{em}, dovuta a questa interazione, può essere calcolata nell'approssimazione di Born

$$\mathrm{f}_{em}=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}/\hbar}\left(i\,\frac{\mu\hbar}{mc}\sigma\,[\boldsymbol{E}\nabla]\right)e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}/\hbar}d^3x$$

(vedi III, § 126), oppure

$$\mathrm{f}_{em}=\frac{\mu}{2\pi c\hbar^2}\sigma\,[\boldsymbol{E}_q\boldsymbol{p}],\quad \boldsymbol{E}_q=\int\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}d^3x \tag{42,2}$$

($\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ sono gli impulsi del neutrone prima e dopo la diffusione; $\hbar\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}$). In questa forma l'ampiezza f_{em} è un operatore rispetto alla variabile di spin.

Prima di passare ai calcoli successivi, facciamo la seguente osservazione. La formula (42,1) venne ricavata nel § 41 per il caso di campi variabili lentamente (fatto questo, che significava trascurare nell'hamiltoniano termini contenenti le derivate del campo rispetto

---

[1]) In questo paragrafo vengono usate unità ordinarie, e la lettera m designa la massa del neutrone.

alle coordinate). Riferito al campo coulombiano del nucleo questo significa che la lunghezza d'onda $\hbar/p$ deve essere piccola rispetto alle distanze $r \sim 1/q$, essenziali nell'integrale $\boldsymbol{E}_q$. Da cui $\hbar q \ll p$, e quindi l'angolo di diffusione $\theta \sim \hbar q/p \ll 1$. In tal modo, la condizione richiesta è soddisfatta proprio per la diffusione ad angoli piccoli.

Per il campo coulombiano di potenziale $\Phi = Ze/r$, la trasformata di Fourier dell'intensità è

$$\boldsymbol{E}_q = -i\boldsymbol{q}\Phi_q = -i\boldsymbol{q}\,\frac{4\pi Ze}{q^2}$$

(vedi II (51,5)). Sostituendo nella (42,2), otteniamo

$$\mathrm{f}_{em} = i\,\frac{2Ze\mu}{q^2c\hbar^3}\,(\boldsymbol{\sigma}\,[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}']).$$

Per piccoli angoli di diffusione si ha $\hbar q \approx p\theta$, $[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'] \approx p^2\theta\boldsymbol{\nu}$, dove $\boldsymbol{\nu}$ è il versore nella direzione individuata dal prodotto $[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}']$. In tal modo, troviamo

$$\mathrm{f}_{em} = i\,\frac{2Ze\mu}{\theta\hbar c}\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}.$$

A questa espressione occorre aggiungere l'ampiezza di diffusione nucleare. Poiché le forze nucleari diminuiscono molto rapidamente con la distanza, questa ampiezza tende per piccoli angoli ad un valore complesso finito (che dipende dall'energia), che denoteremo con la lettera a. Quindi l'ampiezza totale di diffusione è

$$\mathrm{f} = a + i\,\frac{b}{\theta}\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}, \quad b = \frac{2Ze\mu}{c\hbar} = 2Z\alpha\,\frac{\mu}{e}. \tag{42,3}$$

Vediamo che la diffusione elettromagnetica diventa effettivamente preponderante per angoli sufficientemente piccoli.

La forma dell'espressione (42,3) coincide con quella dell'espressione esaminata nel vol. III, § 140. Per questo possiamo usare direttamente le formule là ricavate. La sezione d'urto di diffusione, sommata su tutte le possibili polarizzazioni finali, è data dalla formula

$$\frac{d\sigma}{do} = |a|^2 + \frac{b^2}{\theta^2} + 2b\,\mathrm{Im}\,a\cdot\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\zeta}, \tag{42,4}$$

dove $\boldsymbol{\zeta}$ è la polarizzazione iniziale del fascio di neutroni ($\boldsymbol{P}$ nel vol. III, § 140). Se lo stato iniziale non è polarizzato ($\boldsymbol{\zeta} = 0$), la polarizzazione dopo la diffusione è

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{2b\,\mathrm{Im}\,a\cdot\theta}{|a|^2\theta^2 + b^2}\,\boldsymbol{\nu}. \tag{42,5}$$

Questa polarizzazione è massima per $\theta = b/|a|$, dove essa raggiunge il valore $\zeta'_{\max} = \mathrm{Im}\,a/|a|$.

Capitolo V

RADIAZIONE

§ 43. *Operatore di interazione elettromagnetica*

L'interazione di elettroni col campo elettromagnetico può, di regola, venire descritta mediante la teoria delle perturbazioni. Ciò è connesso al fatto che l'interazione elettromagnetica è relativamente debole; quest'ultima circostanza trova la sua espressione nella piccolezza della relativa costante di accoppiamento adimensionale, la costante della struttura fina $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$. Il fatto che questa costante sia piccola ha un'importanza fondamentale nell'elettrodinamica quantistica.

Nell'elettrodinamica classica (vedi II, § 28) l'interazione elettromagnetica è descritta dal termine

$$-ej^{\mu}A_{\mu} \tag{43,1}$$

nella densità di lagrangiano del sistema « campo + cariche » (A è il quadripotenziale del campo, j il quadrivettore densità di corrente). La densità di corrente soddisfa l'equazione di continuità

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0, \tag{43,2}$$

che è l'espressione della legge di conservazione della carica. Ricordiamo (vedi II, § 29) che l'invarianza di gauge della teoria è strettamente connessa proprio con questa legge. Effettivamente, per la sostituzione $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\chi$ (4,1), alla densità di lagrangiano (43,1) viene ad aggiungersi la grandezza $-ej^{\mu}\partial_{\mu}\chi$, la quale, in forza della (43,2), può essere scritta sotto forma di divergenza quadridimensionale

$$-e\partial_{\mu}(\chi j^{\mu}),$$

e quindi scompare quando nell'azione $S = \int L d^4x$ si esegue l'integrazione in d^4x.

Nell'elettrodinamica quantistica i quadrivettori j e A vengono sostituiti con corrispondenti operatori di seconda quantizzazione. L'operatore di corrente viene espresso attraverso gli operatori ψ secondo la relazione $\mathbf{j} = \bar{\psi}\gamma\psi$. Il ruolo di « coordinate » generalizzate

q nel lagrangiano

$$\int L_{int} d^3x = -e \int (jA)\, d^3x$$

è svolto dai valori di $\bar{\psi}$, ψ, A in ogni punto dello spazio. Poiché la densità di lagrangiano risulta dipendere solo dalle « coordinate » q (ma non dalle loro derivate rispetto a x), il passaggio alla densità di hamiltoniano secondo la formula (10,11) si riduce al solo cambiamento di segno nella densità di lagrangiano[1]). In tal modo, l'operatore di interazione elettromagnetica (cioè l'integrale su tutto lo spazio della densità dell'hamiltoniano di interazione) ha la forma

$$V = e \int (jA)\, d^3x. \tag{43,3}$$

L'operatore del campo elettromagnetico libero è rappresentato dalla somma

$$A = \sum_n [c_n A_n(x) + c_n^+ A_n^*(x)], \tag{43,4}$$

che contiene gli operatori di creazione e di distruzione di fotoni nei diversi stati (numerati dall'indice n). Ognuno di questi operatori ha elementi di matrice relativi soltanto ad un aumento o una diminuzione di 1 del corrispondente numero di occupazione N_n (restando invariati i rimanenti numeri di occupazione). Di conseguenza anche l'operatore A ha elementi di matrice solo per transizioni con variazione del numero di fotoni di 1. In altre parole, nell'approssimazione di ordine 1 della teoria delle perturbazioni compaiono solo processi monofotonici di radiazione o di assorbimento.

Secondo la (2,15), gli elementi di matrice sono

$$\langle N_n - 1 \,|\, c_n \,|\, N_n \rangle = \langle N_n \,|\, c_n^+ \,|\, N_n - 1 \rangle = \sqrt{N_n}. \tag{43,5}$$

Se nello stato iniziale del campo i fotoni (di tipo n) mancano, allora si ha $\langle 1 \,|\, c_n^+ \,|\, 0 \rangle = 1$. L'elemento di matrice dell'operatore (43,3) per l'emissione di un fotone è

$$V_{fi}(t) = e \int (j_{fi} A_n^*)\, d^3x, \tag{43,6}$$

dove $A_n(x)$ è la funzione d'onda del fotone emesso, e j_{fi} l'elemento di matrice dell'operatore j per la transizione del sistema irraggiante dallo stato iniziale i nello stato finale f[2]). Il quadrivettore $j_{fi}^{\mu} = (\rho_{fi}, \boldsymbol{j}_{fi})$ è chiamato *corrente di transizione*.

---

[1]) Indipendentemente da queste considerazioni notiamo che se si parla solo di correzione del primo ordine, qualsiasi altra correzione al lagrangiano passa nell'hamiltoniano cambiando soltanto di segno (vedi I, § 40).

[2]) Le notazioni usate nella (43,6) contengono una certa incoerenza; gli indici di V_{fi} si riferiscono agli stati di tutto il sistema « sorgente della radiazione + campo », mentre gli indici di j_{fi} si riferiscono solo alla sorgente della radiazione.

Analogamente si trova l'elemento di matrice per l'assorbimento di un fotone:

$$V_{fi}(t) = e \int (j_{fi} A_n)\, d^3x. \tag{43,7}$$

Esso differisce dalla (43,6) solo per il fatto che al posto di $A_n^*(x)$ compare $A_n(x)$.

Indicando in V_{fi} l'argomento t, si vuole sottolineare che si parla di un elemento di matrice dipendente dal tempo. Evidenziando nelle funzioni d'onda i fattori temporali, si può passare agli elementi di matrice che non dipendono dal tempo

$$V_{fi}(t) = V_{fi} e^{-i(E_i - E_f \mp \omega)t} \tag{43,8}$$

(E_i, E_f sono rispettivamente l'energia iniziale e finale del sistema irraggiante; $\mp\omega$ si riferiscono rispettivamente all'emissione e all'assorbimento di un fotone ω).

La funzione d'onda del fotone di dato impulso $\boldsymbol{k}$ e data polarizzazione è

$$A^\mu = \sqrt{4\pi}\, \frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \tag{43,9}$$

(vedi la (4,3); il fattore temporale è stato omesso). Sostituendo nella (43,6), troviamo l'elemento di matrice per l'emissione di un fotone nella forma

$$V_{fi} = e\sqrt{4\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\, e_\mu^* j_{fi}^\mu(\boldsymbol{k}), \tag{43,10}$$

dove $j_{fi}(\boldsymbol{k})$ è la corrente di transizione nella rappresentazione degli impulsi, cioè la trasformata di Fourier

$$j_{fi}(\boldsymbol{k}) = \int j_{fi}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d^3x. \tag{43,11}$$

La formula analoga per l'assorbimento di un fotone è

$$V_{fi} = e\sqrt{4\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\, e_\mu j_{fi}^\mu(-\boldsymbol{k}). \tag{43,12}$$

L'equazione di conservazione della corrente nella rappresentazione degli impulsi si scrive sotto forma di condizione di trasversalità quadridimensionale delle correnti di transizione:

$$k_\mu j_{fi}^\mu = \omega\rho_{fi}(\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{k}\boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k}) = 0. \tag{43,13}$$

Le formule scritte nel presente paragrafo, nelle quali la forma dell'operatore di corrente non è determinata, hanno carattere generale e valgono per processi elettromagnetici in cui intervengono particelle cariche di qualsiasi tipo. La teoria esistente dà la possibilità di stabilire la forma dell'operatore di corrente (e quindi di

calcolare, in linea di principio, i corrispondenti elementi di matrice) solo per gli elettroni. Nell'applicazione a sistemi di particelle suscettibili di interazioni forti (ivi compresi i nuclei) ci si deve limitare ad una teoria semifenomenologica, nella quale le correnti di transizione intervengono come quantità dedotte dall'esperimento, e che soddisfano soltanto le condizioni piú generali di simmetria spazio-temporale e l'equazione di continuità.

§ 44. *Emissione e assorbimento*

La probabilità di transizione per effetto di una perturbazione V è data, in prima approssimazione, dalle note formule della teoria delle perturbazioni (III, § 42). Sia dato che gli stati iniziale e finale del sistema irraggiante appartengono allo spettro discreto[1]). Allora la probabilità (in 1 s) che avvenga la transizione $i \to f$ con emissione di un fotone è

$$dw = 2\pi \, |V_{fi}|^2 \, \delta(E_i - E_f - \omega) \, d\nu, \tag{44,1}$$

dove $d\nu$ indica simbolicamente l'insieme delle grandezze che caratterizzano lo stato del fotone e che assumono una serie continua di valori (la funzione d'onda del fotone si suppone normalizzata secondo una funzione δ « delle grandezze ν »).

Se il fotone emesso possiede momento angolare determinato, l'unica grandezza continua è la frequenza ω. L'integrazione della formula (44,1) rispetto a $d\nu \equiv d\omega$ elimina la funzione δ (ω viene sostituito con un valore determinato $\omega = E_i - E_f$), e allora la probabilità di transizione è

$$w = 2\pi \, |V_{fi}|^2. \tag{44,2}$$

Se invece si considera l'emissione di un fotone di dato impulso $\boldsymbol{k}$, allora $d\nu \equiv d^3k = \omega^2 d\omega do$. In questo caso nella formula (44,1) si sottintende che la funzione d'onda del fotone è normalizzata con la funzione $\delta(\boldsymbol{k})$. Tuttavia, in questo volume noi normalizziamo tutte le onde piane con « una particella nell'unità di volume ». Questa normalizzazione differisce dalla normalizzazione con la funzione $\delta(\boldsymbol{k})$ per la mancanza del fattore $(2\pi)^{-3/2}$. Con la nostra normalizzazione dell'onda piana fotonica, quindi, la probabilità di emissione di un fotone di dato impulso si scrive nella forma[2])

$$dw = 2\pi \, |V_{fi}|^2 \, \delta(E_i - E_f - \omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{44,3}$$

---

[1]) In questo modo, si sottintende che, in ogni caso, il rinculo viene trascurato: globalmente, il sistema irraggiante rimane fisso.

[2]) Questa scrittura corrisponde al fatto che, per la normalizzazione con « un fotone nel volume $V = 1$ », nella (44,1) occorre scrivere, al posto di $d\nu = d^3k$, il numero degli stati nel volume di fase $V \, d^3k$, uguale a $d^3k/(2\pi)^3$.

oppure, dopo l'integrazione in $d\omega$,

$$dw = \frac{1}{4\pi^2} |V_{fi}|^2 \omega^2 \, do. \tag{44,4}$$

In questa formula deve essere messo l'elemento di matrice V_{fi} dalla (43,10).

Nei paragrafi seguenti noi useremo queste formule per calcolare la probabilità di radiazione in diversi casi concreti. Qui ci limitiamo a considerare alcune relazioni generali tra i vari tipi di processi di radiazione.

Se nello stato iniziale del campo c'era già un numero dato N_n di fotoni, differente da zero, allora l'elemento di matrice di transizione viene moltiplicato ancora per

$$\langle N_n + 1 | c_n^+ | N_n \rangle = \sqrt{N_n + 1}, \tag{44,5}$$

cioè la probabilità di transizione viene moltiplicata per $N_n + 1$. L'unità in questo fattore corrisponde all'emissione spontanea, che avviene anche per $N_n = 0$. Il termine N_n determina l'emissione *forzata* (o *indotta*); noi vediamo cosí che la presenza di fotoni nello stato iniziale del campo stimola una supplementare emissione di fotoni simili.

L'elemento di matrice V_{if}, relativo alla transizione con cambiamento inverso dello stato del sistema ($f \to i$), differisce dall'elemento V_{fi} per la sostituzione della (44,5) con la

$$\langle N_n - 1 | c_n | N_n \rangle = \sqrt{N_n}$$

(e per la sostituzione di tutte le altre grandezze con le corrispondenti complesse coniugate). Questa transizione inversa rappresenta l'assorbimento di un fotone da parte del sistema, che passa dal livello E_f al livello E_i. Tra la probabilità di emissione e la probabilità di assorbimento di un fotone vale, quindi (per una data coppia di stati i e f), la relazione[1])

$$\frac{w_{\text{emiss}}}{w_{\text{ass}}} = \frac{N_n + 1}{N_n} \tag{44,6}$$

(questa relazione venne stabilita per la prima volta da *A. Einstein*, 1916).

Troviamo il legame tra il numero di fotoni e l'intensità della radiazione che cade sul sistema dall'esterno. Sia

$$I_{ke} \, d\omega \, do \tag{44,7}$$

l'energia della radiazione, che cade in 1 s su 1 cm^2 e avente polarizzazione e, frequenza compresa nell'intervallo $d\omega$ e direzione del vettore d'onda nell'elemento di angolo solido do. Agli intervalli

[1]) Da qui in avanti, in questo paragrafo, useremo unità ordinarie.

citati corrispondono $k^2\, dk\, do/(2\pi)^3$ oscillatori del campo, ad ognuno dei quali corrispondono N_{ke} fotoni di polarizzazione data. Quindi, la stessa energia (44,7) si ottiene componedo il prodotto

$$c\frac{k^2\, dk\, do}{(2\pi)^3} N_{ke}\cdot\hbar\omega = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3c^2} N_{ke}\, d\omega\, do.$$

Da| qui troviamo la relazione cercata

$$N_{ke} = \frac{8\pi^3c^2}{\hbar\omega^3} I_{ke}. \tag{44,8}$$

Sia $dw_{ke}^{(sp)}$ la probabilità di emissione spontanea di un fotone di polarizzazione e nell'angolo solido do; con gli indici (in) e (ass) denotiamo le analoghe probabilità di emissione indotta e di assorbimento. Secondo la (44,6) e la (44,8) queste probabilità sono legate tra loro dalle seguenti relazioni:

$$dw_{ke}^{(ass)} = dw_{ke}^{(in)} = dw_{ke}^{(sp)} \frac{8\pi^3c^2}{\hbar\omega^3} I_{ke} \tag{44,9}$$

Se la radiazione incidente è isotropica e non polarizzata (I_{ke} non dipende dalle direzioni di k e e), l'integrazione della (44,9) in do e la somma su e portano a relazioni analoghe tra le probabilità totali delle transizioni radiative (tra gli stati determinati i e f del sistema)

$$w^{(ass)} = w^{(in)} = w^{(sp)} \frac{\pi^2c^2}{\hbar\omega^3} I, \tag{44,10}$$

dove $I = 2\cdot 4\pi I_{ke}$ è l'intensità spettrale totale della radiazione incidente.

Se gli stati i e f del sistema irraggiante (o assorbente) sono degeneri, la probabilità totale di emissione (o di assorbimento) di fotoni dati si ricava sommando su tutti gli stati degeneri finali e mediando su tutti i possibili stati iniziali. Indichiamo l'ordine di degenerazione (i pesi statistici) degli stati i e f rispettivamente con g_i e g_f. Per i processi di radiazione spontanea o indotta, iniziali sono gli stati i mentre per l'assorbimento sono gli stati f. Supponendo, in ogni caso, che tutti i g_i e g_f degli stati iniziali siano equiprobabili, al posto della (44,10), otteniamo, evidentemente, le relazioni seguenti[1]):

$$g_f w^{(ass)} = g_i w^{(in)} = g_i w^{(sp)} \frac{\pi^2c^2}{\hbar\omega^3} I. \tag{44,11}$$

---

[1]) Nella letteratura si usano spesso i cosiddetti *cccefficienti di Einstein*, determinati come $A_{if} = w^{(sp)}$, $B_{if} = w^{(in)}\, c/I$, $B_{fi} = w^{(ass)}\, c/I$ (la quantità I/c è la densità spettrale spaziale dell'energia di radiazione). Questi coefficienti sono legati tra loro dalle relazioni

$$g_f B_{fi} = g_i B_{if} = g_i A_{if} \frac{\pi^2c^3}{\hbar\omega^3}. \tag{44,11a}$$

§ 45. *Radiazione di dipolo*

Applichiamo le formule ottenute all'emissione di un fotone da parte di un elettrone (nel caso relativistico generale), che si muove in un campo esterno dato. La corrente di transizione, in questo caso, è l'elemento di matrice dell'operatore

$$\mathbf{j} = \bar{\psi}\gamma\psi,$$

nel quale gli operatori ψ si suppongono sviluppati secondo il sistema delle funzioni d'onda degli stati stazionari dell'elettrone nel dato campo (§ 32). Alla transizione dell'elettrone dallo stato iniziale i allo stato f corrisponde l'elemento di matrice $\langle 0_i 1_f \mid \mathbf{j} \mid 1_i 0_f \rangle$. Questa variazione dei numeri di occupazione è realizzata dall'operatore $a_f^\dagger a_i$, e per la corrente di transizione otteniamo

$$j_{fi}^\mu = \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_i = (\psi_f^* \psi_i, \quad \psi_f^* \boldsymbol{\alpha} \psi_i), \tag{45,1}$$

dove ψ_i e ψ_f sono le funzioni d'onda degli stati iniziale e finale dell'elettrone.

Prendiamo la funzione d'onda del fotone nel gauge trasversale tridimensionale (il quadrivettore polarizzazione $e = (0, \boldsymbol{e})$). Allora nella (43,10) abbiamo $j_{fi} e^* = -\boldsymbol{j}_{fi} \boldsymbol{e}^*$. Sostituendo V_{fi} nella (44,4), otteniamo la seguente formula per la probabilità (in 1 s) di radiazione nell'elemento di angolo solido do di un fotone di polarizzazione $\boldsymbol{e}$:

$$dw_{\boldsymbol{e}n} = e^2 \frac{\omega}{2\pi} \mid \boldsymbol{e}^* \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k}) \mid^2 do, \tag{45,2}$$

dove

$$\boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k}) = \int \psi_f^* \boldsymbol{\alpha} \psi_i \cdot e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d^3x. \tag{45,3}$$

La somma sulle polarizzazioni del fotone viene fatta eseguendo la media sulle direzioni di $\boldsymbol{e}$ (nel piano perpendicolare alla direzione data $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$), e quindi si moltiplica il risultato per 2 corrispondentemente alle due possibili polarizzazioni indipendenti del fotone[1]). In tal modo, si ottiene la formula

$$dw_{\boldsymbol{n}} = e^2 \frac{\omega}{2\pi} \mid [\boldsymbol{n} \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k})] \mid^2 do. \tag{45,4}$$

---

[1]) Per il calcolo del valore medio si usa la formula

$$\overline{e_i e_k^*} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k) \tag{45,4a}$$

ovvero

$$\overline{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}^*)} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{n})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{n})\} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}][\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}], \tag{45,4b}$$

dove $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono vettori costanti (cfr. II (78,6)).

È molto importante il caso in cui la lunghezza d'onda del fotone λ è grande rispetto alle dimensioni a del sistema irraggiante. Questa situazione viene a crearsi di solito quando le velocità delle particelle sono piccole rispetto alla velocità della luce. In prima approssimazione in a/λ (caso che corrisponde alla radiazione di dipolo, cfr. II, § 67) nella corrente di transizione (45,3) si può sostituire con l'unità il fattore $e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$, che varia debolmente nella regione, dove o ψ_i o ψ_f sono sensibilmente differenti da zero. Questa sostituzione significa, in altre parole, che si trascura l'impulso del fotone rispetto agli impulsi delle particelle nel sistema.

Sempre in prima approssimazione l'integrale $\boldsymbol{j}_{fi}(0)$ può venire sostituito dall'espressione non relativistica corrispondente, cioè semplicemente dall'elemento di matrice $\boldsymbol{v}_{fi}$ della velocità dell'elettrone rispetto alle funzioni d'onda di Schrödinger. A sua volta, questo elemento è $\boldsymbol{v}_{fi} = -i\omega\boldsymbol{r}_{fi}$, e $e\boldsymbol{r}_{fi} = \boldsymbol{d}_{fi}$, dove $\boldsymbol{d}$ è il momento di dipolo dell'elettrone (nel suo moto orbitale). In tal modo, per la probabilità di radiazione di dipolo troviamo la formula seguente:

$$dw_{\boldsymbol{e}\boldsymbol{n}} = \frac{\omega^3}{2\pi} |\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{d}_{fi}|^2 do \tag{45,5}$$

(la direzione $\boldsymbol{n}$ compare qui in forma implicita: il vettore $\boldsymbol{e}$ deve essere perpendicolare a $\boldsymbol{n}$). Sommando sulle polarizzazioni, otteniamo

$$dw_{\boldsymbol{n}} = \frac{\omega^3}{2\pi} |[\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}_{fi}]|^2 do. \tag{45,6}$$

Poiché queste formule hanno carattere non relativistico (rispetto all'elettrone), la loro generalizzazione a sistemi elettronici qualsiasi è evidente: per $\boldsymbol{d}_{fi}$ occorre intendere l'elemento di matrice del momento di dipolo totale del sistema.

Integrando la formula (45,6) su tutte le direzioni, troviamo la probabilità totale di radiazione

$$w = \frac{4\omega^3}{3} |\boldsymbol{d}_{fi}|^2, \tag{45,7}$$

oppure, in unità ordinarie,

$$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\boldsymbol{d}_{fi}|^2. \tag{45,7a}$$

L'intensità I di radiazione si ottiene moltiplicando la probabilità per $\hbar\omega$

$$I = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\boldsymbol{d}_{fi}|^2. \tag{45,8}$$

Questa formula mostra un'analogia diretta con la formula classica (vedi II (67,11)) per l'intensità della radiazione di dipolo da parte di un sistema di particelle che compiono un moto periodico;

l'intensità di radiazione a frequenza $\omega_s = s\omega$ (dove ω è la frequenza del moto delle particelle, s un numero intero) è uguale a

$$I_s = \frac{4\omega_s^4}{3c^3} |\boldsymbol{d}_s|^2, \tag{45,9}$$

dove $\boldsymbol{d}_s$ sono le componenti di Fourier del momento di dipolo, cioè i coefficienti dello sviluppo

$$\boldsymbol{d}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{d}_s e^{-is\omega t}. \tag{45,10}$$

La formula quantistica (45,8) si ricava dalla (45,9) mediante la sostituzione delle componenti di Fourier con gli elementi di matrice delle transizioni corrispondenti. Questa regola (che esprime il *principio di corrispondenza* di Bohr) è un caso particolare di una corrispondenza piú generale tra componenti di Fourier di grandezze classiche ed elementi di matrice quantistici nel caso quasi-classico (vedi III, § 48). La radiazione è quasi-classica per transizioni tra stati a grandi numeri quantici; inoltre la frequenza di transizione $\hbar\omega = E_i - E_f$ è piccola rispetto alle energie E_i e E_f. Questo fatto, tuttavia, non può portare a nessun cambiamento nella forma della formula (45,8), che vale per qualsiasi transizione. Questo spiega il fatto (in un certo senso accidentale) che il principio di corrispondenza per l'intensità di radiazione risulta valido non solo nel caso quasi-classico, ma anche nel caso quantistico generale.

§ 46. *Radiazione di multipolo elettrico*

Invece di considerare la radiazione di un fotone in una direzione data (cioè con un impulso dato), consideriamo ora la radiazione di un fotone con dati valori del momento angolare j e della sua proiezione m su una certa direzione scelta z. Abbiamo visto al § 6 che questi fotoni possono essere di due tipi: elettrico e magnetico; incominciamo dalla radiazione di fotoni di tipo elettrico. Anche in questo caso, supporremo le dimensioni del sistema irraggiante piccole rispetto alla lunghezza d'onda.

I calcoli si possono piú comodamente eseguire mediante le funzioni d'onda del fotone nella rappresentazione degli impulsi, cioè rappresentando il quadrivettore $A^\mu(\boldsymbol{r})$ in forma di integrale di Fourier. Allora l'elemento di matrice si scrive nella forma

$$V_{fi} = e \int j_{fi}^\mu(\boldsymbol{r}) A_\mu^*(\boldsymbol{r}) d^3x = e \int d^3x \cdot j_{fi}^\mu(\boldsymbol{r}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A_\mu^*(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \tag{46,1}$$

(per semplificare la scrittura delle formule ometteremo gli indici ωjm delle funzioni d'onda del fotone).

Per un fotone Ej prendiamo la funzione d'onda dalla (7,10), assumendo la costante arbitraria C uguale a

$$C = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}.$$

Con questa scelta della costante si fa in modo che nelle componenti spaziali della funzione (A) si elidano i termini contenenti funzioni sferiche di ordine $j - 1$ (come si vede dalle formule (7,16)). Allora A conterrà solo funzioni sferiche di ordine $j + 1$, e quindi il corrispondente contributo in V_{fi} sarà (come risulterà evidente dai calcoli che seguiranno) di ordine di grandezza piú elevato (in a/λ) che non il contributo della componente $A^0 \equiv \Phi$, contenente funzioni sferiche di ordine inferiore a j.

In tal modo, poniamo

$$A^\mu = (\Phi, 0), \quad \Phi = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}\,\frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\,\delta(|\boldsymbol{k}| - \omega)\, Y_{jm}(\boldsymbol{n})$$

($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$). Sostituendo questa espressione nella (46,1) e integrando in $d\,|\boldsymbol{k}|$, otteniamo

$$V_{fi} = -e\sqrt{\frac{j+1}{j}}\,\frac{\sqrt{\omega}}{2\pi}\int d^3x \cdot \rho_{fi}(\boldsymbol{r}) \int do_n e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} Y^*_{jm}(\boldsymbol{n}). \qquad (46,2)$$

Per calcolare l'integrale interno usiamo lo sviluppo (24,12), scrivendolo nella forma

$$e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l g_l(kr)\, Y^*_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right) Y_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right), \qquad (46,3)$$

dove[1])

$$g_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, J_{l+1/2}(kr). \qquad (46,4)$$

Sostituendo questo sviluppo nella (46,2), otteniamo

$$\int e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} Y^*_{jm}(\boldsymbol{n})\, do_n = 4\pi i^{-j} g_j(kr)\, Y^*_{jm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

(gli altri termini si annullano per l'ortogonalità delle funzioni sferiche). In forza della condizione $a/\lambda \ll 1$ nell'integrale in d^3x saran-

---

[1]) Le funzioni $g_l(kr)$ dipendono solo dai prodotti kr ed è quindi chiara la simmetria delle formule rispetto ai vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{k}$. È indifferente su quale delle due funzioni sferiche stia il segno di coniugazione complessa.

La normalizzazione delle funzioni g_l è scelta in modo che la loro forma asintotica per $kr \to \infty$ sia

$$g_l(kr) \approx \frac{\operatorname{sen}\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}{kr}. \qquad (46,4a)$$

no importanti solo quelle distanze, per le quali $kr \ll 1$. Quindi si possono sostituire le funzioni $g_j(kr)$ con i primi termini del loro sviluppo in kr[1]):

$$g_j(kr) \approx \frac{(kr)^j}{(2j+1)!!}. \tag{46,5}$$

Per risultato otteniamo

$$V_{fi} = (-1)^{m+1} i^j \sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)}{\pi j}} \frac{\omega^{j+1/2}}{(2j+1)!!} e (Q^{(e)}_{j,-m})_{fi}, \tag{46,6}$$

dove sono state introdotte le grandezze

$$(Q^{(e)}_{jm})_{fi} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \int \rho_{fi}(\boldsymbol{r}) r^j Y_{jm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) d^3x \tag{46,7}$$

(ricordiamo che $Y_{j,-m} = (-1)^{j-m} Y^*_{jm}$). Le grandezze (46,7) sono chiamate *momenti di multipolo elettrico di ordine* 2^j *di transizione* del sistema per analogia con le corrispondenti grandezze classiche (II, § 41)[2]).

Per un elettrone in un campo esterno $\rho_{fi} = \psi^*_f \psi_i$, e allora le grandezze (46,7) si calcolano come elementi di matrice della grandezza classica

$$Q^{(e)}_{jm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} r^j Y_{jm}.$$

Nel caso non relativistico (rispetto alle velocità delle particelle) il momento di transizione può essere, in linea di principio, calcolato in modo analogo per qualsiasi sistema di N particelle interagenti. La densità di transizione si esprimerà attraverso le funzioni d'onda del sistema nella forma

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{r}) = \int \psi^*_f(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \psi_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \times \\ \times \sum_{n=1}^{N} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n) \cdot d^3x_1 \ldots d^3x_N, \tag{46,8}$$

dove l'integrale è calcolato su tutto lo spazio delle configurazioni[3]).

---

[1]) La potenza di kr coincide con l'ordine della funzione Y_{jm}, con la quale viene moltiplicata g_j. Con ciò si giustifica l'omissione dei termini in A, che contengono funzioni sferiche di ordine piú elevato.

[2]) Noi determiniamo i momenti di multipolo senza la costante e concordemente col fatto che anche le correnti sono determinate in questo libro senza la costante di carica.

[3]) La supposizione che le velocità degli elettroni nel sistema siano piccole ha come solo scopo la possibilità di descrivere il sistema mediante la funzione d'onda e in questo senso non ha carattere fondamentale. Può verificarsi la situazione, in cui la probabilità di transizione si annulla per regole approssimate di selezione, che valgono solo se si trascura l'interazione spin-orbita degli elettroni. In questo caso, per ottenere un risultato non nullo occorre usare funzioni d'onda con correzioni relativistiche, che tengano conto di questa interazione.

La funzione d'onda del fotone, da noi usata, corrisponde (in rappresentazione orbitale) alla normalizzazione secondo una funzione δ delle quantità ω, come del resto si presupponeva nella formula (44,2). Sostituendo in essa la (46,6), otteniamo la probabilità della radiazione Ej[1])

$$w_{jm}^{(e)} = \frac{2(2j+1)(j+1)}{j[(2j+1)!!]^2}\,\omega^{2j+1}e^2\,|(Q_{j,-m}^{(e)})_{fi}|^2. \qquad (46,9)$$

In particolare, per $j = 1$ abbiamo

$$w_{1m}^{(e)} = \frac{4\omega^3}{3}e^2\,|(Q_{1,-m}^{(e)})_{fi}|^2. \qquad (46,10)$$

Le quantità $Q_{1m}^{(e)}$ sono legate alle componenti del vettore momento di dipolo elettrico dalle formule

$$eQ_{10}^{(e)} = id_z, \quad eQ_{1,\pm1}^{(e)} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}(d_x \pm id_y). \qquad (46,11)$$

Sommando la (46,10) sui valori di m noi torniamo, come c'era da aspettarsi, alla già nota formula (45,7) per la probabilità totale di radiazione di dipolo.

La distribuzione angolare della radiazione di multipolo è determinata dalla formula (7,11). Normalizzando quest'ultima con la probabilità totale di emissione w_{jm}, abbiamo

$$dw_{jm} = |Y_{jm}^{(e)}(\boldsymbol{n})|^2 w_{jm}\,do = \frac{w_{jm}}{j(j+1)}|\nabla_n Y_{jm}|^2\,do. \qquad (46,12)$$

In particolare, per $j = 1$

$$Y_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot e^{\pm i\varphi},$$

dove θ e φ sono, rispettivamente, l'angolo polare e azimutale della direzione $\boldsymbol{n}$ rispetto all'asse z. Calcolando il gradiente, troveremo che la distribuzione angolare della radiazione di dipolo, con determinati valori di m, è data dalle espressioni

$$dw_{10} = w_{10}\frac{3}{8\pi}\,\mathrm{sen}^2\theta\,do, \quad dw_{1,\pm1} = w_{1,\pm1}\frac{3}{8\pi}\frac{1+\cos^2\theta}{2}\,do. \qquad (46,13)$$

Queste formule si sarebbero potute ottenere anche dalla (45,6), ponendo in essa una volta (per $m = 0$) $d_x = d_y = 0$, $d_z = d$, e una seconda volta (per $m = \pm1$) $d_y = \mp id_x = d/\sqrt{2}$, $d_z = 0$.

Se l'ordine di grandezza delle dimensioni del sistema (dell'atomo o del nucleo) è a, allora l'ordine di grandezza dei momenti di multi-

---

[1]) Di primo acchito, può sembrare che in virtú dell'isotropia dello spazio la probabilità totale di emissione di un fotone non debba dipendere dal valore di m. È facile capire che non è cosí, se si nota che per l'emissione di fotoni di valori m diversi, devono essere diversi anche gli stati finali del sistema (per uno stato iniziale dato); cfr. piú avanti con la regola (46,16).

polo elettrico è, generalmente parlando, $Q_{jm}^{(e)} \sim a^j$. La probabilità della radiazione di multipolo è

$$w_{jm}^{(e)} \sim \alpha k\,(ka)^{2j}. \tag{46,14}$$

L'aumento dell'ordine del multipolo di 1 diminuisce la probabilità di radiazione nel rapporto $\sim (ka)^2$.

Le leggi di conservazione del momento angolare e della parità portano a determinate regole di selezione, che limitano le possibili variazioni dello stato del sistema irraggiante. Se il momento angolare iniziale del sistema è J_i, dopo l'emissione di un fotone di momento angolare j il momento angolare del sistema può assumere solo i valori J_f, determinati dalla regola di composizione dei momenti angolari ($\boldsymbol{J}_i - \boldsymbol{J}_f = \boldsymbol{j}$):

$$|J_i - J_f| \leqslant j \leqslant J_i + J_f. \tag{46,15}$$

Per valori dati di J_i e J_f, la regola (46,15) determina i possibili valori del momento angolare j del fotone. Poiché, però, la probabilità di radiazione decresce rapidamente con l'aumentare di j, la radiazione avviene principalmente nell'ordine piú basso possibile di multipolo.

Le proiezioni M_i e M_f dei momenti angolari $\boldsymbol{J}_i$ e $\boldsymbol{J}_f$, insieme con le proiezioni m del momento angolare del fotone, soddisfano la seguente regola (evidente dalla stessa regola di composizione dei momenti)

$$M_i - M_f = m. \tag{46,16}$$

Le parità P_i e P_f degli stati iniziale e finale del sistema irraggiante devono soddisfare la condizione $P_f P_{\text{fot}} = P_i$, dove P_{fot} è la parità del fotone emesso; poiché le parità possono prendere solo i valori ± 1, questa condizione può anche venire scritta nella forma

$$P_i P_f = P_{\text{fot}}. \tag{46,17}$$

Per un fotone di tipo elettrico, $P_{\text{fot}} = (-1)^j$, e quindi la regola di selezione secondo la parità per la radiazione di multipolo elettrico si può scrivere nella forma

$$P_i P_f = (-1)^j. \tag{46,18}$$

Le regole di selezione secondo il momento angolare totale e la parità sono assolutamente rigorose e devono essere osservate per radiazione da parte di qualsiasi sistema. Accanto a queste regole, ne possono esistere anche altre, piú restrittive, connesse con queste o quelle particolarità della struttura di concreti sistemi irraggianti. Queste regole hanno inevitabilmente carattere piú o meno approssimato; esse verranno studiate nei paragrafi seguenti di questo capitolo.

La dipendenza della probabilità di emissione dai numeri quantici m, M_i, M_f è interamente determinata dal carattere tensoriale dei momenti di multipolo. Le quantità Q_{jm} per dati j formano un tensore sferico di rango j. La dipendenza dei suoi elementi di matrice dai numeri quantici citati è data dalla formula

$$|\langle n_f J_f M_f | Q_{j,-m} | n_i J_i M_i \rangle|^2 = \\ = \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix}^2 |\langle n_f J_f \| Q_j \| n_i J_i \rangle|^2 \qquad (46,19)$$

(vedi III (107,6)), dove la lettera n indica convenzionalmente l'insieme di tutti gli altri numeri quantici del sistema, oltre a J ed M. Gli elementi di matrice ridotti, che figurano nella parte destra dell'uguaglianza (46,19), non dipendono dai numeri m, M_i, M_f. Sostituita nella (46,9) questa formula determina la dipendenza cercata, che risulta essere proporzionale alla quantità

$$\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix}^2$$

(ovviamente, si suppone che il sistema irraggiante non si trovi in un campo esterno; allora la frequenza di transizione ω non dipende dai numeri M_i e M_f).

Sommando la probabilità su tutti i valori M_f (per un dato M_i), noi troviamo la probabilità totale di emissione di un fotone di data frequenza dal livello iniziale $n_i J_i$ del sistema. In virtú dell'isotropia dello spazio è a priori evidente che questa quantità non dipenderà nemmeno dal valore iniziale M_i. La somma viene eseguita mediante la formula

$$\sum_{M_f} |\langle n_f J_f M_f | Q_{j,-m} | n_i J_i M_i \rangle|^2 = \frac{1}{2J_i+1} |\langle n_f J_f \| Q_j \| n_i J_i \rangle|^2 \qquad (46,20)$$

(vedi III (107,11)).

§ 47. *Radiazione di multipolo magnetico*

La funzione d'onda di un fotone di tipo magnetico è $A^\mu = (0, \boldsymbol{A})$, dove $\boldsymbol{A}$ è dato dalla formula (7,6). Sostituendo quest'ultima nella (46,1), otteniamo per l'elemento di matrice l'espressione

$$V_{fi} = -e\frac{\sqrt{\omega}}{2\pi} \int d^3x \cdot \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r}) \int do_n \cdot e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \boldsymbol{Y}_{jm}^{(m)*}(\boldsymbol{n}). \qquad (47,1)$$

Le componenti del vettore $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(m)}$ si esprimono, secondo la (7,16), attraverso funzioni sferiche di ordine j. Usando nuovamente lo

sviluppo (46,3), per l'integrale interno otteniamo

$$\int e^{-ikr}\mathbf{Y}_{jm}^{(m)*}(\boldsymbol{n})\,do_n = 4\pi i^{-j} g_j(kr)\,\mathbf{Y}_{jm}^{(m)*}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

e sostituendo g_j dalla (46,5),[1])

$$V_{fi} = -ei^{-j}\frac{2\omega^{j+\frac{1}{2}}}{(2j+1)!!}\int \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r})\,r^j\mathbf{Y}_{jm}^{(m)*}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)d^3x.$$

In accordo con la definizione (7,4), qui occorre porre

$$\mathbf{Y}_{jm}^{(m)}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\,[\boldsymbol{r}\nabla Y_{jm}],$$

e quindi, trasformando l'espressione integranda

$$r^j\boldsymbol{j}_{fi}[\boldsymbol{r}\nabla Y_{jm}^*] = -[\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}_{fi}]\,\nabla(r^jY_{jm}^*)$$

otteniamo

$$V_{fi} = (-1)^m i^j\sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)}{\pi j}}\,\frac{\omega^{j+\frac{1}{2}}}{(2j+1)!!}\,e\,(Q_{j,-m}^{(m)})_{fi}, \qquad (47,2)$$

dove sono state introdotte le quantità

$$(Q_{jm}^{(m)})_{fi} = \frac{1}{j+1}\sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\int [\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}_{fi}]\nabla(r^jY_{jm})\,d^3x \qquad (47,3)$$

che sono chiamate *momenti di multipolo magnetico di ordine* 2^j *di transizione.*

Dall'analogia tra le espressioni (47,2) e (46,6) segue che per la probabilità di emissione si ottiene una formula, che si differenzia dalla (46,10) soltanto per la sostituzione dei momenti elettrici con quelli magnetici. Rimane valida anche la formula (46,12) per la distribuzione angolare (come era già stato notato in relazione alla (7,11)).

Consideriamo la struttura dell'espressione (47,3) per $j = 1$. In questo caso, le funzioni hanno la forma

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,rY_{10} = iz, \quad \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,rY_{1,\pm1} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}(x \pm iy),$$

e i loro gradienti sono semplicemente uguali ai versori sferici $\boldsymbol{e}^{(0)}$, $\boldsymbol{e}^{(\pm1)}$(7,14). Quindi le quantità $e\,(Q_{1m}^{(m)})_{fi}$ sono le componenti sferiche del vettore

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = \frac{e}{2}\int [\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}_{fi}]\,d^3x, \qquad (47,4)$$

il quale, per la sua struttura, è analogo al momento magnetico classico (vedi II, § 44). Mostriamo ora in che modo la formula (47,4)

---

[1]) Non confondere la corrente $\boldsymbol{j}$ con il momento angolare j!

è legata con l'ordinaria espressione quantistica non relativistica dell'operatore del momento magnetico.

L'espressione non relativistica della corrente di transizione è (vedi III, § 115)

$$\boldsymbol{j}_{fi} = -\frac{i}{2m}(\psi_f^*\nabla\psi_i - \psi_i\nabla\psi_f^*) + \frac{\mu}{es}\operatorname{rot}(\psi_f^*\mathbf{s}\psi_i), \qquad (47,5)$$

dove μ è il momento magnetico della particella, $\boldsymbol{s}$ il suo spin. Perciò abbiamo

$$\mu_{fi} = -\frac{ie}{4m}\int \psi_f^*[\boldsymbol{r}\nabla]\psi_i d^3x + \frac{ie}{4m}\int \psi_i[\boldsymbol{r}\nabla]\psi_f^* d^3x + \\ + \frac{\mu}{2s}[\boldsymbol{r}\operatorname{rot}(\psi_f^*\mathbf{s}\psi_i)]\, d^3x. \qquad (47,6)$$

Nel secondo termine scriviamo

$$\int \psi_i[\boldsymbol{r}\nabla]\psi_f^* d^3x = -\int \psi_f^*[\boldsymbol{r}\nabla]\psi_i d^3x + \int \operatorname{rot}(\boldsymbol{r}\psi_f^*\psi_i)\, d^3x.$$

L'ultimo integrale si trasforma in integrale su una superficie all'infinito e si annulla. In tal modo, i due primi termini nella (47,6) sono uguali. Nel terzo termine trasformiamo l'integrale nel modo seguente (denotiamo temporaneamente $\boldsymbol{F} = \psi_f^*\mathbf{s}\psi_i$):

$$\int [\boldsymbol{r}[\nabla\boldsymbol{F}]]\, d^3x = \oint [\boldsymbol{r}[d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{F}]] - \int [[\boldsymbol{F}\nabla]\boldsymbol{r}]\, d^3x.$$

L'integrale di superficie si annulla, e nell'ultimo integrale abbiamo $[[\boldsymbol{F}\nabla]\boldsymbol{r}] = -\boldsymbol{F}\operatorname{div}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F} = -2\boldsymbol{F}$. In tal modo, otteniamo

$$\int [\boldsymbol{r}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}]\, d^3x = 2\int \boldsymbol{F} d^3x.$$

Come risultato di queste trasformazioni, l'espressione per μ_{fi} prende la forma

$$\mu_{fi} = \int \psi_f^*\left(\frac{e}{2m}\mathbf{L} + \frac{\mu}{s}\mathbf{s}\right)\psi_i d^3x, \qquad (47,7)$$

dove $\mathbf{L} = -i[\boldsymbol{r}\nabla]$ è l'operatore del momento angolare orbitale della particella. Come c'era da aspettarsi, μ_{fi} risulta essere l'elemento di matrice dell'operatore

$$\mu = \frac{e}{2m}\mathbf{L} + \frac{\mu}{s}\mathbf{s}, \qquad (47,8)$$

che si ottiene componendo l'operatore del momento magnetico orbitale della particella con il suo momento magnetico intrinseco.

Le regole di selezione per la radiazione di multipolo magnetico sono analoghe alle regole per il caso elettrico; per il momento angolare totale valgono le stesse regole (46,15-16), e per la parità vale la regola

$$P_iP_f = (-1)^{j+1}, \qquad (47,9)$$

che si ottiene sostituendo nella (46,17) la parità del fotone Mj : $P_\varphi = (-1)^{j+1}$.

§ 48. *Distribuzione angolare e polarizzazione della radiazione*

Le formule ricavate nei paragrafi 46 e 47 si riferivano all'emissione di un fotone di valori dati del momento angolare j e della sua proiezione m. In accordo con ciò, si supponeva che anche il sistema irraggiante (per esempio, un nucleo) avesse, prima e dopo l'emissione, non solo valori determinati del momento angolare J, ma anche polarizzazioni determinate, cioè valori determinati di M.

Consideriamo ora il caso, piú generale dei precedenti, della radiazione da parte di un nucleo parzialmente polarizzato (le sue dimensioni si suppongono, come prima, piccole rispetto alla lunghezza d'onda). Il fotone emesso è dotato, come prima, di un dato momento j, ma può essere parzialmente polarizzato. Troviamo la probabilità di radiazione in funzione della direzione del fotone $\boldsymbol{n}$. Essa deve essere espressa attraverso le matrici densità, che descrivono gli stati di polarizzazione del nucleo e del fotone.

Per fare questo, scriviamo preventivamente la probabilità di emissione in funzione della direzione $\boldsymbol{n}$ e della elicità λ del fotone ($\lambda = \pm 1$) per il caso, in cui il nucleo iniziale e il nucleo finale hanno i valori determinati $J_i M_i$, $J_f M_f$.

L'elemento di matrice per l'emissione di un fotone di dati jm è proporzionale all'elemento di matrice del momento di multipolo di ordine 2^j (elettrico o magnetico) del nucleo:

$$\langle J_f M_f;\, jm \,|\, V \,|\, J_i M_i \rangle \sim (-1)^m \langle J_f M_f \,|\, Q_{j,\,-m} \,|\, J_i M_i \rangle. \qquad (48,1)$$

La funzione d'onda del fotone emesso (nella rappresentazione degli impulsi) è proporzionale a $\boldsymbol{Y}^{(e)}_{jm}(\boldsymbol{n})$ oppure a $\boldsymbol{Y}^{(m)}_{jm}(\boldsymbol{n})$. La funzione d'onda di un fotone con impulso in direzione $\boldsymbol{n}$ ed elicità λ è proporzionale al vettore polarizzazione $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$. L'elemento di matrice per l'emissione del fotone $\boldsymbol{n}\lambda$ si ottiene moltiplicando la (48,1) con la proiezione della funzione d'onda dello stato $|\, jm \rangle$ sulla funzione d'onda dello stato $|\, \boldsymbol{n}\lambda \rangle$:

$$\langle J_f M_f;\, \boldsymbol{n}\lambda \,|\, V \,|\, J_i M_i \rangle \sim (-1)^m \langle J_f M_f \,|\, Q_{j,\,-m} \,|\, J_i M_i \rangle \, (\boldsymbol{e}^{(\lambda)*} \boldsymbol{Y}_{jm}).$$

In accordo con la (16,23) per i fotoni di ambedue i tipi, abbiamo

$$\boldsymbol{e}^{(\lambda)*} \boldsymbol{Y}_{jm}(\boldsymbol{n}) \sim D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{n}). \qquad (48,2)$$

Esprimiamo invece l'elemento di matrice del momento di multipolo nel modo solito attraverso l'elemento di matrice ridotto. Come risultato, otteniamo l'ampiezza di probabilità di transizione nella forma

$$\langle J_f M_f;\, \boldsymbol{n}\lambda \,|\, V \,|\, J_i M_i \rangle \sim (-1)^{J_f - M_f + m} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} Q D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{n}), \qquad (48,3)$$

dove con Q si denota $\langle J_f \,||\, Q \,||\, J_i \rangle$.

Ora possiamo passare al caso generale di stati di polarizzazione miscelata. Secondo le regole generali della meccanica quantistica la probabilità di transizione è proporzionale all'espressione[1])

$$\sum_{(m)} \langle J_f M_f;\, \boldsymbol{n}\lambda \,|\, V \,|\, J_i M_i \rangle \langle J_f M_f';\, \boldsymbol{n}\lambda' \,|\, V \,|\, J_i M_i' \rangle^* \times$$
$$\times \langle M_i \,|\, \rho^{(i)} \,|\, M_i' \rangle \langle M_f' \,|\, \rho^{(f)} \,|\, M_f \rangle \langle \lambda' \,|\, \rho^{(\gamma)} \,|\, \lambda \rangle, \qquad (48,4)$$

dove $\rho^{(i)}$, $\rho^{(f)}$, $\rho^{(\gamma)}$ sono le matrici densità di polarizzazione del nucleo iniziale, del nucleo finale e del fotone emesso; il simbolo (m) sotto il segno di sommatoria significa che la somma viene eseguita su tutti gli indici m $(M_i M_i' M_f M_f' \lambda\lambda')$ che si ripetono due volte. Occorre sostituire la (48,3) nella (48,4).

Indichiamo la probabilità di radiazione nell'angolo solido do con $w(\boldsymbol{n})\, do$. La probabilità totale di radiazione in tutte le direzioni e con tutte le polarizzazioni del fotone e del nucleo secondario non dipende, evidentemente, dallo stato di polarizzazione iniziale del nucleo. Essa è data da formule a noi già note e qui non ci interessa. Perciò conveniamo di normalizzare la probabilità $w(\boldsymbol{n})$ a 1. Per la probabilità otteniamo[2])

$$w(\boldsymbol{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_{(m)} (-1)^{2J_i - M_i - M_i'} \times$$
$$\times D^{(j)}_{\lambda m} D^{(j)*}_{\lambda' m'} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f' & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i \,|\, \rho^{(i)} \,|\, M_i' \rangle \times$$
$$\times \langle M_f' \,|\, \rho^{(f)} \,|\, M_f \rangle \langle \lambda' \,|\, \rho^{(\gamma)} \,|\, \lambda \rangle$$

---

[1]) Se gli stati iniziale e finale del sistema sono descritti dalle sovrapposizioni

$$\psi^{(i)} = \sum_n a_n \psi_n^{(i)}, \quad \psi^{(f)} = \sum_m b_m \psi_m^{(f)},$$

allora l'elemento di matrice è

$$\langle f \,|\, V \,|\, i \rangle = \sum_{mn} b_m^* a_n V_{mn},$$

e il suo quadrato

$$|\langle f \,|\, V \,|\, i \rangle|^2 = \sum_{nn'mm'} V_{mn} V^*_{m'n'} a_n a^*_{n'} b_{m'} b^*_m.$$

Il passaggio al caso di stati miscelati è realizzato mediante la sostituzione

$$a_n a^*_{n'} \to \rho^{(i)}_{nn'}, \quad b_{m'} b^*_m \to \rho^{(f)}_{m'm},$$

e quindi

$$|\langle f \,|\, V \,|\, i \rangle|^2 \to \sum_{nn'mm'} V_{mn} V^*_{m'n'} \rho^{(i)}_{nn'} \rho^{(f)}_{m'm}.$$

[2]) Nelle trasformazioni del fattore che determina il segno si può utilizzare il fatto che i numeri $2J_i$, $2J_f$, $2M_i$, $2M_f$ hanno la stessa parità. Ricordiamo anche che i numeri j, m sono interi, e $\lambda = \pm 1$.

(piú avanti ci convinceremo che questa normalizzazione è giusta). Trasformiamo questa formula, sviluppando in serie il prodotto delle due funzioni D III (110,2)

$$D^{(j)}_{\lambda m} D^{(j)*}_{\lambda' m'} = (-1)^{\lambda'+m'} D^{(j)}_{\lambda m} D^{(j)}_{-\lambda' -m'} =$$
$$= (-1)^{\lambda+m} \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} D^{(L)}_{\Lambda\mu}$$

(dove $\Lambda = \lambda - \lambda'$; $\mu = m - m'$; L sono numeri interi, $L \geqslant 2j$). In tal modo, otteniamo il risultato definitivo seguente:

$$w(\boldsymbol{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_L \sum_{(m)} (-1)^{2J_i - M_i - M_i' + m + 1} (2L+1) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f' & -m' & -M_i' \end{pmatrix} D^{(L)}_{\Lambda\mu}(\boldsymbol{n}) \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle \langle M_f' | \rho^{(f)} | M_f \rangle \times$$
$$\times \langle \lambda' | \rho^{(\gamma)} | \lambda \rangle. \qquad (48,5)$$

Come anche prima, il simbolo $\sum_{(m)}$ indica la somma su tutti gli indici m che si ripetono due volte. Occorre ricordare, a questo proposito, che gli indici λ e λ' sono differenti da tutti gli altri indici m: la somma rispetto a questi indici viene fatta non su tutti i $2j+1$ valori possibili (per un dato j), ma solo sui due valori λ, $\lambda' = \pm 1$, che corrispondono alle due polarizzazioni del fotone.

La formula (48,5) contiene tutta l'informazione necessaria sulla distribuzione angolare dei fotoni emessi e sulla loro polarizzazione, e anche sulla polarizzazione dei nuclei secondari (cioè, dei nuclei che hanno emesso un fotone). In tutto questo ragionamento era sottinteso che la matrice densità di polarizzazione iniziale era data.

Distribuzione angolare

La distribuzione angolare dei fotoni si ottiene sommando su tutte le polarizzazioni del fotone e del nucleo secondario. La media sulle polarizzazioni si esegue sostituendo nella (48,5) le matrici densità degli stati non polarizzati

$$\langle \lambda | \rho^{(\gamma)} | \lambda' \rangle = \frac{1}{2} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \langle M_f | \rho^{(f)} | M_f' \rangle = \frac{1}{2J_f+1} \delta_{M_f M_f'}, \qquad (48,6)$$

dopodiché la somma si riduce alla moltiplicazione per 2 (per il fotone) e per $2J_f + 1$ (per il nucleo). In altre parole, la somma viene fatta mediante la sostituzione

$$\langle \lambda | \rho^{(\gamma)} | \lambda' \rangle \to \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \langle M_f | \rho^{(f)} | M_f' \rangle \to \delta_{M_f M_f'}. \qquad (48,7)$$

In tal modo, per la distribuzione angolare otteniamo

$$\overline{w}(\boldsymbol{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_L \sum_{(m)} (-1)^{m'+1} (2L+1) D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m' & M_i' \end{pmatrix} \times$$
$$\times \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle.$$

Questa formula può essere semplificata sostanzialmente sommando sugli indici m.

Notiamo innanzitutto che

$$\begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = (-1)^L \begin{pmatrix} j & j & L \\ -\lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{48,8}$$

e quindi per la somma otteniamo

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{per } L \text{ pari,} \\ 0 & \text{per } L \text{ dispari.} \end{cases}$$

Di conseguenza nella somma su L rimangono solo i termini a L pari, cioè in essa compaiono funzioni sferiche ($D^{(L)}_{0\mu}$) soltanto di ordine pari. Questo risultato si poteva prevedere: per la legge di conservazione della parità, la probabilità deve essere invariante rispetto all'inversione, cioè rispetto alla sostituzione $\boldsymbol{n} \to -\boldsymbol{n}$.

In tal modo otteniamo

$$\overline{w}(\boldsymbol{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{4\pi} \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times$$
$$\times D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}) \sum_{(m)} (-1)^{m'+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle.$$

Notiamo che a questo punto è facile verificare la normalizzazione; in forza della formula

$$\int D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}) \frac{do}{4\pi} = \delta_{L0} \delta_{\mu 0}$$

dopo l'integrazione sulle direzioni, rimane solo il termine con $L = \mu = 0$; usando le formule

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j+1}},$$

$$\sum_{M_f m} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J_i+1}, \quad \mathrm{Tr}\,\rho^{(i)} = 1$$

ci possiamo convincere che questo termine è uguale a 1.

Successivamente, la somma su $mm'M_f$ nella sommatoria interna, viene eseguita mediante le formule III (108,4). Finalmente per la distribuzione angolare dei fotoni troviamo la formula seguente:

$$\overline{w}(\boldsymbol{n}) = (-1)^{1+J_i+J_f} \frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{4\pi} \times$$

$$\times \sum_{\text{pari } L} (-i)^L \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ j & j & J_f \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \sum_{\mu} \mathcal{F}^{(i)*}_{L\mu} D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}), \qquad (48,9)$$

dove sono stati introdotti i simboli

$$\mathcal{F}^{(i)}_{L\mu} = i^L \sqrt{(2L+1)(2J_i+1)} \sum_{M_i M_i'} (-1)^{J_i - M_i'} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} J_i & L & J_i \\ -M_i' & \mu & M_i \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle, \qquad (48,10)$$

$$\mathcal{F}^{(i)*}_{L\mu} = (-1)^{L-\mu} \mathcal{F}^{(i)}_{L,\,-\mu}.$$

La somma interna nella (48,9) viene eseguita su tutti i $|\mu| \leqslant L$, mentre la somma esterna si esegue su tutti i valori pari di L, che soddisfano le condizioni

$$L \ll 2j, \quad L \leqslant 2J_i \qquad (48,11)$$

(queste condizioni sono la conseguenza della regola del triangolo, alla quale devono soddisfare i simboli j nei simboli $3j$, che figurano nelle (48,9-10)). In forza di queste condizioni il numero dei termini nella somma, di solito, non è elevato. Per esempio, per $J_i = 0$ oppure 1/2, rimane solo il termine con $L = 0$, cioè la radiazione è isotropa (è facile verificare che il termine con $L = 0$ è uguale a 1/4, come deve essere per la condizione di normalizzazione). Per $J_i = 1$, 3/2 oppure per $j = 1$ nella somma su L rimangono due termini: $L = 0$, 2. Notiamo anche che se la matrice densità $\rho^{(i)}$ è diagonale ($M_i = M_i'$), allora $\mu = 0$ e la funzione di distribuzione (48,9) assume la forma di uno sviluppo in polinomi di Legendre

(secondo la (16,5) e la III (58,23) le funzioni $D^{(L)}_{00}$ si riducono alle funzioni P_L (cos θ)). Infine, se

$$\langle M_i \,|\, \rho^{(i)} \,|\, M_i' \rangle = \frac{1}{2J_i+1}\, \delta_{M_i M_i'},$$

cioè se il nucleo iniziale non è polarizzato, tutti i $\mathcal{P}^{(i)}_{L\mu} = 0$, ad eccezione di $\mathcal{P}^{(i)}_{00} = 1$[1]).

Le quantità $\mathcal{P}_{L\mu}$ sono comode per caratterizzare lo stato di polarizzazione del nucleo; li chiameremo *momenti di polarizzazione*. La formula (48,10) determina queste quantità attraverso la matrice densità $\rho_{MM'}$. Con una verifica diretta ci si può facilmente convincere della validità della formula inversa, che esprime la matrice densità attraverso i momenti di polarizzazione

$$\rho_{MM'} = \sum_{L\mu} \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}}\, i^{-L} (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \mathcal{P}_{L\mu}. \qquad (48,12)$$

Sia $f_{L\mu}$ un certo tensore sferico, che dipende dallo stato di polarizzazione del nucleo. Secondo le regole generali (vedi III (14,8)) il suo valore medio nello stato di matrice densità $\rho_{MM'}$ è uguale a

$$\overline{f}_{L\mu} = \sum_{MM'} \rho_{MM'} \langle JM' \,|\, f_{L\mu} \,|\, JM \rangle. \qquad (48,13)$$

Esprimendo gli elementi di matrice delle quantità $f_{L\mu}$ attraverso l'elemento di matrice ridotto $\langle J \,||\, f_L \,||\, J \rangle$ secondo la formula

$$\langle JM' \,|\, f_{L\mu} \,|\, JM \rangle = i^L (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \langle J \,||\, f_L \,||\, J \rangle$$

e introducendo i momenti di polarizzazione secondo la definizione (48,10), otteniamo

$$\overline{f}_{L\mu} = \frac{\langle J \,||\, f_L \,||\, J \rangle}{\sqrt{(2L+1)(2J+1)}}\, \mathcal{P}_{L\mu}. \qquad (48,14)$$

---

[1]) Effettivamente, notando che

$$\begin{pmatrix} J & 0 & J \\ -M' & 0 & M \end{pmatrix} = (-1)^{J-M} \frac{1}{\sqrt{2J+1}}\, \delta_{MM'},$$

abbiamo

$$\sum_{MM'} (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \delta_{MM'} =$$

$$= \sqrt{2J+1} \sum_{MM'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 & J \\ -M' & 0 & M \end{pmatrix} = \sqrt{2J+1}\, \delta_{L0} \delta_{\mu 0},$$

e quindi dalla definizione (48,10) troviamo il risultato indicato.

Polarizzazione del fotone

Se (oltre alla matrice $\rho^{(i)}$) sono date le matrici $\rho^{(\nu)}$ e $\rho^{(f)}$ la formula (48,5) determina la probabilità di transizione con emissione di un fotone che lascia il nucleo in determinati stati di polarizzazione. Questi stati sono, in sostanza, una caratteristica non del processo di radiazione in quanto tale, ma di quei detectors che registrano il fotone e il nucleo di rinculo, evidenziando le loro polarizzazioni. Un'impostazione piú naturale del problema consiste nel non fissare a priori lo stato finale del sistema « nucleo + fotone » e nel determinare la matrice densità di polarizzazione di questo stato fissando solo la direzione di emissione del fotone.

La risposta a questo problema è data sempre dalla formula (48,5). Rappresentando quest'ultima nella forma

$$w = \bar{w}(\boldsymbol{n}) \sum_{(m)} \langle M_f;\, \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, M_f';\, \boldsymbol{n}\lambda' \rangle \langle \lambda' \,|\, \rho^{(\nu)} \,|\, \lambda \rangle \langle M_f' \,|\, \rho^{(f)} \,|\, M_f \rangle, \qquad (48,15)$$

l'espressione $\langle M_f;\, \boldsymbol{n}\lambda \mid \rho \mid M_f';\, \boldsymbol{n}\lambda' \rangle$ rappresenterà proprio la matrice densità voluta, poiché, secondo le regole generali della meccanica quantistica, la probabilità di transizione w in uno stato fissato a priori è data dalla sua « proiezione » sulle matrici date $\rho^{(\nu)}\rho^{(f)}$. Il fattore $\bar{w}(\boldsymbol{n})$ nella (48,15) è evidenziato affinché la matrice densità resti normalizzata con la condizione solita

$$\sum_{\lambda M_f} \langle M_f;\, \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, M_f;\, \boldsymbol{n}\lambda \rangle = 1.$$

Se a noi interessa solo la polarizzazione del fotone, allora occorre sommare su $M_f = M_f'$:

$$\langle \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, \boldsymbol{n}\lambda' \rangle = \sum_{M_f} \langle M_f;\, \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, M_f;\, \boldsymbol{n}\lambda' \rangle.$$

Con un metodo del tutto analogo a quello usato per ricavare la (48,9), troviamo

$$\langle \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, \boldsymbol{n}\lambda' \rangle = (-1)^{1+J_i+J_f} \frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{8\pi\bar{w}(\boldsymbol{n})} \times$$
$$\times \sum_L (-i)^L \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ j & j & J_f \end{Bmatrix} \times$$
$$\times \sum_\mu \mathcal{F}^{(i)*}_{L\mu} D^{(L)}_{\Lambda\mu}(\boldsymbol{n}), \qquad (48,16)$$

($\Lambda = \lambda - \lambda'$), e la somma viene eseguita su tutti i valori interi di L, che soddisfano la condizione (48,11).

In particolare, la polarizzazione circolare è determinata dai parametri di Stokes

$$\xi_2 = \langle \boldsymbol{n}1 \,|\, \rho \,|\, \boldsymbol{n}1 \rangle - \langle \boldsymbol{n}, -1 \,|\, \rho \,|\, \boldsymbol{n}, -1 \rangle$$

(vedi problema al § 8). In forza della relazione (48,8) in questa differenza vengono a cadere tutti i termini con L pari, e per ξ_2 si ottiene una formula, che differisce dall'espressione (48,9), soltanto per il fatto che la somma viene eseguita sui valori dispari (e non pari) di L.

Polarizzazione dei nuclei secondari

Infine, se a noi interessa solo la polarizzazione finale dei nuclei, bisogna porre $\rho^{(\nu)} \to \delta$. Se si esegue inoltre anche l'integrazione sulle direzioni del fotone, allora la matrice densità del nucleo secondario sarà

$$\langle M_f | \rho | M_f' \rangle = \int \overline{w}(\boldsymbol{n}) \langle M_f \boldsymbol{n} | \rho | M_f' \boldsymbol{n} \rangle \, do =$$

$$= (2J_i + 1) \sum_{m M_i M_i'} (-1)^{2J_i - M_i - M_i'} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f' & -m & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle.$$

I momenti di polarizzazione, calcolati secondo questa matrice, sono

$$\mathcal{P}_{L\mu}^{(f)} = (-1)^{J_i + J_f + L + j} \sqrt{(2J_i + 1)(2J_f + 1)} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ J_f & J_f & j \end{Bmatrix} \mathcal{P}_{L\mu}^{(i)}. \quad (48,17)$$

Se il nucleo iniziale non è polarizzato, non lo sarà nemmeno il nucleo finale. Tuttavia, ci sarà una polarizzazione di correlazione, cioè la polarizzazione del nucleo dopo la radiazione in una data direzione. Ponendo $\rho^{(i)} \to \delta/(2J_i + 1)$ (e corrispondentemente $\overline{w}(\boldsymbol{n}) = 1/4\pi$) ed eseguendo un calcolo analogo alla deduzione della (48,9) per la matrice densità, che descrive questa polarizzazione, otteniamo

$$\langle M_f; \boldsymbol{n} | \rho | M_f'; \boldsymbol{n} \rangle = (2j + 1)(-1)^{J_i + M_f' + 1} \times$$

$$\times \sum_{\text{pari } L} (2L + 1) \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & L & J_f \\ -M_f' & \mu & M_f \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i \end{Bmatrix} D_{0\mu}^{(L)}(\boldsymbol{n}). \quad (48,18)$$

I momenti di polarizzazione corrispondenti a questa matrice sono

$$\mathcal{P}_{L\mu}^{(f)} = i^L (-1)^{1 + J_i + J_f} (2j + 1) \sqrt{(2L + 1)(2J_f + 1)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i \end{Bmatrix} D_{0\mu}^{(L)}(\boldsymbol{n}). \quad (48,19)$$

Si hanno qui solo momenti di ordine pari (questo è una conseguenza della conservazione della parità, già ricordata).

Se il nucleo secondario irraggia a sua volta, allora, essendo polarizzato, darà una distribuzione non isotropa dei fotoni. Poiché i momenti di polarizzazione (48,19) dipendono dalla direzione $\boldsymbol{n}$ del fotone emesso nel primo decadimento, nasce allora una determinata correlazione tra le direzioni dei fotoni emessi nelle fasi successive (per un nucleo primario non polarizzato). In modo analogo possono essere studiati anche altri fenomeni di correlazione in processi di radiazione a cascata (correlazione delle polarizzazioni e simili)[1]).

PROBLEMA

Determinare il legame tra i momenti di polarizzazione $\mathcal{P}_{1\mu}$ e $\mathcal{P}_{2\mu}$ con i valori medi del vettore momento angolare $\boldsymbol{J}$ e del tensore momento di quadrupolo Q_{ik}.

Soluzione. Gli elementi di matrice ridotti del vettore $\boldsymbol{J}$ e del tensore Q_{ik} si ricavano dalle uguaglianze

$$\overline{\boldsymbol{J}^2}=\frac{\langle J \| J \| J\rangle^2}{2J+1}, \qquad \overline{Q_{ik}^2}=\frac{\langle J \| Q \| J\rangle^2}{2J+1}$$

(cfr. III (107,10-11)). L'operatore Q_{ik} si esprime attraverso gli operatori del momento angolare secondo la formula III (75,2)

$$\mathrm{Q}_{ik}=\frac{3Q}{2J(2J-1)}\left(\mathrm{J}_i\mathrm{J}_k+\mathrm{J}_k\mathrm{J}_i-\frac{2}{3}\mathrm{J}^2\delta_{ik}\right).$$

Da qui troviamo il valore medio

$$\overline{Q_{ik}^2}=\frac{3Q^2}{2J^2(2J-1)^2}\overline{\boldsymbol{J}}^2(4\overline{\boldsymbol{J}}^2-3)=Q^2\frac{3(2J+1)(J+1)(2J+3)}{2J(2J-1)}.$$

Per gli elementi di matrice ridotti troviamo

$$\langle J \| J \| J\rangle=\sqrt{J(J+1)(2J+1)},$$

$$\langle J \| Q \| J\rangle=Q\sqrt{\frac{3(2J+1)(J+1)(2J+3)}{2J(2J-1)}}.$$

Dalla (48,14) è chiaro ora che i momenti di polarizzazione $\mathcal{P}_{1\mu}$ coincidono con le componenti sferiche del vettore

$$\sqrt{\frac{3}{J(J+1)}}\,\overline{\boldsymbol{J}},$$

ed i momenti $\mathcal{P}_{2\mu}$ coincidono con le componenti sferiche del tensore

$$\sqrt{\frac{10J(2J-1)}{3(J+1)(2J+3)}}\,\frac{\overline{Q}_{ik}}{Q}.$$

§ 49. *Radiazione di atomi. Tipo elettrico*[2])

L'energia degli elettroni esterni dell'atomo (che partecipano ai processi radiativi ottici), secondo una stima grossolana, è dell'ordine

[1]) Un'esposizione particolareggiata di questi problemi si può trovare nell'articolo di *A. Z. Dolginov* nel volume « I raggi gamma », Ed. Accademia delle Scienze dell'URSS, 1961.

[2]) Nei §§ 49-51, 53, 55 useremo unità ordinarie.

di grandezza $E \sim me^4/\hbar^2$, e quindi per le lunghezze delle onde irraggiate abbiamo le relazioni $\lambda \sim \hbar c/E \sim \hbar^2/\alpha m e^2$. Le dimensioni dell'atomo sono $a \sim \hbar^2/me^2$. Quindi, negli spettri ottici degli atomi, di regola, ha luogo la disuguaglianza $a/\lambda \sim \alpha \ll 1$. Dello stesso ordine di grandezza è la relazione $v/c \sim \alpha$, dove v sono le velocità degli elettroni ottici.

In tal modo negli spettri ottici degli atomi è soddisfatta la condizione, secondo la quale la probabilità di radiazione di dipolo (se è ammessa dalle regole di selezione) è sensibilmente maggiore della probabilità di transizioni di multipolo[1]. In relazione a questo fatto, in spettroscopia atomica il ruolo di maggiore importanza è svolto proprio dalle transizioni di dipolo elettrico.

Come si è già detto, queste transizioni sottostanno a regole di selezione rigorose relative al momento angolare totale dell'atomo J e alla parità P[2]:

$$|J'-J| \leqslant 1 \leqslant J+J', \tag{49,1}$$

$$PP' = -1. \tag{49,2}$$

La disuguaglianza $|J'-J| \leqslant 1$ significa che il momento angolare J può variare solo di $0, \pm 1$; in forza della disuguaglianza $J+J' \geqslant 1$ è inoltre vietata la transizione $0 \to 0$. Le parità degli stati iniziale e finale devono essere opposte[3].

La probabilità di radiazione con transizione $nJM \to n'J'M'$ è determinata dal corrispondente elemento di matrice del momento di dipolo dell'atomo secondo la formula

$$w(nJM \to n'J'M') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\langle n'J'M' | d_{-m} | nJM \rangle|^2, \tag{49,3}$$

$$\omega = \omega(nJ \to n'J').$$

Sommando la (49,3) su tutti i valori $M' = M - m$ (per un dato M), si ottiene la probabilità totale di radiazione di una data frequenza dal livello atomico nJ. La somma viene eseguita mediante la (46,20) e dà[4]

$$w(nJ \to n'J') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \frac{1}{2J+1} |\langle n'J' \| d \| nJ \rangle|^2. \tag{49,4}$$

---

[1]) Valori tipici della probabilità di transizioni di dipolo nel campo ottico dello spettro atomico sono dell'ordine di 10^8 s^{-1}.

[2]) Da qui in avanti denoteremo i numeri quantici degli stati iniziali e finali rispettivamente con lettere senza apice e con apice. Con le lettere n, n' saranno indicati i numeri quantici, che, insieme con quelli indicati esplicitamente, determinano gli stati del sistema.

[3]) La regola di selezione relativa alle parità venne per la prima volta stabilita da *O. Laporte*, 1924.

[4]) L'intensità osservabile della radiazione si ottiene moltiplicando w per $\hbar\omega$ e per il numero di atomi nella sorgente, che si trovano nel dato livello eccitato (N_{nJ}). Ad esempio, in un gas a temperatura T questo numero è $N_{nJ} \simeq (2J+1) \exp(-E_{nJ}/T)$; il fattore $(2J+1)$ è il peso statistico del livello di momento angolare J.

Il quadrato del modulo dell'elemento di matrice ridotto che compare qui è detto, a volte, *intensità della riga di transizione*; questa quantità è simmetrica rispetto agli stati iniziale e finale.

Ulteriori conclusioni circa le probabilità di transizione negli spettri atomici si possono fare solo specificando questa o quella caratteristica degli stati dell'atomo. Noi non ci soffermeremo qui sui metodi di calcolo degli elementi di matrice, il cui grado di approssimazione non ha un carattere teorico ben definito. Determineremo soltanto alcune relazioni per una categoria abbastanza larga (soprattutto negli atomi leggeri) di stati, costruiti secondo il tipo di accoppiamento LS (vedi III, § 72). Tali stati sono caratterizzati, oltre che dal momento angolare totale, anche da determinati valori del momento angolare orbitale L e dello spin S, che in questo caso si conservano.

Poiché il momento di dipolo è una grandezza puramente orbitale, il suo operatore commuta con l'operatore di spin, cioè la sua matrice è diagonale rispetto al numero S. Relativamente al numero L per il momento di dipolo valgono le stesse regole di selezione che per qualsiasi altro vettore orbitale (vedi III, § 29). In tal modo, le transizioni tra stati, costruiti secondo il tipo di accoppiamento LS, sottostanno a regole di selezioni supplementari (oltre che alle (49,1-2)

$$S' - S = 0, \tag{49,5}$$

$$| L' - L | \leqslant 1 \leqslant L + L'. \tag{49,6}$$

Sottolineiamo ancora una volta che queste regole hanno carattere approssimato e vengono violate qualora si tenga conto dell'interazione spin-orbita.

Notiamo che la regola (49,5) (divieto di transizioni tra termini di molteplicità differente) è valida non solo per le transizioni di dipolo, ma in generale per tutte le transizioni del tipo elettrico; i momenti di multipolo elettrico di tutti gli ordini sono tensori orbitali, e quindi le loro matrici sono diagonali rispetto allo spin. Cosí, per le transizioni di quadrupolo elettrico, oltre alle regole generali

$$| J' - J | \leqslant 2 \leqslant J + J', \quad PP' = 1, \tag{49,7}$$

nel caso di accoppiamento LS valgono le seguenti regole di selezione supplementari:

$$S' - S = 0, \quad | L' - L | \leqslant 2 \leqslant L + L'. \tag{49,8}$$

La dipendenza della probabilità di radiazione dai numeri S, L, J' può essere determinata in forma esplicita. Questo problema si risolve direttamente mediante le formule generali per gli elementi di matrice di tensori sferici con composizione di momenti angolari.

Secondo le formule III (109,3) abbiamo[1])

$$|\langle n'L'SJ' \| d \| nLSJ\rangle|^2 =$$

$$= (2J+1)(2J'+1)\begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'L' \| d \| nL\rangle|^2. \quad (49,9)$$

Sostituendo questa espressione nella (49,4) otteniamo

$$w(nLSJ \to n'L'SJ') =$$

$$= \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}(2J'+1)\begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'L' \| d \| nL\rangle|^2, \quad (49,10)$$

dove $\omega = \omega\,(nLS \to n'L'S)$[2]).

Per queste probabilità si può ricavare una determinata regola di somma. Per i quadrati dei simboli $6j$ vale la regola di somma (vedi III (108,7))

$$\sum_{J'}(2J'+1)\begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 = \frac{1}{2L+1}. \quad (49,11)$$

Mediante questa formula dalla (49,10) troviamo

$$\sum_{J'} w(nLSJ \to n'L'SJ') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\frac{1}{2L+1}|\langle n'L' \| d \| nL\rangle|^2. \quad (49,12)$$

Notiamo che questa grandezza non dipende dal valore iniziale di J.

Se abbiamo a che fare con radiazione da parte di gas a temperatura molto maggiore degli intervalli della struttura fina del termine atomico nSL, gli stati a diverso J sono popolati uniformemente, cioè tutti i valori di J sono equiprobabili. La probabilità che l'atomo si trovi in un livello con un determinato valore di J è, in questo caso, uguale a

$$\frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)}, \quad (49,13)$$

è cioè uguale al rapporto tra il peso statistico di questo livello e il peso statistico totale del termine nSL. Il calcolo della media delle espressioni (49,10) o delle loro somme (49,12) rispetto a queste probabilità si riduce alla moltiplicazione per il fattore (49,13); indichiamo questo valore medio con una soprallineatura della lettera. La probabilità totale di radiazione di tutte le righe spettrali

---

[1]) Nelle formule III, § 109 per « momenti dei sottosistemi 1 e 2 » occorre intendere ora il momento angolare orbitale e lo spin dell'atomo, dei quali noi trascuriamo l'interazione reciproca. Il ruolo delle grandezze $f_{1q}^{(1)}$ è svolto dal vettore orbitale d_q.

[2]) Trascurando l'interazione spin-orbita nel calcolo degli elementi di matrice, noi trascuriamo anche la dipendenza delle frequenze da J e J', cioè la struttura fina dei livelli iniziale e finale dell'atomo.

del multipletto (formato da tutte le possibili transizioni tra i componenti della struttura fina dei due termini nSL e $n'SL'$) è la somma

$$\overline{w}(nLS \to n'L'S) = \sum_J \sum_{J'} \overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ'). \qquad (49,14)$$

Poiché, ovviamente, $\sum_J (2J+1) = (2S+1)(2L+1)$, per la probabilità totale si ottiene un'espressione, che coincide con la (49,12). Perciò, per la probabilità relativa (o, ciò che è lo stesso, per l'intensità relativa) di una singola riga spettrale otteniamo

$$\frac{\overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \to n'L'S)} = \frac{(2J+1)(2J'+1)}{(2S+1)} \begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2. \qquad (49,15)$$

L'analisi dei valori numerici, dati da questa formula, mostra che tra le linee del multipletto le piú intense sono quelle per le quali $\Delta J = \Delta L$ (sono chiamate *righe principali*, a differenza delle altre componenti del multipletto, chiamate *righe satelliti*). L'intensità delle righe principali è tanto maggiore quanto piú grande è il valore iniziale di J.

La somma delle quantità (49,15) su J o su J' dà

$$\frac{\sum_{J'} \overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \to n'L'S)} = \frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)},$$

$$\frac{\sum_{J} \overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \to n'L'S)} = \frac{2J'+1}{(2L+1)(2S+1)}. \qquad (49,16)$$

In tal modo, la somma delle intensità di tutte le righe spettrali del multipletto, aventi uno stesso livello iniziale (o finale), è proporzionale al peso statistico del livello iniziale (o finale).

Soffermiamoci ancora sulla struttura iperfina delle linee spettrali dell'atomo. Ricordiamo che la separazione iperfina dei livelli atomici avviene in conseguenza dell'interazione degli elettroni con lo spin del nucleo, se esso è differente da zero (vedi III, § 122). Il momento angolare totale $\boldsymbol{F}$ dell'atomo (insieme col nucleo) è composto dal momento angolare totale degli elettroni $\boldsymbol{J}$ e dal momento del nucleo $\boldsymbol{I}$. Ogni componente della struttura iperfina del livello nJ è caratterizzato dal valore del numero quantico F.

La legge di conservazione del momento angolare porta ad una rigorosa regola di selezione relativa al momento totale F; per la radiazione di dipolo elettrico vale la relazione

$$|F' - F| \leqslant 1 \leqslant F + F'. \qquad (49,17)$$

A causa, però, della eccezionale debolezza dell'interazione degli elettroni con lo spin del nucleo, questa regola può essere trascurata nei calcoli degli elementi di matrice dei momenti elettrici (e magne-

tici) dello strato elettronico dell'atomo. Quindi restano valide anche le precedenti regole di selezione relative al momento elettronico J e alla parità elettronica. In particolare, in forza di quest'ultima regola, sono proibite le transizioni di dipolo elettrico tra componenti della struttura iperfina di uno stesso termine: tutti i livelli hanno la stessa parità, mentre le transizioni indicate sono possibili solo tra stati di parità differente.

Poiché l'operatore del momento di dipolo commuta con lo spin del nucleo, la dipendenza degli elementi di matrice dai numeri I e F può essere stabilita in forma esplicita; questi calcoli si differenziano da quelli fatti per il caso di accoppiamento LS soltanto per un evidente cambiamento delle notazioni. La probabilità di radiazione, sommata sui valori finali della proiezione del momento angolare totale F è

$$w(nJIF \to n'J'IF') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\frac{1}{2F+1}|\langle n'J'IF' \| d \| nJIF\rangle|^2,$$
$$\omega = \omega(nJ \to n'J'), \qquad (49,18)$$

dove il quadrato dell'elemento di matrice ridotto è dato dalla formula

$$|\langle n'J'IF' \| d \| nJIF\rangle|^2 =$$
$$= (2F+1)(2F'+1)\begin{Bmatrix} J' & F' & I \\ F & J & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'J' \| d \| nJ\rangle|^2. \qquad (49,19)$$

PROBLEMA

La maggioranza delle righe spettrali dei metalli alcalini può essere descritta come il risultato di transizioni di un elettrone esterno (ottico) nel campo autoconsistente del resto dell'atomo, che forma una configurazione chiusa; lo stato dell'atomo è costruito secondo il modello di accoppiamento LS. In queste ipotesi trovare le intensità relative dei componenti della struttura fina delle righe spettrali.

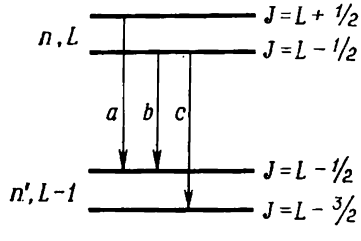


Fig. 1

Soluzione. I momenti angolari totali L e $S = 1/2$ dell'atomo coincidono col momento orbitale e con lo spin dell'elettrone ottico. Perciò la parità dello stato è uguale a $(-1)^L$ (la parità della configurazione chiusa del resto atomico è positiva). Le regole di selezione relative alla parità vietano, di conseguenza, la transizione di dipolo a $L' = L$, e quindi sono possibili solo le transizioni a $L' - L = \pm 1$. Le transizioni tra i componenti dei livelli di doppietto nL e $n', L-1$ danno, in forza della regola di selezione relativa a J, tre righe in totale (fig. 1). Le intensità relative (che indichiamo con a, b, c) si determinano piú facilmente (senza ricorrere direttamente alla formula (49,15)) mediante le regole (49,16). Facendo il rapporto tra le somme delle intensità delle righe aventi due dati livelli iniziali (o finali) troviamo le due seguenti ugua-

glianze:

$$\frac{b+c}{a}=\frac{2L}{2L+2}, \quad \frac{a+b}{c}=\frac{2L}{2L-2},$$

dalle quali otteniamo

$$a:b:c=[(L+1)(2L-1)]:1:[(L-1)(2L+1)].$$

Se $L=1$, allora il livello piú basso non è separato, la riga c manca, e $a/b=2$.

§ 50. *Radiazione di atomi. Tipo magnetico*

Il momento magnetico dell'atomo è dell'ordine di grandezza del magnetone di Bohr: $\mu \sim e\hbar/mc$. Questa stima si differenzia per il fattore α dall'ordine di grandezza del momento di dipolo elettrico: $d \sim ea \sim \hbar^2/me$ (poiché anche $v/c \sim \alpha$, si ha $\mu \sim dv/c$, come c'era da aspettarsi). Da qui discende che la probabilità di radiazione di dipolo magnetico ($M1$) da parte di un atomo è circa α^2 volte minore della probabilità di radiazione di dipolo elettrico (della stessa frequenza). Perciò la radiazione magnetica è di fatto importante solo per quelle transizioni, che sono proibite da regole di selezione inerenti al caso elettrico.

Per quanto riguarda la radiazione di quadrupolo elettrico ($E2$), il rapporto della sua probabilità alla probabilità di radiazione $M1$, è, per ordine di grandezza, uguale a

$$\frac{E2}{M1} \sim \frac{(ea^2)^2\,\omega^2/c^2}{\mu^2} \sim \frac{a^4m^2\omega^2}{\hbar^2} \sim \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2 \tag{50,1}$$

(il momento di quadrupolo è $\sim ea^2$, $E \sim \hbar^2/ma^2$ è l'energia atomica, ΔE la variazione energetica nella transizione). Come si vede, per frequenze atomiche medie (cioè per $\Delta E \sim E$) le probabilità delle radiazioni $E2$ e $M1$ sono dello stesso ordine di grandezza (a condizione, ovviamente, che ambedue le radiazioni siano permesse dalle regole di selezione). Se invece $\Delta E \ll E$ (ad esempio, per transizioni tra componenti della struttura fina di uno stesso termine), allora la radiazione $M1$ è piú probabile della radiazione $E2$.

Le transizioni di dipolo magnetico obbediscono a rigorose regole di selezione

$$|J'-J| \leqslant 1 \leqslant J+J', \tag{50,2}$$

$$PP' = 1. \tag{50,3}$$

Nel caso di accoppiamento LS si hanno regole addizionali di selezione ancora piú restrittive che non per il caso elettrico. Quest'ultima circostanza è connessa con una proprietà specifica del momento magnetico dell'atomo, dovuta alla identità delle particelle del sistema (elettroni). Precisamente, l'operatore del momento magnetico dell'atomo si esprime attraverso gli operatori dei suoi momenti

orbitale e di spin secondo la relazione

$$\mu = -\mu_0 (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) = -\mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{S}), \tag{50,4}$$

dove $\mu_0 = |e| \hbar/2mc$ è il magnetone di Bohr (vedi III, § 113). Poiché il momento totale si conserva, l'operatore $\mathbf{J}$ non ha elementi di matrice non diagonali rispetto all'energia; quindi, nello studio delle transizioni radiative è sufficiente scrivere $\mu = -\mu_0 \mathbf{S}$[1]).

Se si trascura l'interazione spin-orbita, ognuno dei momenti $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{S}$ si conserva separatamente. Perciò l'operatore $\mathbf{S}$ è diagonale in tutti i numeri quantici nSL, caratterizzanti il termine non separato. Perché avvenga una qualsiasi transizione, deve, quindi, variare necessariamente il numero J. In tal modo, abbiamo le seguenti regole di selezione:

$$n' = n, \quad S' = S, \quad L' = L, \quad J' - J = \pm 1, \tag{50,5}$$

cioè le transizioni sono possibili solo tra componenti della struttura fina di uno stesso termine.

Il calcolo della probabilità di radiazione può, in questo caso, essere portato fino alla fine. Cambiando opportunamente le notazioni nella formula (49,10), abbiamo

$$w(nLSJ \to nLSJ') = \frac{4\omega^3\mu_0^2}{3\hbar c^3}(2J'+1)\begin{Bmatrix} S & J' & L \\ J & S & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle S \| S \| S\rangle|^2.$$

L'elemento di matrice ridotto, che compare qui, dello spin rispetto alle proprie autofunzioni, è dato dalla formula

$$\langle S \| S \| S\rangle = \sqrt{S(S+1)(2S+1)} \tag{50,6}$$

(vedi III (29,13)). Il simbolo $6j$ che ci è necessario è il seguente:

$$\begin{Bmatrix} S & J & -1 & L \\ J & S & & 1 \end{Bmatrix}^2 = \frac{(L+S+J+1)(L+S-J+1)(L-S+J)(S-L+J)}{S(2S+1)(2S+2)(2J-1)2J(2J+1)} \tag{50,7}$$

(vedi tabella III, § 108). Come risultato otteniamo

$$w(nLSJ \to nLS, J-1) = \frac{2J+1}{2J-1} w(nLS, J-1 \to nLSJ) =$$

$$= \frac{\omega^3\mu_0^2}{3\hbar c^3(2J+1)J}(L+S+J+1)(L+S-J+1)(J+S-L)(J+L-S). \tag{50,8}$$

Le transizioni tra componenti della struttura iperfina di uno stesso livello (le frequenze corrispondenti cadono nel campo delle onde radio) non possono avere luogo come transizione di dipolo

---

[1]) Un'eccezione è costituita dai casi, in cui il momento elettronico dell'atomo $\mathbf{J}$ non si conserva: se si tiene conto della struttura iperfina, in presenza di campo esterno, ecc. (vedi problemi).

elettrico, in quanto tutti questi componenti hanno la stessa parità. Senza cambiamento di parità avvengono le transizioni $E2$ e $M1$. Ma per la larghezza relativamente piccola degli intervalli della struttura iperfina, la radiazione $E2$ è poco probabile rispetto alla $M1$ (cfr. la (50,1)), e quindi le transizioni citate avvengono come transizioni di dipolo magnetico.

PROBLEMI

1. Trovare la probabilità di transizione $M1$ tra componenti della struttura iperfina di uno stesso livello.

Soluzione. La probabilità di transizione è data dalle formule (49,18-19), nelle quali figurerà ora l'elemento di matrice ridotto diagonale del momento magnetico $\langle nJ \parallel \mu \parallel nJ \rangle$. Il suo valore può essere scritto immediatamente se si nota che l'elemento di matrice completo (non ridotto) $\langle nJM | \mu_z | nJM \rangle$ determina proprio la separazione del dato livello per effetto Zeeman (vedi III, § 113) ed è uguale a $-\mu_0 g M$, dove g è il fattore di Landé. L'elemento di matrice ridotto invece è (vedi III (29,7))

$$\langle nJ \parallel \mu \parallel nJ \rangle = \frac{1}{M} \sqrt{J(J+1)(2J+1)}\, \langle nJM | \mu_z | nJM \rangle = \\ = -\mu_0 g \sqrt{J(J+1)(2J+1)}.$$

Come risultato, per la probabilità cercata, troviamo[1])

$$w(nJIF \to nJI,\ F-1) = \frac{2F+1}{2F-1}\, w(nJI,\ F-1 \to nJIF) = \\ = \frac{\omega^3 \mu_0^2 g^2}{3\hbar c^3 (2F+1) F} (J+I+F+1)(J+I-F+1)(F+J-I)(F-J+I).$$

Questa espressione si differenzia dalla (50,8) solo per un evidente cambiamento delle notazioni e per il fattore addizionale g^2.

2. Trovare la probabilità di transizione $M1$ tra i componenti Zeeman di uno stesso livello atomico.

Soluzione. Il problema riguarda la transizione $M \to M\text{-}1$ per valori invariati di nJ; la frequenza di transizione (vedi piú avanti, la formula (51,3)) è $\hbar\omega = \mu_0 gH$ (g è il fattore di Landé). L'elemento di matrice della componente sferica μ_{-1} del vettore μ è determinato dalla formula

$$|\langle nJ,\ M-1 | \mu_{-1} | nJM \rangle| = \sqrt{\frac{(J-M+1)(J+M)}{2J(J+1)(2J+1)}}\, |\langle nJ \parallel \mu \parallel nJ \rangle| = \\ = -\mu_0 g \sqrt{\frac{1}{2}(J-M+1)(J+M)}$$

---

[1]) Un interessante esempio è dato dalla transizione tra le componenti della struttura iperfina del livello fondamentale dell'atomo di idrogeno ($1s_{1/2}$), rigorosamente vietata non solo come transizione $E1$, ma anche come $E2$ (questo secondo divieto è connesso con la regola che proibisce la transizione di quadrupolo in cui $J + J' = 1$). A questa transizione corrisponde la frequenza $\omega = 2\pi \cdot 1{,}42 \cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1}$ (lunghezza d'onda $\lambda = 21$ cm). Ponendo $g = 2$, $I = 1/2$, $J = 1/2$, $F = 1$, $F' = 0$, otteniamo

$$w = \frac{4\omega^3 \mu_0^2}{3\hbar c^3} = 2{,}85 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

(vedi III (27,12) e problema precedente). Per la probabilità di transizione troviamo

$$w=\frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\,|\langle nJ,\ M-1\,|\,\mu_{-1}\,|\,nJM\rangle|^2=\frac{2\mu_0^5H^3}{3\hbar^4c^3}\,(J-M+1)\,(J+M).$$

§ 51. *Radiazione di atomi. Effetto Zeeman e effetto Stark*

In un campo magnetico esterno H (che è supposto debole) ogni livello atomico di momento totale J si separa in $(2J+1)$ livelli

$$E_M=E^{(0)}+\mu_0 gMH, \tag{51,1}$$

dove $E^{(0)}$ è il livello imperturbato, μ_0 è il magnetone di Bohr, g il fattore di Landé, M la proiezione del momento J sulla direzione del campo (vedi III, § 113). La degenerazione rispetto alle direzioni del momento viene, in tal modo, rimossa completamente.

Corrispondentemente si separano anche le righe spettrali, connesse con le transizioni tra due livelli separati. Il numero delle componenti di una riga è determinato dalla regola di selezione relativa al numero M, secondo la quale nella radiazione di dipolo deve valere la relazione[1])

$$m=M-M'=0,\ \pm 1. \tag{51,2}$$

Le componenti, connesse alle transizioni con $m=0$ e $m=\pm 1$, sono chiamate componenti π e componenti σ. Le frequenze relative sono

$$\begin{aligned}\hbar\omega_\pi&=\hbar\omega^{(0)}+\mu_0H\,(g-g')\,M,\\ \hbar\omega_\sigma&=\hbar\omega^{(0)}+\mu_0H\,[gM-g'\,(M\pm 1)].\end{aligned} \tag{51,3}$$

Nel caso particolare in cui $g=g'$, abbiamo

$$\hbar\omega_\pi=\hbar H\omega^{(0)},\quad \hbar\omega_\sigma=\hbar\omega^{(0)}\mp\mu_0 gH, \tag{51,4}$$

indipendentemente dal valore di M; in altre parole, in questo caso la riga si separa in un tripletto con la componente π non spostata e le componenti σ disposte simmetricamente rispetto ad essa (si ha il cosiddetto *effetto Zeeman* « normale »).

La probabilità totale (su tutte le direzioni) di radiazione è proporzionale al quadrato del modulo $|\langle n'J'M'\,|\,d_{-m}\,|\,nJM\rangle|^2$. Quindi, in virtú della formula (46,19) in cui $j=1$, la probabilità relativa di radiazione di ciascuna delle componenti Zeeman della riga spettrale vale

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J\\ M' & m & -M\end{pmatrix}^2. \tag{51,5}$$

---

[1]) Sono inoltre vietate le transizioni a $M=M'=0$, se $J'=J$. Questo segue direttamente dalle espressioni generali III (29,7) per gli elementi di matrice di un vettore qualsiasi.

Nel caso particolare dell'effetto Zeeman « normale » si hanno in tutto tre componenti, ognuna delle quali è connessa a transizioni da tutti i valori iniziali di M per un dato m. Poiché

$$\sum_{MM'} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{3} \tag{51,6}$$

(vedi III (106,12)), in questo caso la radiazione di tutte e tre le componenti è equiprobabile.

Presenta, tuttavia, un grande interesse l'intensità relativa delle componenti Zeeman relativamente ad una determinata direzione (definita rispetto alla direzione della sorgente del campo magnetico applicato). Secondo la (45,5) la probabilità di radiazione (e insieme l'intensità della riga) in una data direzione $\boldsymbol{n}$ è proporzionale a $\sum |\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{d}_{fi}|^2$, dove la somma viene fatta sulle due polarizzazioni indipendenti di $\boldsymbol{e}$, per il dato $\boldsymbol{n}$.

Parallelamente alla direzione del campo (asse z) questa somma è uguale a

$$|(d_x)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2,$$

oppure, passando in coordinate sferiche

$$|(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2.$$

Questo significa che nella direzione longitudinale (parallela al campo) si possono osservare soltanto le due componenti σ ($m = \pm 1$): le loro intensità sono proporzionali a

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{pmatrix}^2 . \tag{51,7}$$

Possedendo valori determinati della proiezione del momento m lungo la direzione di propagazione, queste righe sono polarizzate circolarmente a destra ($m = 1$) e a sinistra ($m = -1$) (vedi § 8).

Nella direzione perpendicolare alla direzione del campo (sia questa la direzione dell'asse x) l'intensità è proporzionale alla somma

$$|(d_z)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2 = |(d_0)_{fi}|^2 + \frac{1}{2}\{|(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2\}.$$

In tal modo, nella direzione trasversale si osservano le due componenti σ e la componente π, aventi intensità rispettivamente proporzionali a

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{pmatrix}^2 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix}^2 \tag{51,8}$$

(le intensità delle componenti σ sono due volte minori dell'intensità nella direzione longitudinale). La componente π è polarizzata

linearmente secondo l'asse z, mentre le componenti σ in questa direzione sono polarizzate linearmente secondo l'asse y.

Notiamo che le intensità relative delle componenti Zeeman sono completamente determinate dai valori iniziali e finali di J e di M indipendentemente dalle altre caratteristiche dei livelli.

Le regole di selezione vietano le transizioni di dipolo elettrico tra componenti Zeeman di uno stesso livello, poiché tutte hanno la stessa parità. Per la stessa ragione indicata alla fine del paragrafo precedente per le transizioni tra componenti della struttura iperfina di un livello, le transizioni citate avvengono come transizione di dipolo magnetico. In forza della regola di selezione relativa al numero M, le transizioni avvengono soltanto tra componenti contigue ($M' - M = \pm 1$)[1].

La separazione dei livelli di un atomo in un campo elettrico debole (*effetto Stark*), a differenza della separazione in un campo magnetico, non rimuove completamente la degenerazione rispetto alle direzioni del momento angolare. Tutti i livelli, ad eccezione dei livelli di $M = 0$, rimangono doppiamente degeneri: ad ognuno sono connessi due stati con proiezione del momento angolare M e $-M$.

Il calcolo delle intensità relative delle componenti Stark di una riga spettrale è del tutto analogo a quello esposto sopra per l'effetto Zeeman[2]). Occorre tener presente che nell'intensità delle componenti π danno il loro apporto (per $M \neq 0$) le transizioni $M \to M$ e $-M \to -M$ e all'intensità delle componenti σ le transizioni $M \to M \pm 1$ e $-M \to -(M \pm 1)$. Perciò, ad esempio, nella direzione trasversale le intensità delle componenti sono proporzionali a

$$2\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix}^2,$$

mentre le intensità delle componenti σ sono proporzionali alle somme

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \pm 1 & \mp 1 & -M \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M \mp 1 & \pm 1 & M \end{pmatrix}^2 = \\ = \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \pm 1 & \mp 1 & -M \end{pmatrix}^2$$

---

[1]) Le frequenze di queste transizioni cadono nella banda centimetrica e vengono osservate in assorbimento o in emissione forzata (risonanza paramagnetica elettronica): gli atomi assorbenti si trovano in un intenso campo magnetico costante (che produce la separazione per effetto Zeeman) e in un campo debole di onde radio di frequenza di risonanza.

[2]) Ci si riferisce qui all'effetto quadratico Stark, che è proprio di tutti gli atomi, ad eccezione dell'idrogeno (vedi III, § 76). Il campo è supposto tanto debole che la separazione da esso causata è piccola perfino rispetto agli intervalli della struttura fina.

(ricordiamo che per il cambiamento del segno di tutti i numeri della seconda riga i simboli $3j$ possono cambiare solo di segno, e quindi i loro quadrati non cambiano).

In un campo esterno, anche debole, il momento angolare totale $\boldsymbol{J}$, rigorosamente parlando, non si conserva piú; in un campo omogeneo viene osservata esattamente solo la conservazione della proiezione del momento M. Quindi anche nelle transizioni radiative in un campo debole la conservazione del momento non è rigorosamente obbligatoria, e nello spettro degli atomi possono comparire righe, vietate dalle ordinarie regole di selezione.

Il calcolo delle intensità di queste righe si riduce al calcolo delle correzioni nella matrice del momento di dipolo, che, a sua volta, richiede la determinazione delle correzioni alle funzioni d'onda degli stati stazionari. Nell'approssimazione del primo ordine (rispetto al campo esterno debole) della teoria perturbativa, nella funzione d'onda compaiono « miscele » di stati, legati con gli originari elementi di matrice, non nulli, della perturbazione ($-\boldsymbol{E}\boldsymbol{d}$ per un campo elettrico); la correzione di un certo stato ψ_2 allo stato ψ_1 è uguale a

$$\frac{-\boldsymbol{E}\boldsymbol{d}_{21}}{E_1-E_2}\psi_2.$$

Di conseguenza, nell'elemento di matrice della transizione « vietata » compare il termine

$$\frac{-(\boldsymbol{E}\boldsymbol{d}_{21})\,\boldsymbol{d}_{32}}{E_1-E_2},$$

che è differente da zero se sono possibili le transizioni da uno stato « intermedio » 2 agli stati iniziale e finale 1 e 3.

§ 52. Radiazione di atomi. Atomo di idrogeno

L'atomo di idrogeno costituisce l'unico caso nel quale il calcolo degli elementi di matrice di transizione può essere eseguito fino alla fine in forma analitica (*W. Gordon*, 1929).

La parità di stato dell'atomo di idrogeno è uguale a $(-1)^l$, è cioè univocamente determinata dal momento angolare orbitale dell'elettrone (ricordiamo che il numero l, in quanto numero che determina la parità di stato, conserva il suo significato anche per le funzioni d'onda relativistiche esatte, cioè quando si tiene conto dell'interazione spin-orbita). Perciò, la regola di selezione relativa alla parità vieta rigorosamente le transizioni di dipolo elettrico senza variazione di l; sono possibili solo transizioni in cui $l \to l \pm 1$. La variazione del numero quantico principale n non è in alcun modo limitata.

Il momento di dipolo dell'atomo di idrogeno si riduce al raggio vettore dell'elettrone: $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{r}$. Poiché la funzione d'onda dell'elettro-

ne nell'atomo di idrogeno è data dal prodotto della parte angolare con la funzione radiale R_{nl}, gli elementi di matrice ridotti del raggio vettore si possono anch'essi rappresentare sotto forma di prodotto

$$\langle n', l-1 \| r \| nl \rangle = \langle l-1 \| \mathbf{v} \| l \rangle \int_0^\infty R_{n', l-1} r R_{nl} r^2 \, dr,$$

dove $\langle l-1 \| \mathbf{v} \| l \rangle$ sono gli elementi di matrice ridotti del versore $\mathbf{v}$ nella direzione $\mathbf{r}$. Questi ultimi sono uguali a

$$\langle l-1 \| \mathbf{v} \| l \rangle = \langle l \| \mathbf{v} \| l-1 \rangle^* = i\sqrt{l}$$

(vedi III (29,14). In tal modo, troviamo

$$\langle n', l-1 \| r \| nl \rangle = -\langle nl \| r \| n', l-1 \rangle =$$
$$= i\sqrt{l} \int_0^\infty R_{n', l-1} R_{nl} r^3 \, dr. \qquad (52,1)$$

Le funzioni radiali non relativistiche dello spettro discreto dell'atomo di idrogeno sono date dalla formula III (36,13)[1])

$$R_{nl} = \frac{2}{n^{l+2}(2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}} \times$$
$$\times (2r)^l e^{-r/n} F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2r}{n}\right). \qquad (52,2)$$

L'integrale (52,1), contenente il prodotto di due funzioni ipergeometriche confluenti, si calcola mediante le formule riportate nel vol. III, appendice, § f[2]). Il calcolo porta al risultato seguente:

$$\langle n', l-1 \| r \| nl \rangle = i\sqrt{l} \frac{(-1)^{n'-1}}{4(2l-1)!} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(n+l)!\,(n'+l-1)!}{(n-l-1)!\,(n'-l)!}} \frac{(4nn')^{l+1}(n-n')^{n+n'-2l-2}}{(n+n')^{n+n'}} \times$$
$$\times \left\{ F\left(-n+l+1, -n'+l, 2l, -\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2 F\left(-n+l-1, -n'+l, 2l, -\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right) \right\}, \qquad (52,3)$$

---

[1]) In questo paragrafo si usano unità atomiche. In unità ordinarie le espressioni che seguono per gli elementi di matrice della coordinata devono essere moltiplicate per $\hbar^2/me^2$ (se invece si tratta di uno ione idrogenoide di numero Z, occorre moltiplicare per $\hbar^2/mZe^2$).

[2]) Con le notazioni là introdotte si vuole indicare il calcolo dell'integrale $J^{12}_{2l+2}(-n+l+1, -n'+l)$. Il calcolo viene eseguito mediante le formule (f, 12-16).

dove $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ sono le funzioni ipergeometriche. Poiché i parametri α e β, in questo caso, sono uguali a numeri interi negativi (oppure a zero), queste funzioni si riducono a polinomi[1]).

Riportiamo, per comodità di consultazione, alcune espressioni che si ricavano dalla (52,3) in alcuni casi particolari (il valore di l viene indicato mediante il simbolo spettroscopico s, p, d, ...):

$$
\begin{aligned}
|\langle 1s \| r \| np \rangle|^2 &= \frac{2^8 n^7 (n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}}, \\
|\langle 2s \| r \| np \rangle|^2 &= \frac{2^{17} n^7 (n^2-1)(n-2)^{2n-6}}{(n+2)^{2n+6}} \\
|\langle 2p \| r \| nd \rangle|^2 &= \frac{2^{19} n^9 (n^2-1)(n-2)^{2n-7}}{3(n+2)^{2n+7}}, \\
|\langle 2p \| r \| ns \rangle|^2 &= \frac{2^{15} n^9 (n-2)^{2n-6}}{3(n+2)^{2n+6}}.
\end{aligned}
\tag{52,4}
$$

La formula (52,3) non è applicabile alle transizioni senza variazione del numero quantico principale n (cioè a transizioni tra componenti della struttura fina del livello). In questo caso ($n = n'$) per l'integrazione partiamo dalla rappresentazione delle funzioni radiali attraverso i polinomi di Laguerre:

$$
R_{nl} = -\frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}}\, e^{-r/n}\left(\frac{2r}{n}\right)^l L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right) \tag{52,5}
$$

Nell'integrale

$$
\int_0^\infty R_{n,\,l-1} R_{nl} r^3\, dr \sim \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{2l+2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho)\, L_{n+l-1}^{2l-1}(\rho)\, d\rho
$$

sostituiamo uno dei polinomi con la sua espressione attraverso la funzione originale (vedi III, appendice, § d)

$$
L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = -\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}\, e^{\rho}\rho^{-2l-1}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n-l-1} e^{-\rho}\rho^{n+l}.
$$

Dopo la $(n-l-1)$-esima integrazione per parti otteniamo l'integrale della forma

$$
\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{n+l}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n-l-1} \rho L_{n+l-1}^{2l-1}(\rho)\, d\rho,
$$

nel quale si va a sostituire il polinomio di Laguerre con la sua espressione esplicita secondo la formula

$$
L_n^m(\rho) = (-1)^m n! \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{m+k} \frac{(-\rho)^k}{k!}
$$

[1]) Tabelle numeriche per elementi di matrice e di probabilità di transizione per l'idrogeno si possono trovare nel libro: *H. A. Bethe, E. E. Salpeter*, Quantum Mechanics of one- and two- Electron Atoms, New York, 1957.

Dopo la derivazione, nella somma restano in tutto tre termini e l'integrazione è elementare. Il calcolo porta al seguente semplice risultato:

$$\langle n,\, l-1 \,\|\, r \,\|\, nl\rangle = i\sqrt{l}\cdot\frac{3}{2}\, n\sqrt{n^2-l^2}. \tag{52,6}$$

L'integrale

$$\int_0^\infty R_{n',\, l-1} R_{nl} r^3\, dr = \int_0^\infty \chi_{n',\, l-1}\,(r\chi_{nl})\, dr$$

(dove $\chi_{nl} = rR_{nl}$) è il coefficiente dello sviluppo della funzione $r\chi_{nl}$ secondo il sistema di funzioni ortogonali $\chi_{n',\, l-1}$ ($n' = 1, 2, \ldots$). La somma dei quadrati dei moduli di questi coefficienti è uguale all'integrale del quadrato della funzione sviluppata[1]). Quindi abbiamo

$$\sum_{n'} |\langle n',\, l-1 \,\|\, r \,\|\, nl\rangle|^2 = l\int_0^\infty r^2\chi^2_{nl}\, dr. \tag{52,7}$$

Servendoci della nota espressione per il valore medio di r^2 nello stato nl (vedi III (36,16)), troviamo la seguente regola di somma:

$$\sum_{n'} |\langle n',\, l-1 \,\|\, r \,\|\, nl\rangle|^2 = l\frac{n^2}{2}\,[5n^2+1-3l\,(l+1)]. \tag{52,8}$$

Per dati valori di n, l e grandi valori di n' l'elemento di matrice della transizione $nl \to n'l'$ decresce secondo la legge

$$|\langle n'l' \,\|\, r \,\|\, nl\rangle|^2 \sim \frac{3}{n'^3}, \tag{52,9}$$

come è facile convincersene sia dai casi particolari (52,4), che dalla formula generale (52,3). Questo risultato è del tutto naturale: i livelli energetici coulombiani $E' = -1/2n'^2$ per grandi n' sono disposti in modo quasi continuo, e la probabilità di transizioni in qualsiasi livello nell'intervallo dE' è proporzionale alla densità « di disposizione » di questi livelli, che a sua volta è $\sim n'^{-3}$.

L'effetto Stark nell'idrogeno possiede, come è noto, una sua peculiarità (III, § 77): la separazione è proporzionale alla prima potenza dell'intensità del campo elettrico. Il campo è supposto non intenso (condizione dell'applicabilità della teoria delle perturbazioni) ma, nel contempo, tale che la separazione dei livelli sia grande rispetto alla loro struttura fina. Con queste condizioni la grandezza del momento angolare non si conserva e i livelli devono essere classificati secondo i numeri quantici parabolici n_1, n_2, m. L'ultimo di questi numeri, il numero quantico magnetico m, determina, come

[1]) La somma viene eseguita sia rispetto agli stati dello spettro discreto che dello spettro continuo.

prima, la proiezione del momento orbitale sull'asse z (direzione del campo), la quale, nelle date condizioni (si trascura l'interazione spin-orbita), si conserva. Perciò per questo numero quantico vale la solita regola di selezione

$$m' - m = 0, \pm 1. \tag{52,10}$$

Per la variazione dei numeri n_1 e n_2, invece, non si hanno restrizioni.

Gli elementi di matrice del momento di dipolo in coordinate paraboliche possono essere calcolati analiticamente. Le formule che si ottengono, tuttavia, sono molto complesse e noi non le riporteremo[1]).

PROBLEMA

Trovare la separazione per effetto Stark dei livelli dell'idrogeno nel caso in cui il valore della separazione è piccolo rispetto agli intervalli della struttura fina (ma grande rispetto allo spostamento Lamb).

Soluzione. Nelle condizioni indicate rimane una doppia degenerazione dei livelli imperturbati con $l = j \pm 1/2$, e quindi la separazione per effetto Stark resta lineare rispetto al campo. Il valore Δ della separazione si determina dall'equazione secolare

$$\begin{vmatrix} -\Delta & -E(d_z)_{12} \\ -E(d_z)_{21} & -\Delta \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta = \pm E\,|(d_z)_{12}|$$

(gli indici 1, 2 corrispondono agli stati di $l = j \pm 1/2$ e di dato numero quantico magnetico m; la perturbazione $V = -Ed_z$ è diagonale in m e non ha elementi diagonali in l). L'elemento di matrice della grandezza orbitale d_z si calcola mediante le formule III (29,7), III (109,3) secondo le quali si ha

$$\langle j,\ l-1,\ m\,|\,d_z\,|\,jlm\rangle = \frac{m}{\sqrt{j(j+1)(2j+1)}}\langle j,\ l-1\,\|\,d\,\|\,jl\rangle,$$

$$\langle j,\ l-1\,\|\,d\,\|\,jl\rangle = -(2j+1)\begin{Bmatrix} l-1 & j & 1/2 \\ j & l & 1 \end{Bmatrix}\langle l-1\,\|\,d\,\|\,l\rangle,$$

dove occorre porre $l = j + 1/2$; la quantità $\langle l-1\,\|\,d\,\|\,l\rangle$ è data dalla (52,6). Come risultato finale otteniamo

$$\Delta = \pm\frac{3}{4}\sqrt{n^2-(j+1/2)^2}\,\frac{nm}{j(j+1)}E.$$

§ 53. *Radiazione di molecole biatomiche. Spettri elettronici*

La peculiarità degli spettri molecolari è legata, in primo luogo, alla suddivisione dell'energia della molecola in energia elettronica, oscillazionale e rotazionale; ognuna di queste energie è piccola rispetto a quella che la precede. La struttura dei livelli delle molecole biatomiche è stata dettagliatamente studiata nel vol. III, cap. XI.

---

[1]) Queste formule e le corrispondenti tabelle numeriche si possono trovare nel libro già citato di *H. Bethe* e *E. Salpeter*.

Ora cercheremo di chiarire la struttura dello spettro e di calcolare le intensità delle righe spettrali[1]).

Incominciamo dal caso generale, quando per la transizione cambia lo stato elettronico della molecola (e insieme ad esso cambiano anche, generalmente, gli stati oscillazionale e rotazionale). Le frequenze di queste transizioni cadono nel campo visivo e ultravioletto dello spettro. L'insieme di queste transizioni formano il cosiddetto *spettro elettronico della molecola.* Qui noi parleremo sempre di transizioni di dipolo elettrico; le transizioni di altri tipi sono poco importanti nella spettroscopia molecolare.

Come anche per le transizioni di dipolo in un sistema qualsiasi, è valida la regola di selezione relativa al momento angolare totale J della molecola:

$$|J' - J| \leqslant 1 \leqslant J + J'. \tag{53,1}$$

Alla rigorosa regola di selezione relativa alla parità del sistema corrisponde, in questo caso, la regola di selezione relativa al *segno* del livello; ricordiamo che, secondo la terminologia usata in spettroscopia molecolare, gli stati associati a funzioni d'onda, che per l'inversione spaziale (cambio del segno delle coordinate degli elettroni e dei nuclei) cambiano o non cambiano segno, sono chiamati stati *positivi* o *negativi*, rispettivamente. In tal modo, abbiamo la seguente regola rigorosa:

$$+ \to -, \quad - \to +. \tag{53,2}$$

Se la molecola è composta di atomi identici (con nuclei di uno stesso isotopo), si ha la classificazione dei livelli rispetto alla permutazione delle coordinate dei nuclei: livelli *simmetrici* (s) associati a funzioni d'onda che non cambiano segno per la trasformazione indicata, e livelli *antisimmetrici* (a) associati a funzioni d'onda che invece cambiano segno. Poiché l'operatore del momento di dipolo elettronico non viene affatto toccato da questa trasformazione, i suoi elementi di matrice sono differenti da zero solo per transizioni senza cambiamento di questa simmetria[2])

$$s \to s, \quad a \to a. \tag{53,3}$$

Questa regola non è, tuttavia, assolutamente rigorosa. Infatti, il fatto che un livello goda di questa simmetria è connesso con il fatto che la molecola possiede questo o quel valore determinato dello spin totale dei nuclei I. Per la straordinaria debolezza dell'interazione degli spin nucleari con gli elettroni, lo spin I si con-

---

[1]) La parte che segue è basata su materiale contenuto nel vol. III, §§ 78, 82-88. Per non appesantire il testo, eviteremo i continui rimandi a questi paragrafi.

[2]) Questa regola vale, ovviamente, per transizioni di multipolo di qualsiasi ordine.

serva con un elevato grado di precisione, ma non rigorosamente. Se si tiene conto di questa interazione, I non avrà un valore determinato, la proprietà di simmetria non si conserverà e la regola di selezione (53,3) viene a cadere.

I termini elettronici di una molecola di atomi identici sono caratterizzati anche dalla *parità* (g oppure u), cioè dal comportamento delle funzioni d'onda per il cambiamento di segno delle coordinate degli elettroni (assumendo come centro il centro della molecola) lasciando invariate le coordinate dei nuclei. Esiste uno stretto legame tra questa proprietà del termine elettronico da una parte, la simmetria nucleare e il segno relativo a questo termine dei livelli rotazionali dall'altra. I livelli, relativi ad un termine elettronico pari (g), possono avere le caratteristiche $s+$ oppure $a-$, e quelli relativi ad un termine dispari le caratteristiche $s-$ oppure $a+$. Dalle regole (53,2) e (53,3) discende anche la regola

$$g \to u, \quad u \to g. \tag{53,4}$$

La regola (53,4) resta approssimativamente valida anche per molecole costituite di isotopi differenti di uno stesso elemento. Poiché le cariche dei nuclei sono identiche, nello studio del termine elettronico per nuclei fissi, noi abbiamo a che fare con un sistema di elettroni in un campo elettrico, che ha un centro di simmetria (situato nel punto che divide a metà la distanza tra i due nuclei). La simmetria della funzione d'onda elettronica rispetto all'inversione in questo punto determina la parità del termine, e poiché il vettore momento di dipolo elettrico per questa trasformazione cambia segno, noi arriviamo alla regola (53,4). Il fatto che questa regola, dedotta come abbiamo detto, sia approssimata è legato alla necessità di considerare i nuclei come immobili. Perciò questa regola viene violata se si tiene conto dell'interazione tra lo stato elettronico e la rotazione della molecola.

Altre regole di selezione sono connesse con queste o quelle concrete supposizioni circa l'intensità relativa delle diverse interazioni nella molecola (cioè circa il tipo di legame). Di conseguenza queste regole possono essere solo approssimate.

La maggior parte dei termini elettronici di molecole biatomiche appartiene ai tipi di legame a oppure b. Ambedue questi tipi sono caratterizzati dal fatto che l'interazione del momento orbitale con l'asse (l'interazione elettrica dei due atomi nella molecola) è forte rispetto a tutti gli altri tipi di interazione. In relazione a ciò esistono i numeri quantici Λ e S (proiezione del momento angolare orbitale degli elettroni sull'asse della molecola e spin totale degli elettroni). L'operatore relativo ad una grandezza orbitale, il momento orbitale elettronico, commuta con l'operatore di spin, e quindi si ha

$$S' - S = 0 \quad (\text{casi } a,\ b). \tag{53,5}$$

La variazione del numero Λ obbedisce alla seguente regola di selezione:

$$\Lambda' - \Lambda = 0, \pm 1 \quad (\text{casi } a, b), \tag{53,6}$$

e per le transizioni tra stati a $\Lambda = 0$ (termini Σ) vale inoltre la regola

$$\Sigma^+ \to \Sigma^+, \ \Sigma^- \to \Sigma^- \quad (\text{casi } a, b) \tag{53,7}$$

(ricordiamo che gli stati Σ^+ e Σ^- si differenziano per il comportamento rispetto alla riflessione nel piano passante per l'asse della molecola). Le regole (53,6-7) si ricavano considerando le molecole nel sistema di coordinate solidale coi nuclei (vedi III, § 87); la regola (53,6) è analoga alla regola di selezione relativa al numero quantico magnetico nel caso di atomi.

I tipi di legame *a* e *b* si differenziano tra loro per la relazione tra l'energia di interazione « spin-asse » e l'energia rotazionale (cioè le differenze tra l'energia dei livelli rotazionali). Nel caso *a* la prima di esse è maggiore della seconda, nel caso *b* è invece di molto inferiore. Studiamo ora questi due casi separatamente.

Caso *a*. In questo caso esiste il numero quantico Σ, proiezione dello spin totale sull'asse della molecola (e con esso esiste anche il numero quantico $\Omega = \Sigma + \Lambda$, proiezione del momento angolare totale). Se ambedue gli stati (iniziale e finale) sono relativi al caso *a*, allora è valida la regola

$$\Sigma' - \Sigma = 0 \quad (\text{caso } a) \tag{53,8}$$

(che discende dalla già citata commutatività del momento di dipolo con lo spin). Dalle (53,6) e (53,8) discende[1])

$$\Omega' - \Omega = 0, \pm 1. \tag{53,9}$$

Se $\Omega = \Omega' = 0$, addizionalmente alla regola generale (53,1), sono vietate le transizioni con $J' = J$[2]):

$$J' - J = \pm 1 \quad \text{per} \quad \Omega = \Omega' = 0 \quad (\text{caso } a). \tag{53,10}$$

Consideriamo le transizioni tra due dati livelli oscillazionali qualsiasi, relativi a due termini elettronici diversi (del tipo *a*). Tenendo conto della struttura fina del termine elettronico, ognuno di questi livelli si separa in piú componenti, il cui numero deve essere identico per ambedue i livelli in forza della regola (53,5) ed è uguale

[1]) Questa regola rimane valida anche nel caso *c* (l'interazione del momento angolare orbitale è piccola rispetto all'interazione « spin-orbita »), quando i numeri Λ e Σ separatamente non esistono.

[2]) Questa regola è analoga al divieto delle transizioni con $J = J'$ per $M = M' = 0$ nel caso di atomi (vedi nota a pag. 223), dove, tuttavia, essa presentava interesse soltanto in presenza di un campo esterno. Nel caso considerato, la regola segue direttamente dalla formula riportata piú avanti (53,12); il simbolo $3j \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si annulla per $J' = J$, quando la somma $J' + J + 1$ è dispari.

a $(2S+1)$. Secondo la regola (53,8) ogni componente di un livello si combina solo con una componente di un altro livello con lo stesso valore di Σ.

Prendiamo ora una coppia di livelli con identici Σ; i loro valori Ω e Ω' possono differenziarsi (insieme a Λ e Λ') di 0 o di ± 1. Se si tiene conto della rotazione, ognuno di essi si separa in una successione di livelli, che si differenziano per i valori dei numeri J e J', che assumono i valori definiti dalle disuguaglianze $J \geqslant |\Omega|$, $J' \geqslant |\Omega'|$. La dipendenza delle probabilità di transizione da questi numeri può venire stabilita in forma generale (*H. Hönl*, *F. London*, 1925).

L'elemento di matrice della transizione $n\Lambda\Omega J M_J \to n'\Lambda'\Omega' J' M'_J$ (dove n indica tutte le altre caratteristiche del termine elettronico, oltre a Ω e Λ) è uguale a

$$|\langle n'\Lambda'\Omega' J' M'_J | d_q | n\Lambda\Omega J M_J\rangle| =$$

$$= \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -\Omega' & q' & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M'_J & q & M_J \end{pmatrix} \times$$

$$\times |\langle n'\Lambda' | \bar{d}_{q'} | n\Lambda\rangle|, \quad (53,11)$$

dove d_q e $\bar{d}_{q'}$ sono le componenti sferiche del vettore momento di dipolo relative rispettivamente al sistema di coordinate fisso xyz e al sistema «mobile» $\xi\eta\zeta$ con l'asse ζ diretto lungo l'asse della molecola (questa formula si ricava mediante la III (110,6)). Gli elementi di matrice $\langle n'\Lambda' \mid \bar{d}_{q'} \mid n\Lambda\rangle$ non dipendono dai numeri quantici rotazionali J, J', ma dipendono solo dalle caratteristiche dei termini elettronici (nel caso considerato non dipendono nemmeno dal numero Σ[1])); perciò nella notazione dell'elemento di matrice sono stati omessi gli indici $\Omega' = \Lambda' + \Sigma$, e $\Omega = \Lambda + \Sigma$.

La probabilità della transizione $n\Lambda\Omega J \to n'\Lambda'\Omega' J'$ è proporzionale al quadrato dell'elemento di matrice (53,11), sommato su M'_J. In forza della formula III (106,12)

$$\sum_{M'_J} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M'_J & q & M_J \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J+1},$$

otteniamo

$$w(n\Lambda\Omega J \to n'\Lambda'\Omega' J') = (2J'+1) \begin{pmatrix} J' & & 1 & J \\ -\Omega' & \Omega' & -\Omega & \Omega \end{pmatrix}^2 B(n', n; \Lambda', \Lambda), \quad (53,12)$$

[1]) Di questo ci si può convincere analogamente a come si fece all'inizio del vol. III, § 24 per la grandezza scalare f. Nel caso considerato, l'operatore della grandezza vettoriale $\boldsymbol{d}$ commuta con l'operatore del vettore conservativo (in approssimazione zero) $\boldsymbol{S}$, e Σ è la proiezione di $\boldsymbol{S}$ sull'asse ζ nel sistema di coordinate in rotazione, proprio nel quale va considerata la condizione di commutazione di $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{S}$.

dove i coefficienti B non dipendono da J, J' (noi trascuriamo, ovviamente, la differenza, relativamente piccola, tra le frequenze di transizioni a J, J' differenti)[1]).

Sommando la (53,12) su J' (in forza della proprietà di ortogonalità dei simboli 3*j* III (106,13)), noi otteniamo semplicemente $B(n', n; \Lambda', \Lambda)$. In altre parole, la probabilità totale di transizione dal livello rotazionale J dello stato Ω a tutti i livelli J' dello stato Ω' non dipende da J.

Caso *b*. In questo caso esiste, accanto al momento angolare totale J, anche il numero quantico K, momento angolare della molecola senza tener conto dello spin. Le regole di selezione relative a questo numero coincidono con le regole generali di selezione relative a qualsiasi grandezza vettoriale orbitale (quale è il momento di dipolo elettrico):

$$|K' - K| \leqslant 1 \leqslant K + K' \quad \text{(caso } b\text{)} \tag{53,13}$$

col divieto addizionale per la transizione con $K = K'$ per $\Lambda = \Lambda' = 0$ (analogamente alla (53,10)):

$$K' - K = \pm 1 \quad \text{per} \quad \Lambda = \Lambda' = 0. \tag{53,14}$$

Consideriamo le transizioni tra componenti rotazionali di determinati livelli oscillazionali di due stati elettronici, relativi al tipo *b*. Le probabilità di transizione tra di essi sono determinate dalle formule (53,12), nelle quali bisogna scrivere K, Λ al posto di J, Ω. Tenendo conto della struttura fina (per $S \neq 0$) ogni livello rotazionale K si separa in $2S + 1$ componenti con $J = |K - S|, \ldots, K + S$; a risultato di ciò, invece di una riga $J \to J'$, si ha un multipletto. Poiché nel dato caso noi abbiamo a che fare con la composizione di momenti $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{S}$ liberi (non legati all'asse della molecola), le formule delle probabilità relative di transizione per le diverse righe del multipletto coincidono con le formule analoghe (49,15) per le componenti della struttura fina degli spettri atomici, dove l'analogo ruolo (nel caso di accoppiamento LS) è svolto dai momenti $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{S}$.

In tal modo, noi abbiamo considerato le regole di selezione, che determinano le possibili righe dello spettro in tutti i casi principali, che si possono avere nelle molecole biatomiche.

L'insieme delle righe originate da transizioni tra le componenti rotazionali di due dati livelli elettronico-oscillazionali costituiscono, come si dice in spettroscopia, una banda; essendo gli intervalli

---

[1]) Ciascuno dei livelli rotazionali J presi in considerazione, se si tiene conto dello sdoppiamento Λ, si separa in due livelli, dei quali uno è positivo e l'altro negativo. Perciò invece della sola transizione $J \to J'$, noi avremo, tenendo conto delle regole di selezione (53,2), due transizioni: dalla componente positiva (negativa) del livello J alla componente negativa (positiva) del livello J'. Le probabilità di queste transizioni sono uguali.

rotazionali piccoli, le righe nella banda sono molto fitte. Le frequenze di queste righe sono date dalle differenze

$$\hbar\omega_{JJ'} = \text{costante} + BJ(J+1) - B'J'(J'+1), \qquad (53,15)$$

dove B, B' sono costanti rotazionali in ambedue gli stati elettronici (per evitare inutili complicazioni, si suppone che i termini elettronici siano termini di singoletto). Per $J' = J, J \pm 1$ la formula (53,15) può essere rappresentata graficamente (fig. 2) mediante tre rami (parabole), i cui punti, per valori interi di J, determinano i valori delle frequenze (la disposizione dei rami nella fig. 2 coorrisponde al

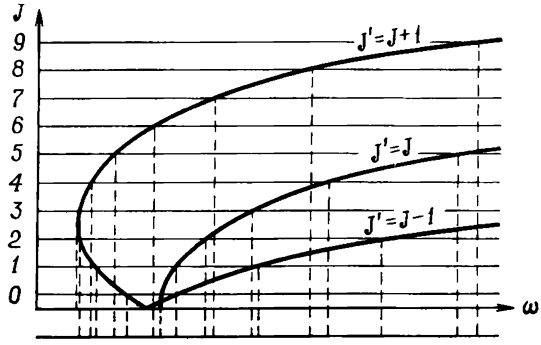


Fig. 2

caso $B' < B$; per $B' > B$ i rami sono aperti dalla parte dei piccoli ω, e il ramo superiore è la curva per $J' = J - 1$)[1]). La presenza di un ramo a curvatura pronunciata porta, come è chiaro dalla figura, ad un infittimento delle linee che si dirigono verso una determinata posizione limite (*testa di banda*).

Parlando della intensità delle righe, è necessario ricordare anche il peculiare fenomeno della alternanza delle intensità in alcune bande dello spettro elettronico di molecole costituite da atomi di uno stesso isotopo (*W. Heisenberg*, *F. Hund*, 1927). Le condizioni di simmetria, connesse con gli spin nucleari, hanno come conseguenza che le componenti rotazionali con valori pari e dispari di K dei termini elettronici Σ, godono di una simmetria opposta rispetto ai nuclei ed hanno corrispondentemente dei diversi pesi statistici nucleari g_s e g_a (vedi III, § 86). Secondo la regola (53,14) nelle transizioni tra due diversi termini Σ sono possibili solo i valori $J' = J \pm 1$; inoltre uno dei due termini Σ deve essere, in forza della regola (53,4), pari e l'altro dispari. Come risultato si ha che, per un dato valore di $J' - J$, le transizioni con valori successivi di

[1]) Le serie di righe, relative a transizioni con $J' = J + 1$, J, $J - 1$, sono chiamate rispettivamente rami P, Q, R.

J avvengono alternativamente tra coppie di livelli simmetrici e coppie di livelli antisimmetrici (come è illustrato dallo schema alla fig. 3 sull'esempio degli stati Σ_g^+ e Σ_u^+). D'altra parte, l'intensità osservabile della riga è proporzionale al numero di molecole che si trovano nel dato stato iniziale, e quindi al suo peso statistico. Perciò l'intensità di righe successive ($J = 0, 1, 2, \ldots$) sarà alternativamente maggiore e minore, alternativamente proporzionale a g_s e g_a (questa alternanza accompagna l'andamento regolare previsto dalle formule (53,12)[1]).

Per la variazione del numero quantico vibrazionale in transizioni tra due differenti termini elettronici non esistono rigorose regole

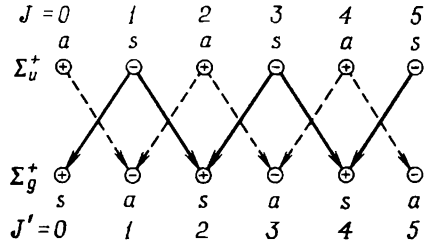


Fig. 3

di selezione. Esiste, tuttavia, una regola (*principio di Frank — Condon*), che permette di predire la variazione piú probabile dello stato oscillazionale. Essa è basata sulla quasi-classicità del moto dei nuclei, connessa col fatto che la massa dei nuclei è grande (cfr. quanto detto sulla predissociazione nel vol. III, § 90)[2]).

Nell'integrale, che determina l'elemento di matrice di transizione tra gli stati vibrazionali E e E' dei termini elettronici $U(r)$ e $U'(r)$, l'apporto principale è dato dalla regione vicina al punto $r = r_0$, in cui

$$U(r_0) - U'(r_0) = E - E' \qquad (53,16)$$

(cioè gli impulsi del moto relativo dei nuclei sono uguali in ambedue gli stati: $p = p'$). Per un dato valore di E la probabilità di transizione (come funzione dell'energia finale E') è tanto maggiore quanto minore è ognuna delle differenze $E - U$ e $E' - U'$. Essa raggiunge il valore massimo per

$$E - U(r_0) = E' - U'(r_0) = 0, \qquad (53,17)$$

---

[1]) Qui si suppone che tutti gli stati con diversi valori dello spin nucleare totale siano popolati uniformemente.

[2]) Rigorosamente parlando, è necessario anche che il numero quantico oscillazionale sia sufficientemente grande.

cioè il « punto di transizione » r_0 (la radice dell'equazione (53,16)) coincide con il punto classico di arresto dei nuclei (la fig. 4 illustra graficamente questo legame tra E e il valore piú probabile di E'). Per visualizzare, si può dire che la transizione è piú probabile in vicinanza del punto in cui i nuclei si fermano e dove, di conseguenza, essi permangono per un intervallo di tempo relativamente grande[1]).

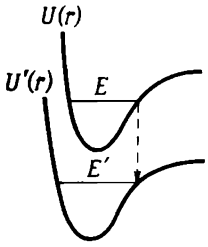


Fig. 4

§ 54. *Radiazione di molecole biatomiche. Spettri oscillazionali e rotazionali*

Le regole di selezione, enumerate nel paragrafo precedente, e le formule per le probabilità di transizione restano valide anche per le transizioni, nelle quali lo stato elettronico della molecola non cambia[2]). Soffermiamoci qui soltanto su alcune peculiarità di queste transizioni.

Innanzitutto, la regola di selezione (53,4) vieta le transizioni (di dipolo) senza variazione dello stato elettronico in molecole di atomi identici, poiché, per tale transizione, la parità del termine elettronico rimarrebbe immutata. Come da quanto detto nel § 53, questo divieto potrebbe essere violato solo tenendo conto della interazione degli spin nucleari con gli elettroni, e per molecole di isotopi differenti di uno stesso elemento, già per effetto dell'influenza della rotazione sullo stato elettronico.

Il calcolo degli elementi di matrice del momento di dipolo si riconduce (secondo le formule III, § 87) al calcolo di questi elementi nel sistema di coordinate rotante con la molecola. La funzione d'onda della molecola in questo sistema è rappresentata dal prodotto della funzione d'onda degli elettroni per una data distanza r tra i nuclei e la funzione d'onda del moto vibrazionale dei nuclei nel campo efficace $U(r)$ degli elettroni e dei nuclei. Trascurando completamente l'effetto del moto dei nuclei sullo stato elettronico, le funzioni d'onda elettroniche iniziale e finale sono, per le transizioni considerate, uguali. L'integrazione rispetto alle coordinate degli elettroni dà, quindi, nell'elemento di matrice semplicemente il momento medio di dipolo $\overline{d}$ della molecola (diretto, evidentemente,

[1]) Il problema di trovare (nell'approssimazione quasi-classica) la distribuzione di probabilità delle diverse transizioni in vicinanza del suo valore massimo, è identico al problema 3 nel vol. III, § 90, differenziandosi solo per il cambiamento di alcune notazioni.

[2]) Le transizioni con variazione dello stato oscillazionale (e con esso anche dello stato rotazionale) formano, come si dice, lo *spettro oscillazionale* della molecola; esso cade nel vicino infrarosso (lunghezze d'onda $<20\ \mu$). Le transizioni con variazione del solo stato rotazionale formano lo spettro rotazionale, che cade nel lontano infrarosso (lunghezza d'onda $>20\ \mu$).

come il suo asse) in funzione della distanza r. Per a piccolezza delle oscillazioni $\bar{d}(r)$ si può sviluppare in potenze della coordinata oscillazionale $q = r - r_0$. Per transizioni connesse a variazione dello stato oscillazionale, il termine d'ordine zero dello sviluppo viene a cadere nell'elemento di matrice a causa dell'ortogonalità delle funzioni d'onda del moto oscillazionale in uno stesso campo $U(q)$, e rimane quindi il termine proporzionale a q. Se consideriamo armoniche le oscillazioni in questione, allora, secondo le note proprietà dell'oscillatore lineare (III, § 23), gli elementi di matrice saranno differenti da zero solo per transizioni tra stati oscillazionali contigui; in altre parole, per il numero quantico oscillazionale v è valida la regola di selezione

$$v' - v = \pm 1. \tag{54,1}$$

Questa regola, tuttavia, viene violata se si tiene conto della anarmonicità delle oscillazioni, e anche se si tiene conto dei successivi termini dello sviluppo della funzione $\bar{d}(q)$.

Per una transizione rotazionale pura (senza variazione anche dello stato oscillazionale) l'elemento di matrice della proiezione del momento di dipolo su l'asse mobile ζ può essere posto semplicemente uguale al momento di dipolo medio della molecola $\bar{d} = \bar{d}(0)$[1]. Di conseguenza, per la probabilità della transizione $J \to J - 1$ si ottiene la formula

$$w(nJ \to n, J-1) = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\bar{d}^2\frac{J^2-\Omega^2}{J(2J+1)}, \tag{54,2}$$

che permette di calcolare non solo i valori relativi (come la (53,12)), ma anche quelli assoluti delle probabilità. (La formula (54,2) è scritta per il caso a; nel caso b occorre scrivere K, Λ al posto di J, Ω).

Le frequenze delle transizioni rotazionali pure sono determinate dalle differenze delle energie rotazionali $BJ(J+1)$ e sono uguali a

$$\hbar\omega_{J,\,J-1} = 2BJ. \tag{54,3}$$

Le righe successive si trovano ad uguali distanze tra di loro ($2B$).

§ 55. *Radiazione di nuclei*

Per la radiazione γ da parte di nuclei, di regola, è soddisfatta la condizione per cui le dimensioni del sistema (cioè il raggio del nucleo R) siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda del fotone. Tuttavia, le distanze tra i livelli nucleari (e quindi anche l'energia dei quanti γ) sono di solito piccole rispetto all'energia associata

[1]) In una molecola di atomi identici $\bar{d} = 0$, come è evidente da considerazioni di simmetria.

a ciascun nucleone nel nucleo. Perciò la quantità R/λ non è direttamente connessa con la velocità v/c dei nucleoni nel nucleo, e, generalmente, è sensibilmente piú piccola di quest'ultima. In relazione a ciò, la probabilità di radiazione Ml, di regola, è maggiore della probabilità di radiazione E, $l+1$ (cfr. inizio § 50).

Le regole di selezione generali relative al momento angolare totale (« spin ») del nucleo e alla parità sono le stesse che per la radiazione di un qualsiasi sistema. La peculiarità della radiazione nucleare è costituita dal fatto che le transizioni di multipolo piú elevato sono molto frequenti. Contrariamente agli atomi, nei quali la radiazione è di solito radiazione di dipolo elettrico, nei nuclei, a piccole energie, queste transizioni sono relativamente rare, poiché risultano proibite da regole di selezione.

Se consideriamo una transizione radiativa del nucleo come transizione di una sola particella, cioè come la variazione dello stato di un nucleone, mentre rimane invariato lo stato del « resto » del nucleo, vengono ad aggiungersi regole di selezione relative al momento angolare di questo nucleone. Tuttavia, il grado di precisione con cui sono osservate queste regole relative alle transizioni « di una sola particella » risulta, di fatto, molto basso.

Specifiche per il nucleo sono le regole di selezione relative allo spin isotopico. Ricordiamo che la proiezione T_3 dello spin isotopico è determinata dal peso atomico e dal numero atomico

$$T_3 = \frac{1}{2}(Z-N) = Z - \frac{A}{2}.$$

Per un dato valore di T_3 il modulo dello spin isotopico può avere qualsiasi valore $T \geqslant |T_3|$. La regola di selezione relativa al numero T per le transizioni radiative compare in relazione al fatto che gli operatori dei momenti elettrici e magnetici del nucleo, espressi mediante gli operatori degli spin isotopici dei nuclei, sono la somma di uno scalare e della componente x_3 di un vettore nello spazio isotopico (vedi III, § 116). Perciò i relativi elementi di matrice sono differenti da zero solo alla condizione

$$T' - T = 0, \pm 1. \tag{55,1}$$

Di per se stessa questa regola, tuttavia, non impone particolari restrizioni sulle transizioni nei nuclei leggeri (per i quali soltanto si può parlare con sufficiente precisione di conservazione dello spin isotopico); infatti, tra i livelli piú bassi di questi nuclei di fatto non ci sono livelli con $T > 1$.

Per le transizioni $E1$ si ha ancora una regola addizionale in relazione al fatto che per il momento di dipolo elettrico la parte isotopicamente scalare viene a mancare, e il suo operatore si riduce alla componente x_3 del vettore isotopico (vedi III, § 116). Perciò se $T_3 = 0$, sono vietate anche le transizioni con $\Delta T = 0$. In altre

parole, nei nuclei con un ugual numero di protoni e di neutroni ($N = Z$, $A = 2Z$) le transizioni $E1$ sono possibili solo se

$$T' - T = \pm 1 \quad (T_3 = 0). \tag{55,2}$$

È ovvio che la precisione, con cui questa regola è osservata, dipende dalla precisione con cui si conserva lo spin isotopico del nucleo.

Sul valore della probabilità delle transizioni $E1$ nel nucleo influisce anche l'effetto di rinculo del resto del nucleo nel moto dei singoli nucleoni. Questo effetto ha come conseguenza che al momento di dipolo i protoni concorrono con la carica efficace $e\,(1 - Z/A)$ invece di e, e i neutroni con la carica $-eZ/A$ invece di 0 (vedi III, § 118). La diminuzione della carica efficace del protone porta ad una certa diminuzione della probabilità delle transizioni $E1$.

I livelli energetici dei nuclei non sferici hanno una struttura rotazionale. In relazione a ciò, compare una struttura rotazionale nello spettro dei raggi γ, specifica per tali nuclei.

La simmetria del campo nel quale si muovono i nucleoni nel nucleo « fisso » non sferico (assiale), coincide con la simmetria del campo nel quale si muovono gli elettroni in una molecola biatomica « fissa » costituita di atomi identici (gruppo puntiforme $C_{\infty h}$). Quindi le proprietà di simmetria dei livelli di un nucleo non sferico (e insieme ad esse anche le regole di selezione per gli elementi di matrice) sono analoghe alla simmetria dei livelli di una molecola biatomica (vedi III, § 119). In particolare, come per le molecole biatomiche di atomi identici, sono vietate le transizioni di dipolo elettrico all'interno di una stessa banda rotazionale (cioè senza variazione dello stato interno del nucleo, cfr. § 54). Queste transizioni avvengono quindi come transizioni $E2$ e $M1$. Nel primo caso il momento totale del nucleo J può variare di 2 oppure di 1, mentre nel secondo soltanto di 1.

Secondo la (46,9) la probabilità di transizione di quadrupolo, sommata sui valori della proiezione M' del momento angolare totale del nucleo nello stato finale, è data dall'espressione

$$w_{E2} = \frac{\omega^5}{15\hbar c^5} \sum_{M'} |\langle J'\Omega M' \,|\, Q^{(e)}_{2,-m} \,|\, J\Omega M\rangle|^2$$

(J è il momento angolare totale del nucleo; Ω la sua proiezione sull'asse del nucleo; $m = M - M'$). Mediante la III (110,8) questa somma può venire espressa attraverso i quadrati di quantità date: i momenti di quadrupolo diagonali (rispetto allo stato interno del nucleo) della transizione $\overline{Q}_{2\lambda}$, determinati rispetto agli assi coordinati $\xi\eta\zeta$ solidali col nucleo. Si avrà inoltre $\lambda = \Omega - \Omega'$, e quindi nel caso in esame ($\Omega' = \Omega$) figura solo la componente $\overline{Q}_{20}$. Per definizione, momento di quadrupolo è chiamata semplicemente la

quantità

$$eQ_0 = e \int \rho_{ii} (2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = -2e\, (\bar{Q}_{20})_{ii}.$$

Otteniamo perciò

$$w_{E2}(\Omega J \to \Omega J') = \frac{\omega^5}{60\hbar c^5} Q_0^2 (2J'+1) \begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ -\Omega & 0 & \Omega \end{pmatrix}^2, \qquad (55,3)$$

oppure sviluppando

$$w_{E2}(\Omega J \to \Omega, J-1) = \frac{\omega^5}{20\hbar c^5} Q_0^2 \frac{\Omega^2 (J^2 - \Omega^2)}{(J-1)\, J\, (J+1)\, (2J+1)},$$

$$w_{E2}(\Omega J \to \Omega, J-2) = \frac{\omega^5}{40\hbar c^5} Q_0^2 \frac{(J^2 - \Omega^2)\, [(J-1)^2 - \Omega^2]}{(J-1)\, J\, (2J-1)\, (2J+1)}.$$

A proposito di queste formule occorre, tuttavia, fare la seguente osservazione. In esse sono stati usati elementi di matrice, calcolati con funzioni d'onda della forma

$$\psi_{J\Omega M} = \text{costante} \cdot \chi_\Omega D^{(J)}_{\Omega M}(\boldsymbol{n})$$

(χ_Ω è la funzione d'onda dello stato intrinseco del nucleo). Queste funzioni sono relative a determinati valori (per modulo e per segno) della proiezione del momento angolare sull'asse ζ. Nei nuclei noi abbiamo a che fare con stati, che hanno una determinata parità e un determinato modulo della proiezione del momento (è quest'ultima grandezza che di solito viene indicata con Ω). Perciò per $\Omega \neq 0$ come funzioni d'onda iniziale e finale sarebbe necessario prendere combinazioni della forma

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{J\Omega M} \pm \psi_{J,\, -\Omega,\, M}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{J'\Omega M'} \pm \psi_{J',\, -\Omega,\, M'}).$$

I prodotti dei primi e dei secondi termini danno i valori noti dell'elemento di matrice del momento di quadrupolo. I prodotti « incrociati » invece portano ad integrali non nulli se $2\Omega \leqslant 2$[1]). Di conseguenza, la formula (55,3), rigorosamente parlando, non è applicabile per $\Omega = 1/2$, 1; in questi casi nella probabilità di

---

[1]) Per gli elementi di matrice di multipolo di ordine 2^l, nelle espressioni integrande compaiono prodotti del tipo

$$D^{(J')*}_{-\Omega M'} D^{(l)}_{q'q} D^{(J)}_{\Omega M}.$$

L'integrale rispetto agli angoli è diverso da zero per $q' = -2\Omega$, dove q' assume solo i valori compresi da $-l$ a $+l$; quindi deve essere $2\Omega \leqslant l$.

transizione compare un termine addizionale, che non è esprimibile attraverso il valore medio del momento di quadrupolo[1]).

Analogamente alla formula (55,3) per la probabilità di transizione $M1$, si ottiene la formula

$$w_{M1}(\Omega J \to \Omega, J-1) = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\mu^2(2J-1)\begin{pmatrix} J-1 & 1 & J \\ -\Omega & 0 & \Omega \end{pmatrix}^2 = \\ = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\mu^2\frac{J^2-\Omega^2}{J(2J+1)}, \qquad (55,4)$$

dove μ è il momento magnetico del nucleo (questa formula non è applicabile per $\Omega = 1/2$).

§ 56. *Effetto fotoelettrico. Caso non relativistico*

Nei §§ 49-52 abbiamo studiato le transizioni radiative (emissione e assorbimento) tra livelli atomici dello spettro discreto. L'effetto fotoelettrico si differenzia da tale processo di assorbimento di un fotone solo per il fatto che lo stato finale appartiene allo spettro continuo.

La sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico può essere calcolata completamente in forma analitica per l'atomo di idrogeno o per uno ione idrogenoide (con carica del nucleo $Z \leqslant 137$).

Nello stato iniziale abbiamo un elettrone sul livello discreto $\varepsilon_i \equiv -I$ (I è il potenziale di ionizzazione dell'atomo) e un fotone di dato impulso $\boldsymbol{k}$. Nello stato finale l'elettrone possiede impulso $\boldsymbol{p}$ (ed energia $\varepsilon_f \equiv \varepsilon$). Poiché $\boldsymbol{p}$ assume un insieme continuo di valori, la sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico è data dalla formula

$$d\sigma = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(-I+\omega-\varepsilon)\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \qquad (56,1)$$

(cfr. con la (44,3)), dove la funzione d'onda dello stato finale dell'elettrone si suppone normalizzata con « una particella nel volume $V = 1$ ». Allo stesso modo è normalizzata la funzione d'onda del fotone; per passare alla sezione d'urto $d\sigma$, abbiamo dovuto dividere la probabilità dw per la densità del fascio di fotoni (uguale a $c/V = c$), ma in unità relativistiche questo fatto non si riflette sulla forma della formula (56,1).

Scegliamo (come anche per la (45,2)) il gauge trasversale tridimensionale del fotone. Abbiamo allora

$$V_{fi} = -e\boldsymbol{A}\boldsymbol{j}_{fi} = -e\sqrt{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}M_{fi},$$

---

[1]) Di fatto, questo termine apporta una correzione essenziale soltanto nel caso $\Omega = 1/2$, quando il legame tra la rotazione e lo stato intrinseco del nucleo è particolarmente forte (vedi su questo problema III, § 119).

dove è stata introdotta la notazione

$$M_{fi} = \int \psi'^* (\alpha e) e^{ikr} \psi d^3x \tag{56,2}$$

($\psi \equiv \psi_i$ e $\psi' \equiv \psi_f$ sono le funzioni d'onda iniziale e finale dell'elettrone). Operando nella (56,1) la sostituzione $d^3p \to \to p^2 d\,|\,p\,|do = \varepsilon\,|\,p\,|\,d\varepsilon do$ e integrando la funzione δ in $d\varepsilon$, riscriviamo questa formula come segue:

$$d\sigma = e^2 \frac{\varepsilon\,|\,p\,|}{2\pi\omega} |\,M_{fi}\,|^2 do. \tag{56,3}$$

Noi eseguiremo i calcoli per due casi, che si differenziano per il valore dell'energia del fotone: $\omega \gg I$ e $\omega \ll m$. Poiché $I \sim me^4Z^2 \ll m$, i due campi indicati in parte si sovrappongono (per $I \ll \omega \ll m$), e quindi l'analisi di questi casi dà, in sostanza, una descrizione completa dell'effetto fotoelettrico.

Iniziamo dal caso

$$\omega \ll m. \tag{56,4}$$

Qui la velocità dell'elettrone è piccola sia nello stato iniziale che in quello finale, e quindi, relativamente all'elettrone, il problema è completamente non relativistico. In relazione a ciò, sostituiamo nella (56,2) α con l'operatore non relativistico della velocità $\mathbf{v} = -i\nabla/m$ (cfr. § 45). Inoltre, si può passare all'approssimazione di dipolo facendo la sostituzione $e^{ikr} \approx 1$, si può, cioè, trascurare l'impulso del fotone rispetto all'impulso dell'elettrone. Allora si può scrivere

$$d\sigma = e^2 \frac{m\,|\,p\,|}{2\pi\omega} |\,e\boldsymbol{v}_{fi}\,|^2 do, \qquad \boldsymbol{v}_{fi} = -\frac{i}{m} \int \psi^{f*} \nabla\psi \cdot d^3x \tag{56,5}$$

Considereremo l'effetto fotoelettrico per il livello fondamentale dell'atomo di idrogeno (o di uno ione idrogenoide). Allora abbiamo

$$\psi = \frac{(Ze^2m)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Ze^2mr} \tag{56,6}$$

(in unità ordinarie $me^2 \to 1/a_0$, dove $a_0 = \hbar^2/me^2$ è il raggio di Bohr).

Come ψ', occorre prendere una funzione d'onda, la cui forma asintotica contenga un'onda piana (e^{ipr}) e insieme un'onda sferica convergente (vedi III, § 136, dove questa funzione è indicata come ψ_p^-). In virtú della regola di selezione relativa a l la transizione dallo stato s è possibile solo nello stato p (caso di dipolo!). Quindi nello sviluppo[1])

$$\psi_p^- = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) e^{-i\delta_l} R_{pl}(r) P_l(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1) \tag{56,7}$$

[1]) Da qui fino alla fine di questo paragrafo p significa $|\,p\,|$.

($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/p$, $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{r}/r$) è sufficiente lasciare solo il termine con $l = 1$[1]). Omettendo i fattori di fase, qui inessenziali, abbiamo quindi

$$\psi' = \frac{3}{p}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1)\,R_{p1}(r). \tag{56,8}$$

Con le funzioni ψ e ψ', definite nelle (56,6) e (56,8), abbiamo

$$e\boldsymbol{v}_{fi} = \frac{3\,(Ze^2m)^{5/2}}{\sqrt{2}\,mp}\int\int(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{e})\,e^{-Ze^2mr}R_{p1}(r)\,do_1\cdot r^2\,dr =$$

$$= \frac{2^{3/2}\pi\,(Ze^2m)^{5/2}}{pm}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e})\int\limits_0^\infty r^2e^{-Ze^2mr}R_{p1}(r)\,dr.$$

Secondo la III (36,18) e la III (36,24) la funzione radiale (nelle notazioni qui usate) ha la forma

$$R_{p1} = \frac{2Ze^2m}{3}\sqrt{\frac{1+\nu^2}{\nu(1-e^{-2\pi\nu})}}\;pre^{-ipr}F(2+i\nu,\ 4,\ 2ipr),$$

dove è stata introdotta la notazione

$$\nu = \frac{Ze^2m}{p}\left(=\frac{Ze^2}{\hbar v}\right). \tag{56,9}$$

L'integrale, che ci occorre, si calcola mediante la formula

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}z^{\gamma-1}F(\alpha,\ \gamma,\ kz)\,dz = \Gamma(\gamma)\,\lambda^{\alpha-\gamma}(\lambda-k)^{-\alpha}$$

(vedi III (f, 3)). Notando anche che

$$\left(\frac{\nu+i}{\nu-i}\right)^{i\nu} = e^{-2\nu\,\mathrm{arccotg}\,\nu},$$

otteniamo

$$e\boldsymbol{v}_{fi} = \frac{2^{7/2}\pi\nu^3(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e})}{\sqrt{p}\,m\,(1+\nu^2)^{3/2}}\,\frac{e^{-2\nu\,\mathrm{arccotg}\,\nu}}{\sqrt{1-e^{-2\pi\nu}}}.$$

L'energia di ionizzazione dal livello fondamentale dell'atomo di idrogeno (o di uno ione idrogenoide) è $I = Z^2e^4m/2$. Quindi abbiamo

$$\omega = \frac{p^2}{2m} + I = \frac{p^2}{2m}(1+\nu^2). \tag{56,10}$$

Tenendo conto di questa relazione, scriviamo l'espressione definitiva della sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico con emissione dell'elettrone nell'elemento di angolo solido do:

$$d\sigma = 2^7\pi\alpha a^2\left(\frac{I}{\hbar\omega}\right)^4\frac{e^{-4\nu\,\mathrm{arccotg}\,\nu}}{1-e^{-2\pi\nu}}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e})^2\,do, \tag{56,11}$$

---

[1]) Il coefficiente generale di questo sviluppo si differenzia dal coefficiente nel III (136,5), data la normalizzazione differente della funzione R_{pl}.

dove $a = \hbar^2/mZe^2 = a_0/Z$ (da qui in avanti si usano unità ordinarie). Notiamo che la distribuzione angolare dei fotoelettroni è determinata dal fattore $(\boldsymbol{ne})^2$. Esso raggiunge il suo valore massimo nelle direzioni parallele alla direzione di polarizzazione dei fotoni incidenti e si annulla nelle direzioni perpendicolari a $\boldsymbol{e}$, compresa anche la direzione di incidenza dei fotoni. Per fotoni non polarizzati la formula (56,11) deve essere mediata sulle direzioni di $\boldsymbol{e}$, operazione che si riduce alla sostituzione

$$(\boldsymbol{ne})^2 \to \frac{1}{2}[\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}]^2,$$

dove $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{k}/k$ (vedi la (45,4b)).

L'integrazione della formula (56,11) rispetto agli angoli dà la sezione d'urto totale dell'effetto fotoelettrico

$$\sigma = \frac{2^9\pi^2}{3}\alpha a^2\left(\frac{I}{\hbar\omega}\right)^4 \frac{e^{-4\nu \operatorname{arccotg}\nu}}{1-e^{-2\pi\nu}} \tag{56,12}$$

(*M. Stobbe*, 1930).

Per il valore di σ al limite $\hbar\omega \to I$ (cioè per $\nu \to \infty$) otteniamo

$$\sigma = \frac{2^9\pi^2}{3e^4}\alpha a^2 = \frac{2^9\pi^2}{3e^4}\frac{\alpha a_0^2}{Z^2} \tag{56,13}$$

(al denominatore $e = 2{,}71\ldots$!). Come deve essere per una reazione accompagnata dalla generazione di particelle cariche (vedi III, § 147), la sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico vicino alla propria soglia tende ad un limite costante.

Il caso $\hbar\omega \gg I$ (in cui, come prima, si ha $\hbar\omega \ll mc^2$) corrisponde all'approssimazione di Born ($\nu = Ze^2/\hbar v \ll 1$). La formula (56,12) assume la forma

$$\sigma = \frac{2^8\pi}{3}\alpha a_0^2 Z^5\left(\frac{I_0}{\hbar\omega}\right)^{7/2} \tag{56,14}$$

($I_0 = e^4m/2\hbar^2$ è l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno).

Il processo contrario dell'effetto fotoelettrico è la ricombinazione radiativa dell'elettrone con lo ione fisso. La sezione d'urto di questo processo (σ_{ric}) si può ricavare dalla sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico (σ_f) mediante il principio del bilancio dettagliato (III, § 144). Secondo questo principio, le sezioni d'urto dei processi $i \to f$ e $f \to i$ (con due particelle in ciascuno degli stati i ed f) sono legate dalla relazione

$$g_i p_i^2 \sigma_{i\to f} = g_f p_f^2 \sigma_{f\to i},$$

dove p_i, p_f sono gli impulsi del moto relativo delle particelle, e g_i e g_f sono i pesi statistici di spin degli stati i e f. Considerando anche che, per il fotone, $g = 2$ (due direzioni di polarizzazione), otteniamo

$$\sigma_{\text{ric}} = \sigma_{\text{fot}}\frac{2k^2}{p^2} \tag{56,15}$$

($\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ è l'impulso dell'elettrone incidente, $\boldsymbol{k}$ l'impulso del fotone emesso).

PROBLEMA

Determinare la sezione d'urto totale di ricombinazione radiativa di un elettrone veloce non relativistico ($I \ll mv^2 \ll mc^2$) con un nucleo (carica $Z \ll 137$).

Soluzione. La sezione d'urto di cattura nello strato K (numero quantico principale $n = 1$) si ottiene sostituendo la (56,14) nella (56,15):

$$\sigma_1^{\text{ric}} = \frac{2^7\pi}{3} Z^5\alpha^3 a_0^2 \left(\frac{I_0}{\varepsilon}\right)^{5/2}$$

($\varepsilon = mv^2/2$ è l'energia dell'elettrone incidente; $\hbar\omega \approx \varepsilon$). Fra gli altri stati dell'atomo che si forma, sono importanti solo gli stati s; nel calcolo dell'elemento di matrice nell'approssimazione di Born sono essenziali i valori della funzione d'onda dello stato legato per piccoli r (come sarà chiaro dai calcoli fatti nel § 57), e per $l > 0$ questi valori sono piccoli rispetto ai valori della funzione a $l = 0$; in questo caso è sufficiente trattenere solo i primi due termini dello sviluppo di ψ in potenze di r. Per gli stati con $l = 0$ e n qualsiasi, questi termini sono

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a^{3/2} n^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{a}\right),$$

cioè contengono n solo sotto forma del fattore $n^{-3/2}$ (l'espressione scritta si ricava sviluppando la funzione III (36,13)). Quindi la sezione d'urto totale di ricombinazione è

$$\sigma^{\text{ric}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{\text{ric}} = \sigma_1^{\text{ric}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)\, \sigma_1^{\text{ric}}$$

(per il valore della funzione ζ abbiamo $\zeta(3) = 1{,}202$).

§ 57. *Effetto fotoelettrico. Caso relativistico*

Occupiamoci ora del caso

$$\omega \gg I. \tag{57,1}$$

In questo caso si ha anche $\varepsilon = \omega - I \gg I$,e quindi si può tener conto dell'influenza del campo coulombiano del nucleo sulla funzione d'onda del fotoelettrone (ψ') mediante la teoria delle perturbazioni. Scriviamo ψ' nella forma

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (u' e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}} + \psi^{(1)}). \tag{57,2}$$

Il fotoelettrone può essere relativistico; quindi la funzione imperturbata nella (57,2) è scritta sotto forma di onda relativistica piana (23,1).

Sebbene nello stato iniziale l'elettrone sia non relativistico, è però necessario che nella sua funzione d'onda si tenga conto (per ragioni che saranno chiarite in seguito) della correzione relativistica

($\sim Ze^2$). Tale funzione è data dalla formula (vedi problema al § 39)

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\nabla\right)\frac{u}{\sqrt{2m}}\psi_{\text{non rel}}, \tag{57,3}$$

dove $\psi_{\text{non rel}}$ è la funzione non relativistica dello stato legato (56,6) e u è l'ampiezza bispinoriale dell'elettrone a riposo, normalizzata con la condizione $\bar{u}u = 2m$.

Sostituiamo le funzioni (57,2-3) nell'elemento di matrice (56,2)[1])

$$M_{fi} = \frac{1}{2\sqrt{m\varepsilon}}\int\left\{\bar{u}'(\gamma e)\left[\left(1 - \frac{i}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\nabla\right)u\psi_{\text{non rel}}\right]\times\right.$$
$$\left.\times e^{-i(p-k)r} + \bar{\psi}^{(1)}(\gamma e)\,e^{ikr}u\psi_{\text{non rel}}\right\}d^3x. \tag{57,4}$$

Volendo ottenere il primo membro dello sviluppo di questa quantità in Ze^2, nel secondo termine tra parentesi graffa possiamo semplicemente sostituire $\psi_{\text{non rel}}$ con la costante $(Ze^2m)^{3/2}/\sqrt{\pi}$. Con questa sostituzione, dal canto suo, il primo membro si sarebbe annullato (per $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k} \neq 0$) (proprio per questa ragione in ψ occorre tenere conto anche della prima correzione relativistica, proporzionale a Ze^2. Per $v \sim 1$ questa correzione dà nella sezione d'urto un contributo dello stesso ordine di grandezza di quello dato dal termine successivo dello sviluppo di $\psi_{\text{non rel}}$ in Ze^2).

Eseguiamo nel primo termine della (57,4) l'integrazione per parti, trasferendo l'azione dell'operatore ∇ dalla funzione $\psi_{\text{non rel}}$ sul fattore esponenziale. Come risultato otteniamo

$$M_{fi} = \frac{(Ze^2m)^{3/2}}{2(\pi m\varepsilon)^{1/2}}\left\{\bar{u}'(\gamma e)\left[1 + \frac{1}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})\right]\times\right.$$
$$\left.\times u\,(e^{-Ze^2mr})_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}} + \bar{\psi}^{(1)}_{\boldsymbol{k}}(\gamma e)\,u\right\}, \tag{57,5}$$

dove l'indice vettoriale indica la trasformata spaziale di Fourier. Limitandoci al termine $\sim Ze^2$;[2]) abbiamo

$$(e^{-Ze^2mr})_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}} = \frac{8\pi Ze^2m}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})^4}. \tag{57,6}$$

---

[1]) La funzione d'onda (57,3) venne trovata per distanze $r \sim 1/mZe^2$, per le quali il termine di correzione è dell'ordine di grandezza relativo Ze^2. Ma per lo stato fondamentale (e anche per tutti gli stati s in generale) la formula (57,3) è valida per qualsiasi r, poiché la derivata della funzione esponenziale pura (56,6) (e con essa anche il termine di correzione nella (57,3)) è sempre proporzionale a Ze^2. Questa circostanza permette di usare la formula (57,3) nel problema considerato, nel quale (come vedremo piú avanti) sono essenziali i piccoli r.

[2]) Prendendo la trasformata di Fourier di ambedue i termini dell'uguaglianza

$$(\Delta - \lambda^2)\frac{e^{-\lambda r}}{r} = -4\pi\delta(r),$$

Per trovare la trasformata di Fourier $\psi_k^{(1)}$ scriviamo l'equazione, cui soddisfa la funzione $\psi^{(1)}$,

$$(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - m)\,\psi^{(1)} = e\,(\gamma^\mu A_\mu)\,u' e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}} = -\frac{Ze^2}{r}\,\gamma^0 u' e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}$$

(ad essa si perviene sostituendo la (57,2) nella (32,1)). Applicando ad ambedue i membri di questa equazione l'operatore $(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla + m)$, otteniamo

$$(\Delta + \boldsymbol{p}^2)\,\psi^{(1)} = -Ze^2\,(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla + m)\,(\gamma^0 u')\,\frac{1}{r}\,e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}.$$

Moltiplichiamo questa equazione per $e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$ e integriamo in d^3x; nei termini con Δ e ∇ integriamo, come al solito, per parti. In tal modo, otteniamo

$$(\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{k}^2)\,\psi_k^{(1)} = -Ze^2\,(\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{k} - m)\,(\gamma^0 u')\left(\frac{1}{r}\right)_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}} =$$

$$= -Ze^2\,(2\varepsilon\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\,(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}))\,(\gamma^0 u')\,\frac{4\pi}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2}.$$

Nell'ultima riga si è tenuto conto del fatto che l'ampiezza u' soddisfa l'equazione

$$(\varepsilon\gamma^0 - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma} - m)\,u' = 0 \quad \text{o} \quad (\varepsilon\gamma^0 + \boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma} - m)\,\gamma^0 u' = 0.$$

Da qui troviamo

$$\overline{\psi}_k^{(1)} = \psi_k^{(1)*}\gamma^0 = 4\pi Ze^2\overline{u}'\,\frac{2\varepsilon\gamma^0 + \boldsymbol{\gamma}\,(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{p}^2)\,(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})^2}\,\gamma^0. \tag{57,7}$$

Sostituendo le (57,6-7) nell'elemento di matrice (57,5), lo possiamo scrivere nella forma

$$M_{fi} = \frac{4\pi^{1/2}\,(Ze^2 m)^{5/2}}{(\varepsilon m)^{1/2}\,(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})^2}\,\overline{u}' A u,$$

dove

$$A = a\,(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{e})\,\gamma^0\,(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{c})\,\gamma^0\,(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{e}),$$

$$a = \frac{1}{(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})^2} + \frac{\varepsilon}{m}\,\frac{1}{\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{p}^2}, \quad \boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}}{2m\,(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})^2}, \quad \boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}}{2m\,(\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{p}^2)}.$$

---

otteniamo

$$\left(\frac{e^{-\lambda r}}{r}\right)_q = \frac{4\pi}{q^2 + \lambda^2}. \tag{57,6a}$$

Derivando questa espressione rispetto al parametro λ, troviamo

$$(e^{-\lambda r})_q = \frac{8\pi\lambda}{(q^2 + \lambda^2)^2}. \tag{57,6b}$$

La sezione d'urto è

$$d\sigma = \frac{8e^2 (Ze^2 m)^5 |\boldsymbol{p}|}{\omega (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})^4 m} (\bar{u}' A u)(\bar{u} \bar{A} u')\, do,$$

dove $\bar{A} = \gamma^0 A^+ \gamma^0$ (vedi § 66). Questa espressione deve essere ancora sommata sulle direzioni finali dello spin dell'elettrone e mediata su quelle iniziali. Queste operazioni si eseguono secondo le regole, descritte piú avanti al § 66, mediante le matrici densità di polarizzazione degli stati iniziale e finale

$$\rho = \frac{m}{2} (\gamma^0 + 1), \qquad \rho' = \frac{1}{2} (\gamma^0 \varepsilon - \boldsymbol{\gamma p} + m)$$

(nello stato iniziale $\boldsymbol{p} = 0$, $\varepsilon = m$). Esse portano all'espressione

$$d\sigma = \frac{16e^2 (Ze^2 m)^5 |\boldsymbol{p}|}{m\omega (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})^4} \operatorname{Tr} (\rho' A \rho \bar{A})\, do.$$

Il calcolo della traccia è un'operazione puramente algebrica e porta al seguente risultato[1]):

$$\operatorname{Tr} (\rho' A \rho \bar{A}) = \frac{m}{\varepsilon + m} [a\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\varepsilon + m)]^2 + \\ + 4m (\boldsymbol{be}) [(\varepsilon + m)(\boldsymbol{ce}) + a (\boldsymbol{pe})]$$

(il vettore $\boldsymbol{e}$ è supposto reale, cioè la polarizzazione del fotone è lineare).

La formula della sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico assume la sua forma definitiva introducendo l'angolo polare θ e l'azimut φ della direzione di $\boldsymbol{p}$ rispetto alla direzione di $\boldsymbol{k}$, assunta come asse z, e al piano $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}$ preso come piano xz (in modo che $\boldsymbol{pe} = |\boldsymbol{p}| \cos \varphi \times \times \operatorname{sen} \theta$). Per $\omega \gg I$ la conservazione dell'energia può essere scritta nella forma $\varepsilon - m = \omega$ (invece che nella forma $\varepsilon - m = \omega - I$). È facile verificare che allora valgono le relazioni

$$\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{p}^2 = -2m (\varepsilon - m), \quad (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})^2 = 2\varepsilon (\varepsilon - m)(1 - v \cos \theta),$$

dove $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/\varepsilon$ è la velocità del fotoelettrone. Dopo semplici trasformazioni otteniamo la seguente espressione definitiva:

$$d\sigma = Z^5 \alpha^4 r_e^2 \frac{v^3 (1 - v^2)^3 \operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - \sqrt{1 - v^2})^5 (1 - v \cos \theta)^4} \left\{ \frac{(1 - \sqrt{1 - v^2})^2}{2 (1 - v^2)^{3/2}} (1 - v \cos \theta) + \right. \\ \left. + \left[2 - \frac{(1 - \sqrt{1 - v^2})(1 - v \cos \theta)}{1 - v^2} \right] \cos^2 \varphi \right\} do, \qquad (57,8)$$

dove $r_e = e^2/m$.

---

[1]) Le formule tridimensionali per il calcolo delle tracce sono analoghe alle formule quadridimensionali, riportate al § 22. Sono diverse da zero solo le tracce di prodotti con un numero pari di fattori γ^0 e $\boldsymbol{\gamma}$; tutti i fattori γ^0 si riducono all'unità, e per le tracce di prodotti con due e con quattro fattori $\boldsymbol{\gamma}$ si trova

$$\frac{1}{4} \operatorname{Tr} (a\boldsymbol{\gamma})(b\boldsymbol{\gamma}) = -\boldsymbol{ab},$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{Tr} (a\boldsymbol{\gamma})(b\boldsymbol{\gamma})(c\boldsymbol{\gamma})(d\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{cd}) - (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) + (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc}).$$

Nel caso ultrarelativistico ($\varepsilon \gg m$) la sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico ha un massimo molto marcato per piccoli angoli ($\theta \sim \sqrt{1-v^2}$), cioè gli elettroni vengono emessi essenzialmente nella direzione d'incidenza del fotone. In vicinanza del massimo possiamo scrivere

$$1 - v\cos\theta \approx \frac{1}{2}[(1-v^2)+\theta^2],$$

e i termini principali nella (57,8) danno

$$d\sigma \approx 4Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{(1-v^2)^{3/2}\theta^3}{(1-v^2+\theta^2)^3}\, d\theta\, d\varphi. \tag{57,9}$$

L'integrazione, elementare anche se abbastanza lunga, dell'espressione (57,8) rispetto agli angoli porta alla seguente formula per la sezione d'urto totale (*F. Sauter*, 1931):

$$\sigma = 2\pi Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{(\gamma^2-1)^{3/2}}{(\gamma-1)^5}\left\{\frac{4}{3}+\frac{\gamma(\gamma-2)}{\gamma+1}\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-\frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}\ln\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}}\right)\right\}, \tag{57,10}$$

dove, per brevità, è stato introdotto il « fattore di Lorentz »

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\varepsilon}{m} \approx \frac{m+\omega}{m}. \tag{57,11}$$

Nel caso ultrarelativistico questa formula si riduce alla semplice espressione

$$\sigma = 2\pi Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{1}{\gamma}. \tag{57,12}$$

Nel caso, invece, di $I \ll \omega \ll m$ il passaggio nella (57,10) al limite per piccoli valori di $\gamma - 1$ porta al risultato (56,14), che noi già conosciamo.

§ 58. *Fotodisintegrazione del deutone*

La peculiarità del deutone consiste nel fatto che la sua energia di legame è piccola (rispetto alla profondità della buca di potenziale). Questa circostanza permette di descrivere le reazioni, che avvengono con la partecipazione del deutone, senza conoscere dettagliatamente l'andamento delle forze nucleari, ma solo mediante l'energia di legame (vedi III, § 133). Si suppone inoltre che le lunghezze d'onda delle particelle in collisione siano grandi rispetto al raggio d'azione delle forze nucleari a.

Quanto appena detto vale anche per la disintegrazione del deutone sotto l'azione di quei quanti γ, per i quali $ka \ll 1$. Si suppone anche

che $pa \ll 1$, dove $\boldsymbol{p}$ è l'impulso del moto relativo del neutrone e del protone liberi (questa condizione è piú forte della precedente)[1].

Partiamo dalla formula non relativistica per la sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico (56,5), integrata rispetto alle direzioni

$$\sigma = \frac{e^2 p}{2\pi\omega} \frac{M}{2} \frac{4\pi}{3} |(\boldsymbol{v}_p)_{fi}|^2.$$

Qui $\boldsymbol{p}$ è l'impulso del moto relativo del protone e del neutrone[2], e la quantità m che compare nella (56,5) è stata sostituita dalla loro massa ridotta $M/2$ (dove M è la massa di un nucleone). L'elemento di matrice è calcolato per la velocità del protone $\boldsymbol{v}_p$, poiché solo il protone interagisce col fotone. Esprimendo $\boldsymbol{v}_p$ attraverso l'impulso $\boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}/2 = \boldsymbol{p}/M$), abbiamo

$$\sigma^{(e)} = \frac{e^2 p}{3M\omega} |\boldsymbol{p}_{fi}|^2. \tag{58,1}$$

L'indice (e) indica che questa formula si riferisce alle transizioni di dipolo elettrico: $e\boldsymbol{p}/M = e\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{d}$, e quindi $e\boldsymbol{p}_{fi}/M = i\omega\boldsymbol{d}_{fi}$.

La funzione normalizzata dello stato iniziale (fondamentale) del deutone è

$$\psi = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}} \frac{e^{-\varkappa r}}{r}, \quad \varkappa = \sqrt{MI}, \tag{58,2}$$

dove $I = 2{,}23$ MeV è l'energia di legame (vedi III, § 133)[3]. Come funzione d'onda dello stato finale si può prendere la funzione del moto libero, cioè l'onda piana

$$\psi^{\text{f}} = e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}. \tag{58,3}$$

La ragione di questa scelta consiste nel fatto che nella teoria considerata la « dimensione del deutone » $1/\varkappa$ è supposta grande rispetto al raggio efficace di interazione a. Quindi occorre tener conto dell'interazione tra protone e neutrone solo negli stati S, trascurandola

---

[1]) L'energia del fotone, alla quale $pa \approx 1$ ($a = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm) è uguale a 15 MeV.

[2]) In questo paragrafo p significa $|\boldsymbol{p}|$.

[3]) Questa funzione può essere resa piú precisa con l'introduzione della correzione, dovuta al fatto che a ha un valore finito. Di questo si tiene conto sostituendo il coefficiente di normalizzazione nella (58,2) con l'espressione

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi(1 - a\varkappa)}}$$

(vedi III, § 133, problema 1). Corrispondentemente comparirà il fattore $1/(1 - a\varkappa)$ anche nelle formule per la sezione d'urto. Occorre dire che di fatto questa correzione non è poi tanto piccola: per lo stato fondamentale del deutone $a\varkappa \approx 0{,}4$.

Lo stato fondamentale del deutone è lo stato $^3S_1$ con una piccola « aggiunta » dello stato $^3D_1$, dovuta all'azione di forze nucleari tensoriali (vedi III, § 117). Qui noi trascureremo questa « aggiunta » e quindi anche le forze tensoriali.

invece negli stati con $l \neq 0$, le cui funzioni d'onda, alle piccole distanze, sono piccole. Però, in base alle regole di selezione, le transizioni di dipolo elettrico tra due stati S (stato fondamentale e stato S dello spettro continuo) sono vietate. Ciò permette, nel caso considerato, di trascurare l'interazione dei nucleoni nello stato finale.

Integrando per parti, per l'elemento di matrice troviamo

$$p_{fi} = -i\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}} \int e^{-ipr} \nabla \frac{e^{-\varkappa r}}{r} d^3x =$$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\, p \left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)_p = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}} \frac{4\pi p}{p^2+\varkappa^2}$$

(vedi nota a pag. 248).

Utilizzando inoltre l'uguaglianza

$$\frac{1}{M}(\varkappa^2 + p^2) = I + \frac{p^2}{M} = \omega,$$

che esprime la conservazione dell'energia, troviamo la sezione d'urto definitiva della fotodisintegrazione nella forma (in unità ordinarie)

$$\sigma^{(e)} = \frac{8\pi}{3}\alpha \frac{\hbar^2}{M} \frac{\sqrt{I}\,(\hbar\omega - I)^{3/2}}{(\hbar\omega)^3} \tag{58,4}$$

(*H. A. Bethe*, *R. Peierls*, 1935). Essa ha un massimo per $\hbar\omega = 2I$ e si annulla per $\hbar\omega \to I$ e per $\hbar\omega \to \infty$.

L'assorbimento di dipolo elettrico di un fotone, descritto dalla formula (58,4), non dà, tuttavia, il contributo principale nella sezione d'urto in prossimità della soglia dell'effetto fotoelettrico (cioè per $\hbar\omega$ vicini a I). Il fatto è che, in questa regione, l'effetto principale deve provenire dalle transizioni allo stato S, che mancano invece nell'assorbimento di dipolo elettrico. Queste transizioni mancano anche nell'assorbimento di quadrupolo elettrico; anche se esse non sono in contraddizione, in questo caso, con la regola di selezione relativa alla parità, esse sono vietate dalla regola di selezione relativa al momento angolare orbitale (ricordiamo che noi trascuriamo le forze tensoriali, in assenza delle quali $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{S}$ si conservano separatamente). Per calcolare la sezione d'urto di fotodisintegrazione in prossimità della soglia occorre quindi prendere in considerazione l'assorbimento di dipolo magnetico, per il quale le regole di selezione ammettono le transizioni tra stati S (*E. Fermi*, 1935).

Sostituendo nella formula (58,1) il momento elettrico con il momento magnetico, abbiamo

$$\sigma^{(m)} = \frac{1}{3}\omega M p\, |\mu_{fi}|^2. \tag{58,5}$$

Il momento magnetico del moto orbitale non dà nessun contributo a μ_{fi} ,poiché il momento angolare orbitale $\boldsymbol{L}$ non ha elementi di

matrice per transizioni tra stati S. Il momento magnetico di spin è

$$\mu = 2\mu_p s_p + 2\mu_n s_n = 2(\mu_p - \mu_n)\, s_p + 2\mu_n S,$$

dove $S = s_p + s_n$ e μ_p, μ_n sono i momenti magnetici del protone e del neutrone. Trascurando le forze nucleari tensoriali lo spin totale si conserva, e quindi il suo operatore non dà transizioni. Quindi abbiamo

$$\mu_{fi} = 2\,(s_p)_{fi}\,(\mu_p - \mu_n).$$

In questa stessa approssimazione (senza forze tensoriali) le variabili orbitali e di spin si separano. Insieme con le funzioni d'onda, si può rappresentare sotto forma di prodotto di una parte orbitale e di una parte di spin anche l'elemento di matrice

$$\mu_{fi} = 2\,(\mu_p - \mu_n)\,\langle s_p S' M' \,|\, s_p \,|\, s_p S M\rangle \int \psi'^*(r)\,\psi(r)\,d^3x.$$

La presenza, però, di forze nucleari spin-spin ha come conseguenza che l'equazione d'onda per le funzioni orbitali $\psi(r)$ contiene, in qualità di parametro, il valore dello spin S. Se $S' = S$, allora $\psi'(r)$ e $\psi(r)$ sono autofunzioni di uno stesso operatore e quindi ortogonali. In tal modo, dallo stato iniziale ^3S la fotodisintegrazione avverrà solo allo stato dello spettro continuo ^1S.

Il quadrato $|\mu_{fi}|^2$ nella (58,5) deve essere, ovviamente, mediato sulle proiezioni M dello spin S nello stato iniziale. In tal modo, il problema si riconduce al calcolo della quantità

$$\frac{1}{2S+1}\sum_M |\langle s_p S' M' \,|\, s_p \,|\, s_p S M\rangle|^2,$$

dove $S = 1$, $S' = 0$, $s_p = s_n = 1/2$. Secondo le regole generali per gli elementi di matrice e la composizione dei momenti, questa quantità vale

$$\frac{1}{(2S+1)(2S'+1)}\,|\langle s_p S' \,\|\, s_p \,\|\, s_p S\rangle|^2 =$$

$$= \begin{Bmatrix} s_p & S' & s_n \\ S & s_p & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n' s_p \,\|\, s_p \,\|\, n s_p\rangle|^2 = \frac{1}{6}\,|\langle s_p \,\|\, s_p \,\|\, s_p\rangle|^2$$

(sono state usate le formule III (107,11) e (109,3)). Per l'elemento di matrice ridotto troviamo

$$\langle s_p \,\|\, s_p \,\|\, s_p\rangle = \sqrt{s_p\,(s_p+1)\,(2s_p+1)} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

La formula (58,5) assume, quindi, la forma

$$\sigma^{(m)} = \frac{1}{3}\,\omega M p\,(\mu_p - \mu_n)^2 \left| \int \psi'^* \psi\, d^3x \right|^2. \qquad (58,6)$$

La funzione iniziale ψ è data dalla formula (58,2). La funzione finale invece è

$$\psi' = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, R_{p0}(r).$$

Questo è il primo termine ($l = 0$) dello sviluppo (56,7) della funzione contenente nella sua forma asintotica un'onda piana e un'onda sferica convergente; è stato omesso il fattore di fase, qui inessenziale. Poiché l'integrazione viene fatta su una regione fuori del raggio d'azione delle forze nucleari, la funzione radiale ha la forma

$$R_{p0}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen}(pr+\delta)}{r}.$$

La fase δ è connessa con il valore del livello virtuale ($I_1 = 0{,}067$ MeV) del sistema « protone + neutrone » per $S = 0$:

$$\operatorname{cotg}\delta = \frac{\varkappa_1}{p}, \quad \varkappa_1 = \sqrt{MI_1}$$

(vedi III, § 133). Abbiamo quindi

$$\int \psi'^*\psi d^3x = (2\pi)^{3/2}\frac{\sqrt{\varkappa}}{p\pi}\operatorname{Im}\int e^{-\varkappa r+ipr}e^{i\delta}\,dr = (2\pi)^{3/2}\frac{\sqrt{\varkappa}}{p\pi}\operatorname{Im}\frac{e^{i\delta}}{\varkappa - ip}.$$

Dopo semplici trasformazioni algebriche otteniamo la seguente espressione per la sezione d'urto di fotodisintegrazione (in unità ordinarie):

$$\sigma^{(m)} = \frac{8\pi}{3\hbar c}(\mu_p - \mu_n)^2\,\frac{\sqrt{I(\hbar\omega - I)}\,(\sqrt{I}+\sqrt{I_1})^2}{\hbar\omega(\hbar\omega - I + I_1)}. \qquad (58,7)$$

Per $\hbar\omega \to I$ questa sezione d'urto si annulla come $\sqrt{\hbar\omega - I}$ in accordo con le proprietà generali del comportamento delle sezioni d'urto in prossimità della soglia di reazione (III, § 147).

Il processo, contrario alla fotodisintegrazione, è la cattura radiativa di un protone da parte di un neutrone. La sezione di cattura (σ_{cat}) si ottiene dalla sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico (σ_f) mediante il principio del bilancio dettagliato (vedi deduzione della (56,15)). Il peso statistico di spin del neutrone e del protone è uguale a $2\cdot 2 = 4$. Il peso statistico del deutone (nello stato $S = 1$) e del fotone è uguale a $3\cdot 2 = 6$. Quindi troviamo

$$\sigma_{cat} = \frac{3}{2}\,\frac{(\hbar\omega)^2}{c^2p^2}\,\sigma_f = \frac{3(\hbar\omega)^2}{2Mc^2(\hbar\omega - I)}\,\sigma_f. \qquad (58,8)$$

§ 59. *Radiazione di frenamento magnetico*[1])

Secondo la teoria classica (II, § 74) un elettrone ultrarelativistico, che si muove nel campo magnetico $\boldsymbol{H}$, irraggia uno spettro quasi-

[1]) Questo paragrafo è stato scritto in collaborazione con *V. N. Bayer*.

continuo con un massimo per la frequenza

$$\omega \sim \omega_0 \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3, \tag{59,1}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{veH}{|p|} \approx \frac{eH}{\varepsilon} \tag{59,2}$$

è la frequenza con la quale l'elettrone di energia ε si muove su un'orbita circolare (nel piano perpendicolare al campo)[1]).

Gli effetti quantistici nella radiazione di frenamento magnetico hanno una doppia origine: la quantizzazione del moto dell'elettrone e il rinculo quantizzato nell'atto di emissione del fotone. Quest'ultimo è determinato dall'entità del rapporto $\hbar\omega/\varepsilon$, e la condizione di applicabilità della teoria classica richiede che esso sia piccolo. In relazione a ciò è comodo introdurre il parametro

$$\chi = \frac{H}{H_0}\frac{|p|}{m} \approx \frac{H\varepsilon}{H_0 m} \approx \frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3, \tag{59,3}$$

dove $H_0 = m^2/e\hbar$ $(= m^2c^3/e\hbar) = 4{,}4\cdot 10^{13}$ Gauss. Nel campo classico si ha la relazione $\chi \sim \hbar\omega/\varepsilon \ll 1$. Nel caso contrario ($\chi \gg 1$) l'energia del fotone emesso è $\hbar\omega \sim \varepsilon$, e (come vedremo in seguito) una parte importante dello spettro si allarga fino a comprendere frequenze, per le quali l'energia dell'elettrone dopo l'emissione è

$$\varepsilon' \sim m\frac{H_0}{H}. \tag{59,4}$$

Perché l'elettrone rimanga ultrarelativistico, il campo deve soddisfare la condizione

$$\frac{H}{H_0} \ll 1. \tag{59,5}$$

Per quanto riguarda la quantizzazione del moto stesso dell'elettrone, essa è caratterizzata dal rapporto $\hbar\omega_0/\varepsilon$; $\hbar\omega_0$ è l'intervallo tra i livelli energetici contigui nel moto nel campo magnetico. Poiché

$$\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon} = \frac{H}{H_0}\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2,$$

dalla (59,5) segue che $\hbar\omega_0 \ll \varepsilon$, cioè il moto dell'elettrone è quasiclassico, indipendentemente dal valore di χ. In altre parole, si può

---

[1]) In questo paragrafo poniamo $c = 1$, ma conserviamo $\hbar$.

trascurare la reciproca non commutatività degli operatori delle variabili dinamiche dell'elettrone (grandezze $\sim\hbar\omega_0/\varepsilon$), tenendo conto, nello stesso tempo, della non commutatività di detti operatori con gli operatori del campo fotonico (grandezze $\sim\hbar\omega/\varepsilon$)[1].

Le funzioni d'onda quasi-classiche degli stati stazionari dell'elettrone in un campo esterno possono essere rappresentate nella forma simbolica

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{H}}}\, u(\mathrm{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t}\, \varphi(\boldsymbol{r}), \tag{59,6}$$

dove $\varphi(\boldsymbol{r}) \sim \exp(iS/\hbar)$ sono le funzioni d'onda quasi-classiche di una particella senza spin ($S(\boldsymbol{r})$ è l'azione classica di quest'ultima); $u(\mathrm{p})$ è il bispinore operatoriale

$$u(\mathrm{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathrm{H}+m}\, w \\ \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{H}+m}}\, (\sigma\,\mathrm{p})\, w \end{pmatrix},$$

che si ricava dall'ampiezza bispinoriale dell'onda piana $u(p)$ (23,9) sostituendo $\boldsymbol{p}$ e ε con gli operatori[2]):

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} - e\boldsymbol{A} = -i\hbar\nabla - e\boldsymbol{A}, \quad \mathrm{H} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

$\boldsymbol{P}$ è l'impulso generalizzato della particella nel campo di potenziale vettore $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$; l'ordine, nel quale sono posti i fattori operatoriali in ψ, non è essenziale, poiché noi trascuriamo la non commutatività di questi operatori; lo stato di spin dell'elettrone è determinato dallo spinore tridimensionale w.

Per il calcolo della probabilità di emissione del fotone nel caso quasi-classico è piú comodo non partire dalla formula definitiva della teoria delle perturbazioni (44,3), ma usare la formula nella quale non è ancora stata fatta l'integrazione rispetto al tempo. Per

---

[1]) La soluzione completa del problema quantistico della radiazione di frenamento magnetico fu data per la prima volta da *N. P. Klepikov* (1954), e la prima correzione quantistica alla formula classica venne trovata da *A. A. Sokolov*, *N. P. Klepikov*, *I. M. Ternov* (1952).

La deduzione esposta in questo paragrafo delle formule (59,23) e (59,30), in cui si utilizza in modo esplicito la quasi-classicità del moto, appartiene a *B. N. Bayer* e *V. M. Katkov* (1967). Un metodo analogo era stato usato prima da *J. Schwinger* (1954) per calcolare la prima correzione quantistica all'intensità di radiazione.

[2]) In questo paragrafo (a differenza del cap. IV) l'impulso generalizzato è indicato con la lettera maiuscola $\boldsymbol{P}$; la notazione $\boldsymbol{p}$ è usata per l'ordinario impulso (cinetico).

la completa (in tutto il tempo) probabilità differenziale si ha[1])

$$dw = \sum_f |a_{fi}|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad a_{fi} = \int_{-\infty}^{\infty} V_{fi}(t)\,dt \tag{59,7}$$

(vedi III (41,2). La sommatoria viene eseguita secondo gli stati finali dell'elettrone.

Usando la (59,6) scriviamo l'elemento di matrice V_{fi} per l'emissione del fotone ω, $\boldsymbol{k}$ nella forma di operatori

$$V_{fi}(t) = -\frac{e\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\hbar\omega}} \int d^3x \cdot \left[\varphi_f^* e^{\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t} \frac{u^+(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}}\right] \times$$

$$\times\, e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} (\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{\alpha}) \frac{u(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t} \varphi_i,$$

dove gli operatori tra parentesi quadra agiscono a sinistra; il campo fotonico è preso nel gauge tridimensionale. I fattori exp $(\pm i\mathrm{H}t/\hbar)$ trasformano gli operatori di Schrödinger, che stanno tra due di questi fattori, in operatori esplicitamente dipendenti dal tempo nella rappresentazione di Heisenberg. Riscriviamo V_{fi} nella forma

$$V_{fi} = \frac{e\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\hbar\omega}} \langle f | \mathrm{Q}(t) | i \rangle e^{i\omega t},$$

dove $\mathrm{Q}(t)$ indica l'operatore di Heisenberg

$$\mathrm{Q}(t) = \frac{u_f^+(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}} (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e}^*) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}(t)} \frac{u_i(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}}, \tag{59,8}$$

mentre l'elemento di matrice $\langle f \mid \ldots \mid i \rangle$ è calcolato rispetto alle funzioni φ_f, φ_i.

La sommatoria nella (59,7) è estesa a tutte le funzioni d'onda finali φ_f e viene eseguita usando l'uguaglianza

$$\sum_f \varphi_f^*(\boldsymbol{r}')\,\varphi_f(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}),$$

che esprime la completezza del sistema di funzioni φ_f[2]). A conti

---

[1]) Sostituendo

$$V_{fi}(t) = V_{fi} e^{i\omega_{fi} t}$$

si ha $a_{fi} = 2\pi V_{fi}\delta(\omega_{fi})$. Tenendo conto che il quadrato della funzione δ rappresenta (vedi pag. 299)

$$[\delta(\omega_{fi})]^2 = t 2\pi\delta(\omega_{fi})$$

(dove t è il periodo di osservazione) dalla (59,7) otteniamo per la probabilità in unità di tempo la formula (44,3).

[2]) Ricordiamo che nella (59,7) l'integrazione rispetto al tempo non è ancora stata fatta e quindi la conservazione dell'energia non è stata evidenziata e la sommatoria su φ_f non è limitata da nessuna condizione.

fatti otteniamo

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega}\frac{d^3k}{4\pi^2}\int dt_1 \int dt_2 \cdot e^{i\omega(t_1-t_2)}\langle i\,|\,Q^+(t_2)Q(t_1)\,|\,i\rangle. \qquad (59,9)$$

Se l'integrazione è fatta su un intervallo sufficientemente grande di tempo, si possono introdurre al posto di t_1 e t_2 le nuove variabili

$$\tau = t_2 - t_1, \quad t = \frac{t_1+t_2}{2}$$

e quindi si può considerare l'espressione integranda nell'integrale in dt come la probabilità di emissione nell'unità di tempo. Moltiplicando quest'ultima per $\hbar\omega$, otteniamo l'intensità

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^2}d^3k\int e^{-i\omega\tau}\left\langle i\left|Q^+\left(t+\frac{\tau}{2}\right)Q\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right|i\right\rangle d\tau. \qquad (59,10)$$

L'elettrone ultrarelativistico irraggia in uno stretto cono ad angoli $\theta \sim m/\varepsilon$ rispetto alla sua velocità $\boldsymbol{v}$. Perciò la radiazione in una data direzione $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$ è originata nel tratto di traiettoria, dove $\boldsymbol{v}$ ruota di un angolo $\sim m/\varepsilon$. Questo tratto viene percorso in un tempo τ, che soddisfa la relazione $\tau\,|\,\dot{\boldsymbol{v}}\,| \approx \tau\omega_0 \sim m/\varepsilon \ll 1$. Proprio questo intervallo dà il contributo essenziale nell'integrale in $d\tau$. Per questa ragione, nei calcoli, che seguiranno, noi svilupperemo sistematicamente tutte le quantità in potenze di $\omega_0\tau$. Può, tuttavia, risultare necessario trattenere parecchi termini dello sviluppo, a causa delle elisioni che ci possono essere per il fatto che $1 - \boldsymbol{nv} \sim \theta^2 \sim (m/\varepsilon)^2$.

Se diamo all'operatore Q^+Q la forma di prodotto di operatori commutanti (con la precisione richiesta), il calcolo dell'elemento di matrice diagonale $\langle i\,|\,\ldots\,|\,i\rangle$ si riduce alla sostituzione di questi operatori con i valori classici (funzioni del tempo) delle corrispondenti grandezze. Questo si può fare nel modo seguente.

Secondo quanto detto prima, nell'espressione per $Q(t)$ occorre tener conto della non commutatività degli operatori elettronici col solo operatore $\exp(-i\boldsymbol{kr}(t))$, connesso al campo fotonico. Abbiamo

$$\mathbf{p}e^{-i\boldsymbol{kr}} = e^{-i\boldsymbol{kr}}(\mathbf{p} - \hbar\boldsymbol{k}), \qquad (59,11)$$

$$H(\mathbf{p})\,e^{-i\boldsymbol{kr}} = e^{-i\boldsymbol{kr}}H(\mathbf{p} - \hbar\boldsymbol{k}). \qquad (59,12)$$

Queste formule conseguono dal fatto che $e^{-i\boldsymbol{kr}}$ è l'operatore di spostamento nello spazio degli impulsi. Mediante le formule (59, 11-12) trasportiamo nella (59,8) l'operatore $e^{-i\boldsymbol{kr}(t)}$ a sinistra e scriviamo $Q(t)$ nella forma

$$Q(t) = e^{-i\boldsymbol{kr}(t)}R(t), \quad R(t) = \frac{u_f^+(\mathbf{p}')}{\sqrt{2H'}}(\boldsymbol{\alpha e}^*)\frac{u_i(\mathbf{p})}{\sqrt{2H}}, \qquad (59,13)$$

dove $H' = H - \hbar\omega$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \hbar\boldsymbol{k}$.

Ora abbiamo

$$Q_2^+Q_1 = R_2 e^{i\boldsymbol{kr}_2}e^{-i\boldsymbol{kr}_1}R_1 \qquad (59,14)$$

(qui e nel seguito gli indici 1, 2 denotano i valori delle grandezze negli istanti $t_1 = t - \tau/2$ e $t_2 = t + \tau/2$). Rimane da calcolare il prodotto dei due operatori non commutanti $e^{i\boldsymbol{k}\mathbf{r}_2}$ e $e^{-i\boldsymbol{k}\mathbf{r}_1}$. Questo prodotto si può già considerare commutante con gli altri fattori.

Introduciamo la notazione

$$\mathrm{L}(\xi) = e^{-i\omega\tau(\xi-1)} e^{i\xi\boldsymbol{k}\mathbf{r}_2} e^{-i\xi\boldsymbol{k}\mathbf{r}_1}, \tag{59,15}$$

dove ξ è un parametro ausiliario; l'operatore che ci interessa è L (1). Derivando la definizione (59,15) rispetto a ξ, troviamo l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathrm{L}}{d\xi} = \mathrm{L}(\xi)\, e^{i\xi\boldsymbol{k}\mathbf{r}_2} \mathrm{b} e^{-i\xi\boldsymbol{k}\mathbf{r}_1}, \tag{59,16}$$

dove, per brevità, abbiamo scritto

$$\mathrm{b} = i\boldsymbol{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - i\omega\tau.$$

La grandezza b si può esprimere attraverso $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}(t_1)$ mediante l'equazione del moto classico nel piano perpendicolare a $\boldsymbol{H}$[1]):

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{eH} \operatorname{sen} \frac{eH\tau}{\varepsilon} + \frac{[\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{H}]}{eH^2}\left(1 - \cos\frac{eH\tau}{\varepsilon}\right)$$

(vedi II, § 21). Sviluppando in potenze di τ, otteniamo

$$b(\boldsymbol{p}_1) \approx i\omega\tau \left\{ (\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{n} - 1) + \tau \frac{e\boldsymbol{n}[\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{H}]}{2\varepsilon^2} - \tau^2 \frac{e^2H^2}{6\varepsilon^2} \right\} \tag{59,17}$$

(nell'ultimo termine abbiamo posto $\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}_1 \approx 1$). Utilizzando ora $e^{-i\boldsymbol{k}\mathbf{r}_1}$ come operatore di spostamento nello spazio p, abbiamo

$$e^{i\xi\boldsymbol{k}\mathbf{r}_1} b(\boldsymbol{p}_1)\, e^{-i\xi\boldsymbol{k}\mathbf{r}_1} = b(\boldsymbol{p}_1 - \xi\hbar\boldsymbol{k}) \equiv b_-;$$

il segno meno, apposto come indice, qui e nel seguito significa che la grandezza è funzione dell'argomento $\boldsymbol{p}_1 - \xi\hbar\boldsymbol{k}$. Trasformiamo b_- usando la funzione $b(\boldsymbol{p})$ (59, 17). Nel primo termine scriviamo

$$\boldsymbol{v}_-\boldsymbol{n} - 1 \approx \frac{1}{2}[(\boldsymbol{v}_-\boldsymbol{n})^2 - 1] = \frac{1}{2\varepsilon_-^2}\{(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{n} - \xi\hbar\omega)^2 - (\boldsymbol{p}_1 - \xi\hbar\boldsymbol{k})^2 - m^2\} =$$

$$= \frac{(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{n})^2 - \varepsilon^2}{2\varepsilon_-^2} \approx \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_-^2}(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{n} - 1).$$

La trasformazione degli altri termini della (59,17) si riduce alla sostituzione al denominatore di ε con ε_-. In tal modo, $b_- = (\varepsilon/\varepsilon_-)^2 b$. Tenendo presente ora che le direzioni $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{n}$ sono vicine e che $\varepsilon \approx p$, si può porre, rispettando la precisione necessaria, $\varepsilon_- \approx \varepsilon - \xi\hbar\omega$.

---

[1]) Questo si può fare, poiché la non commutatività delle componenti della velocità in un campo magnetico porta a termini di ordine di grandezza relativo $\hbar\omega_0/\varepsilon$ ed è quindi inessenziale.

L'espressione definitiva dell'equazione (59,16) ha la forma

$$\frac{dL}{d\xi} = L(\xi)\frac{\varepsilon^2 b}{(\varepsilon - \hbar\xi\omega)^2}.$$

Qui l'ordine dei fattori non è essenziale e tutte le grandezze si possono considerare come classiche. Risolvendo quest'equazione con la condizione $L(0) = e^{i\omega\tau}$, otteniamo

$$L(\xi) = \exp\left\{b\frac{\xi\varepsilon}{\varepsilon - \hbar\omega\xi} + i\omega\tau\right\},$$

e quindi

$$L(1) = \exp\left\{i\omega\tau + i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_1 - \omega\tau)\right\}, \qquad (59,18)$$

dove $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$.

Trasformiamo gli altri fattori nella (59,14). Sviluppando direttamente il prodotto che compare in $R(t)$ (con la matrice $\boldsymbol{\alpha}$ presa dalla (21,20)), troviamo

$$R(t) = w_f^* e^* (\boldsymbol{A} + i[\boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma}])\, w_i,$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{p}}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2\varepsilon'}\boldsymbol{v}, \qquad (59,19)$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{p}}{\varepsilon + m} - \frac{\boldsymbol{p}'}{\varepsilon' + m}\right) \approx \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon'}\left(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

dove $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$, $\boldsymbol{p}'(t) = \boldsymbol{p}(t) - \hbar\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$; sono stati omessi i termini di ordine piú elevato in m/ε. In tal modo, scriviamo finalmente

$$\langle i | Q_2^+ Q_1 | i \rangle = R_2^* R_1 \exp\left\{i\omega\tau + i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_1 - \omega\tau)\right\},$$

$$R_2^* R_1 = \mathrm{Tr}\,\frac{1 + \boldsymbol{\zeta}_i\boldsymbol{\sigma}}{2}\left((\boldsymbol{A}_2 - i[\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\sigma}])\,e\right)\frac{1 + \boldsymbol{\zeta}_f\boldsymbol{\sigma}}{2}\left((\boldsymbol{A}_1 + i[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{\sigma}])\,e^*\right). \qquad (59,20)$$

I fattori $(1 + \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\sigma})/2$ sono le matrici densità di polarizzazione dell'elettrone iniziale e finale.

Consideriamo ora l'intensità di radiazione, sommata sulle polarizzazioni del fotone e dell'elettrone finale e mediata sulle polarizzazioni dell'elettrone iniziale. Come risultato delle operazioni indicate, dopo un semplice calcolo, otteniamo[1])

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{polar}} R_2^* R_1 = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{2\varepsilon'^2}(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 - 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon'}\right)^2\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2.$$

---

[1]) Qui è stata utilizzata anche la seguente circostanza. Sommando su $\boldsymbol{e}$ troviamo

$$\sum_{\boldsymbol{e}} (\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{e})(\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{e}^*) = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{n})(\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{n}).$$

Sostituendo la (59,20) nella (59,9) si può integrare per parti, notando che

$$(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{n})\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_1\right) = \frac{i\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\frac{d}{dt_1}\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_1\right),$$

Con la precisione richiesta abbiamo

$$v_1 v_2 = v^2 - \frac{\tau^2}{4}\dot{v}^2 + \frac{\tau^2}{4} v\ddot{v} = 1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\omega_0^2\tau^2.$$

Sostituendo queste espressioni nella (59,20) e quindi nella (59,10), otteniamo tenendo conto della (59,17),

$$dI = -\frac{e^2}{4\pi^2}\omega^2\, d\omega\, do_n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m^2}{\varepsilon\varepsilon'} + \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{4\varepsilon'^2}\omega_0^2\tau^2\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{i\omega\tau\varepsilon}{\varepsilon'}\left(1 - nv + \frac{\tau^2}{24}\omega_0^2\right)\right\} d\tau. \qquad (59,21)$$

Questa formula dà la distribuzione spettrale e angolare dell'intensità di radiazione.

Introduciamo l'angolo ϑ individuato da $\boldsymbol{n}$ e dal piano dell'orbita dell'elettrone, e anche l'angolo ψ individuato dalla proiezione del vettore $\boldsymbol{n}$ su detto piano e il vettore $\boldsymbol{v}$. Tenendo presente che il contributo principale nell'integrale è dato dai piccoli angoli, si può porre

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{v} = v\cos\vartheta\cos\psi \approx v\left(1 - \frac{\vartheta^2+\psi^2}{2}\right).$$

Per l'integrazione della formula (59,21) è comodo introdurre invece di τ, ψ le nuove variabili x e y secondo la relazione

$$\omega_0\tau = \left(\frac{2\omega_0\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\right)^{1/3}(x+y), \quad \psi = \left(\frac{2\omega_0\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\right)^{1/3}\frac{x-y}{2}.$$

Allora l'esponente nella (59,21) assume la forma

$$-i\left(x\eta + \frac{x^3}{3} + y\eta + \frac{y^3}{3}\right),$$

dove sono state introdotte le notazioni

$$\eta = \left(\frac{u}{2\chi}\right)^{2/3}(1+\delta^2), \quad u = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon'} = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon - \hbar\omega}, \quad \delta = \frac{\vartheta\varepsilon}{m}. \qquad (59,22)$$

Gli integrali in $dx\, dy$ si esprimono attraverso la funzione di Airy e la sua derivata[1]). Come risultato troviamo per la distribuzione

---

e analogamente per $v_2\boldsymbol{n}$. Troviamo allora che, ai fini della successiva integrazione $v_1\boldsymbol{n}$ e $v_2\boldsymbol{n}$ possono essere sostituiti con l'unità.

[1]) Per la definizione della funzione di Airy e del suo legame con le funzioni di Macdonald vedi III, § *b*.

spettrale l'espressione

$$\frac{dI}{d\omega}=\frac{\sqrt{2}e^2m^2}{\pi\hbar\varepsilon}\frac{u}{1+u}\left(\frac{u}{2\chi}\right)^{1/3}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-\Phi^2(\eta)+(1+\delta^2)\left(1+\frac{u^2}{2(1+u)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\Phi^2(\eta)+\frac{1}{\eta}\Phi'^2(\eta)\right]\right\}d\delta. \qquad (59,23)$$

Il contributo principale nell'integrale viene dagli angoli $\vartheta\sim m/\varepsilon$ ($\delta\sim 1$). Il massimo della distribuzione cade sulle frequen-

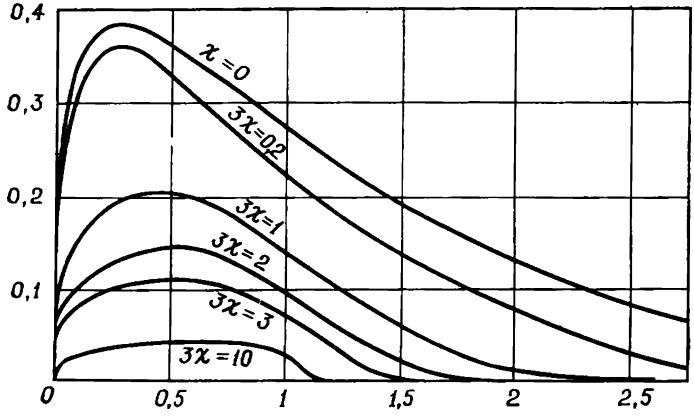


Fig. 5

ze per le quali $\eta\sim(\hbar\omega/\varepsilon'\chi)^{2/3}\sim 1$. Per $\chi\ll 1$, discende la (59,1) e per $\chi\gg 1$, la (59,4).

Nella fig. 5 sono riportati i grafici della distribuzione spettrale per vari valori di χ[1]). Vi è riportata la quantità

$$\frac{1}{{}^3/_2 I_{cl}}\frac{dI}{d(\omega/\omega_c)},$$

come funzione del rapporto ω/ω_c, dove

$$\hbar\omega_c=\frac{\varepsilon\chi}{{}^2/_3+\chi},\quad I_{cl}=\frac{2e^2m^2\chi^2}{3\hbar^2}=\frac{2e^4H^2\varepsilon^2}{3m^4}.$$

La quantità I_{cl} è l'intensità classica totale di radiazione (vedi II (74,2)).

Usando la relazione

$$\Phi^2(\eta)+\frac{1}{\eta}\Phi'^2(\eta)=\frac{1}{2\eta}\frac{d^2}{d\eta^2}\Phi^2(\eta)$$

[1]) I grafici 5 e 6 sono costruiti sulla base di calcoli di *N. P. Klepikov.*

e sostituendo la variabile δ secondo la formula $(u/2\chi)^{2/3}\delta^2 = t$, riscriviamo la (59,23) nella forma

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{2e^2m^2}{\pi\hbar\varepsilon}\frac{u}{1+u}\left\{-1+\frac{2}{x}\left(1+\frac{u^2}{2(1+u)}\right)\frac{d^2}{dx^2}\right\}\times$$
$$\times\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\Phi^2(2^{-2/3}x+t),$$

dove $x = (u/\chi)^{2/3}$. Ricorrendo inoltre alla formula[1])

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\Phi^2(2^{-2/3}x+t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_x^\infty \Phi(x)\,dx,$$

diamo alla distribuzione spettrale la forma

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{e^2m^2}{\sqrt{\pi}\,\hbar\varepsilon}\frac{u}{1+u}\left\{\int_x^\infty \Phi(x)\,dx+\frac{2}{x}\left(1+\frac{u^2}{2(1+u)}\right)\Phi'(x)\right\}. \tag{59,24}$$

Nel caso limite classico abbiamo $\hbar\omega \ll \varepsilon$, e quindi $u \approx \hbar\omega/\varepsilon$, $x \approx (\omega/\omega_0)^{2/3}(m/\varepsilon)^2$, e la (59,24) si trasforma nella formula classica II (74,13).

Scrivendo

$$dI = \frac{dI}{d\omega}d\omega = \frac{dI}{d\omega}\frac{\varepsilon}{(1+u)^2\hbar}du$$

e integrando in du da 0 a ∞ (nel primo termine della (59,24) l'integrazione viene eseguita due volte), otteniamo

$$I = -\frac{e^2m^2\chi^2}{2\sqrt{\pi}\,\hbar^2}\int_0^\infty \frac{4+5\chi x^{3/2}+4\chi^2x^3}{(1+\chi x^{3/2})^4}\Phi'(x)\,x\,dx. \tag{59,25}$$

Nella fig. 6 è riportato il grafico della funzione $I(\chi)/I_{\text{cl}}$.

Per $\chi \ll 1$ il contributo dominante all'integrale proviene dalla regione $x \sim 1$. Sviluppando l'espressione integranda in potenze di χ e integrando per serie mediante la formula

$$\int_0^\infty x^\nu\Phi'(x)\,dx = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,3^{(4\nu-1)/6}\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+\frac{1}{3}\right),$$

otteniamo

$$I = I_{\text{cl}}\left(1-\frac{55\sqrt{3}}{16}\chi+48\chi^2-\ldots\right). \tag{59,26}$$

---

[1]) La deduzione di questa formula si può trovare nell'articolo di D. E. Aspnes, Phys. Rev. 147, 554 (1966).

Per $\chi \gg 1$ nell'integrale è essenziale la regione nella quale $\chi x^{3/2} \sim 1$, cioè $x \ll 1$. In prima approssimazione si può quindi sostituire $\Phi'(x)$ con $\Phi'(0) = -3^{1/6}\Gamma(2/3)/2\sqrt{\pi}$, dopo di che l'integrazione porta al risultato

$$I \approx \frac{32\Gamma(2/3)\, e^2 m^2}{243\hbar^2}(3\chi)^{2/3} = 0{,}82\frac{e^2 m^2}{\hbar^2}\left(\frac{H\varepsilon}{H_0 m}\right)^{2/3}. \qquad (59{,}27)$$

La radiazione di frenamento magnetico origina la polarizzazione degli elettroni che si muovono nel campo (*A. A. Sokolov, I. M. Ternov*, 1963). Per risolvere questo problema occorre trovare la probabilità della transizione radiativa accompagnata a spin flip (inversione della direzione dello spin).

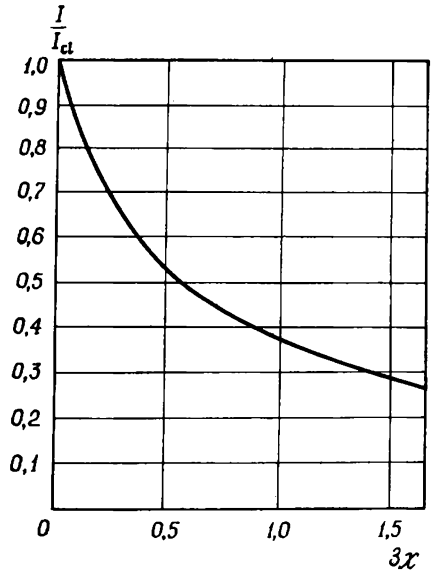


Fig. 6

Ponendo nella (59,20) $\zeta_i = -\zeta_f \equiv \zeta$, $|\zeta| = 1$, otteniamo

$$R_2^* R_1 = (\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2) - (\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{B}_1)(\boldsymbol{e}\boldsymbol{B}_2) - \\ - (\boldsymbol{e}^*[\boldsymbol{B}_1\zeta])(\boldsymbol{e}[\boldsymbol{B}_2\zeta]) - i(\zeta\boldsymbol{e}^*)(\boldsymbol{e}[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2]).$$

Sommando sulle polarizzazioni del fotone, dopo semplici trasformazioni, otteniamo

$$\sum_e R_2^* R_1 = (\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)(1-\zeta\boldsymbol{n})^2) + \\ + (\zeta\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}\boldsymbol{B}_1)(\zeta\boldsymbol{B}_2) + (\zeta\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}\boldsymbol{B}_2)(\zeta\boldsymbol{B}_1) - \\ - i(\zeta - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\zeta))[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2]. \qquad (59{,}28)$$

Noi supporremo che $\chi \ll 1$ e cercheremo solo il termine principale dello sviluppo della probabilità in potenze di $\hbar$. Poiché l'espressione (59,28) (con $\boldsymbol{B}$ dalla (59,19)) contiene già $\hbar^2$, tutte le restanti grandezze ε' (comprese quelle che figurano nell'esponente della (59,20)) possono venire sostituite con ε.

Sviluppando

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v} + \frac{\tau}{2}\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v} - \frac{\tau}{2}\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \tau\boldsymbol{v} + \frac{\tau^3}{24}\ddot{\boldsymbol{v}}$$

e sostituendo la (59,28) nella (59,20) e quindi nella (59,10), troviamo la probabilità differenziale di transizione nell'unità di tempo ($dw = dI/\hbar\omega$). L'integrazione in d^3k viene fatta usando la formula

$$\int f(k_\mu)\, e^{-i\hbar x}\frac{d^3k}{\omega} = -f(i\partial_\mu)\frac{4\pi}{(x_0 - i0)^2 - \boldsymbol{x}^2}, \qquad (59,29)$$

dove, in questo caso,

$$x_0 = \tau, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \quad x^2 = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2 = \tau^2\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2} + \frac{\tau^2\omega_0^2}{12}\right).$$

Il calcolo porta al seguente risultato:

$$w = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5\omega_0^3\oint\frac{dz}{(1+z^2/12)^3}\times$$
$$\times\left[\frac{3}{z^4} - \frac{5}{12z^2} + \left(\frac{1}{z^4} + \frac{5}{12z^2}\right)(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{v})^2 - \frac{2i}{z^3\omega_0}(\boldsymbol{\zeta}[\dot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}])\right],$$

dove è stata fatta la sostituzione $z = \tau\omega_0\varepsilon/m$, e il cammino d'integrazione in dz passa sotto l'asse reale e si richiude nel semipiano inferiore. Eseguendo quest'ultima integrazione, otteniamo l'espressione definitiva per la probabilità totale di transizione radiativa accompagnata da spin flip:

$$w = \frac{5\sqrt{3}\alpha}{16}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5\omega_0^3\left(1 - \frac{2}{9}\zeta_{\parallel}^2 - \frac{8\sqrt{3}}{15}\frac{e}{|e|}\zeta_\perp\right), \qquad (59,30)$$

dove $\zeta_{\parallel} = \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{v}$, $\zeta_\perp = \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{H}/H$. Questa formula è applicabile sia per gli elettroni ($e < 0$) che per i positroni ($e > 0$).

La probabilità (59,30) non dipende dal segno della polarizzazione longitudinale $\zeta_{\parallel}$, ma dipende dal segno di $\zeta_\perp$. Di conseguenza anche la polarizzazione che nasce in conseguenza della radiazione è trasversale[1]). Per gli elettroni la probabilità di transizione da uno

[1]) Questa circostanza è evidente a priori: il vettore assiale polarizzazione radiativa può essere diretto solo come l'unico vettore assiale che figuri nel problema e cioè $\boldsymbol{H}$.

stato con spin diretto « secondo il campo » ($\zeta_\perp = 1$) ad uno stato con spin diretto « contro il campo » è maggiore della probabilità della transizione inversa. Quindi la polarizzazione per radiazione degli elettroni è diretta contro il campo, e il suo grado, in uno stato stazionario (per $\zeta_\parallel = 0$), vale

$$\frac{w(\zeta_\perp = -1) - w(\zeta_\perp = 1)}{w(\zeta_\perp = -1) + w(\zeta_\perp = 1)} = \frac{8\sqrt{3}}{15} = 0{,}93.$$

I positroni si polarizzano (con lo stesso grado) nella direzione del campo.

Capitolo VI

DIFFUSIONE DELLA LUCE

§ 60. *Tensore di diffusione*

La diffusione di un fotone da parte di un sistema di elettroni (per fissare le idee, parleremo dell'atomo) è un processo formato dall'assorbimento del fotone iniziale $\boldsymbol{k}$ e dall'emissione simultanea di un altro fotone $\boldsymbol{k}'$. In questo processo l'atomo può ritrovarsi o al livello energetico discreto iniziale o ad un altro livello discreto qualsiasi. Nel primo caso la frequenza del fotone non varia (*diffusione Rayleigh*), mentre nel secondo essa varia della quantità

$$\omega' - \omega = E_1 - E_2, \tag{60,1}$$

dove E_1, E_2 sono le energie iniziale e finale dell'atomo (*diffusione Raman* o *diffusione combinata*)[1]).

Poiché l'operatore di perturbazione elettromagnetica non ha elementi di matrice per transizioni con variazione simultanea di due numeri di occupazione fotonici, l'effetto di diffusione compare solo nell'approssimazione del secondo ordine della teoria delle perturbazioni. Questo effetto va considerato come se avvenisse attraverso determinati stati intermedi, i quali possono essere di due tipi.

I. Il fotone $\boldsymbol{k}$ viene assorbito, l'atomo passa in uno dei suoi possibili stati E_n; nella successiva transizione allo stato finale viene emesso il fotone $\boldsymbol{k}'$.

II. Viene emesso il fotone $\boldsymbol{k}'$, l'atomo passa nello stato E_n; nella transizione allo stato finale viene assorbito il fotone $\boldsymbol{k}$.

Come elemento di matrice per il processo esaminato si deve considerare la somma (vedi III (43,7))

$$V_{21} = \sum_n{}' \left(\frac{V'_{2n} V_{n1}}{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_n^{\mathrm{I}}} + \frac{V_{2n} V'_{n1}}{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_n^{\mathrm{II}}} \right), \tag{60,2}$$

dove l'energia iniziale del sistema « atomo + fotone » è $\mathscr{E}_1 = E_1 + \omega$, e le energie degli stati intermedi sono

$$\mathscr{E}_n^{\mathrm{I}} = E_n, \quad \mathscr{E}_n^{\mathrm{II}} = E_n + \omega + \omega'.$$

---

[1]) In questo capitolo le grandezze relative agli stati iniziale e finale del sistema diffusore verranno munite degli indici 1 e 2.

$V_{\cdot\cdot}$ sono gli elementi di matrice di assorbimento del fotone k, $V'_{\cdot\cdot}$ sono gli elementi di matrice di emissione del fotone k'; dalla sommatoria su n lo stato iniziale viene escluso (per questo abbiamo apposto l'apice al simbolo di sommatoria). La sezione d'urto di diffusione è

$$d\sigma = 2\pi \, | V_{21} |^2 \frac{\omega'^2 \, do'}{(2\pi)^3}, \tag{60,3}$$

dove do' è l'elemento di angolo solido per la direzione k'[1]).

Supporremo che le lunghezze d'onda dei fotoni iniziale e finale siano grandi rispetto alle dimensioni a del sistema diffusore. In relazione a ciò, considereremo tutte le transizioni nell'approssimazione di dipolo. Se gli stati dei fotoni si descrivono con onde piane, a questa approssimazione corrisponde la sostituzione dei fattori e^{ikr} con l'unità. Allora le funzioni d'onda dei fotoni (nel gauge trasversale tridimensionale) sono

$$A_{e\omega} = \sqrt{4\pi} \frac{e}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t}, \quad A_{e'\omega'} = \sqrt{4\pi} \frac{e'}{\sqrt{2\omega'}} e^{-i\omega' t}.$$

Nell'ambito delle condizioni esposte, l'operatore di interazione elettromagnetica può essere scritto nella forma

$$V = -\mathbf{d}\mathbf{E}, \tag{60,4}$$

dove $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$ è l'operatore del campo, e $\mathbf{d}$ è l'operatore del momento di dipolo dell'atomo (analogamente all'espressione classica per l'energia di un sistema di piccole dimensioni in un campo elettrico; vedi II, § 42). Gli elementi di matrice di questo operatore sono

$$V_{n1} = -i\sqrt{2\pi\omega}\,(e\boldsymbol{d}_{n1}), \quad V'_{2n} = i\sqrt{2\pi\omega'}\,(e'^*\boldsymbol{d}_{2n}).$$

Sostituendo queste espressioni nelle (60,2-3), otteniamo la sezione d'urto di diffusione (che scriviamo in unità ordinarie)[2])

$$d\sigma = \left| \sum_n \left\{ \frac{(\boldsymbol{d}_{2n}e'^*)(\boldsymbol{d}_{n1}e)}{\omega_{n1}-\omega} + \frac{(\boldsymbol{d}_{2n}e)(\boldsymbol{d}_{n1}e'^*)}{\omega_{n2}+\omega} \right\} \right|^2 \frac{\omega\omega'^3}{\hbar^2 c^4} \, do',$$

$$\hbar\omega_{n1} = E_n - E_1, \quad \hbar\omega_{n2} = E_n - E_2. \tag{60,5}$$

La somma è estesa a tutti i possibili stati dell'atomo, inclusi gli stati dello spettro continuo (gli stati 1 e 2 vengono automaticamente

---

[1]) L'energia luminosa dI', diffusa (in 1 s) nell'angolo solido do', si esprime attraverso l'intensità I (densità del flusso di energia) della luce incidente mediante la relazione

$$dI' = I \frac{\omega'}{\omega} \, d\sigma.$$

[2]) Questa formula fu ottenuta per la prima volta da *H. A. Kramers* e *W. Heisenberg* (1925).

esclusi dalla somma poiché i rispettivi elementi di matrice sono nulli: $d_{11} = d_{22} = 0$).

Introduciamo la notazione[1])

$$(c_{ik})_{21} = \sum_n \left[\frac{(d_i)_{2n}\,(d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega} + \frac{(d_k)_{2n}\,(d_i)_{n1}}{\omega_{n2} + \omega} \right] \tag{60,6}$$

(i, $k = x$, y, z sono indici vettoriali tridimensionali). Usando questa relazione, riscriviamo la formula (60,5) nella forma

$$d\sigma = \omega\,(\omega + \omega_{12})^3\,|\,(c_{ik})_{21}\,e_i^* e_k\,|^2\,do'. \tag{60,7}$$

La notazione (60,6) si giustifica con il fatto che questa somma può effettivamente essere rappresentata come elemento di matrice di un certo tensore. Il modo piú semplice per convincersi di questo è di introdurre una grandezza vettoriale $\boldsymbol{b}$, il cui operatore soddisfa l'equazione

$$\left(i\,\frac{d}{dt} + \omega \right) \mathbf{b} = \mathbf{d}.$$

I suoi elementi di matrice sono

$$b_{n1} = \frac{d_{n1}}{\omega - \omega_{n1}}, \qquad b_{2n} = \frac{d_{2n}}{\omega + \omega_{n2}},$$

e quindi

$$(c_{ik})_{21} = (b_k d_i - d_i b_k)_{21}. \tag{60,8}$$

Chiameremo gli elementi di matrice $(c_{ik})_{21}$ *tensore di diffusione* della luce.

Da quanto detto segue che le regole di selezione per la diffusione coincidono con le regole di selezione per gli elementi di matrice di un tensore qualsiasi di rango 2. Notiamo subito che se il sistema gode di un centro di simmetria (e quindi i suoi stati possono essere classificati secondo la parità), allora le transizioni sono possibili solo tra stati della stessa parità (ivi comprese transizioni senza cambiamento di stato). Questa regola è l'opposto della regola di selezione relativa alla parità nella radiazione (di dipolo elettrico), cosí che ha luogo un divieto alternativo: le transizioni, permesse nella radiazione, sono vietate nella diffusione, e le transizioni, permesse nella diffusione, sono vietate nella radiazione.

Scomponiamo il tensore c_{ik} in parti irriducibili

$$c_{ik} = c^0 \delta_{ik} + c^s_{ik} + c^a_{ik}, \tag{60,9}$$

---

[1]) La maggior parte dei risultati esposti nei §§ 60-62 appartiene principalmente a *G. Placzek* (1931-1933).

dove

$$c^0 = \frac{1}{3} c_{ii},$$

$$c^s_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik} + c_{ki}) - c^0 \delta_{ik}, \qquad (60,10)$$

$$c^a_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik} - c_{ki})$$

sono, rispettivamente, uno scalare, un tensore simmetrico (di traccia nulla) e un tensore antisimmetrico. I loro elementi di matrice sono

$$(c^0)_{21} = \frac{1}{3} \sum_n \frac{\omega_{n1} + \omega_{n2}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)} (d_i)_{2n} (d_i)_{n1}, \qquad (60,11)$$

$$(c^s_{ik})_{21} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\omega_{n1} + \omega_{n2}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)} \times$$

$$\times [(d_i)_{2n} (d_k)_{n1} + (d_k)_{2n} (d_i)_{n1}] - (c^0)_{21} \delta_{ik}, \qquad (60,12)$$

$$(c^a_{ik})_{21} = \frac{2\omega + \omega_{12}}{2} \sum_n \frac{(d_i)_{2n} (d_k)_{n1} - (d_k)_{2n} (d_i)_{n1}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)}. \qquad (60,13)$$

Studiamo ora alcune proprietà del tensore di diffusione nei casi limite di piccole e grandi frequenze del fotone[1]).

Per la diffusione Rayleigh ($\omega_{12} = 0$) la parte antisimmetrica del tensore per $\omega \to 0$ si annulla (per la presenza del fattore ω davanti alla somma (60,13)). La parte scalare e la parte simmetrica del tensore di diffusione, invece, per $\omega \to 0$ tendono a limiti finiti. In relazione a ciò, la sezione d'urto per piccoli ω è proporzionale a ω^4.

Nel caso opposto, quando la frequenza ω è grande rispetto a tutte le frequenze ω_{n1} e ω_{n2}, essenziali nella (60,6), noi dobbiamo tornare alle formule della teoria classica (ovviamente per la lunghezza d'onda deve sempre valere la relazione $\lambda \gg a$). Il primo termine dello sviluppo del tensore di diffusione in potenze di $1/\omega$ è

$$\frac{1}{\omega} \sum_n [(d_k)_{2n} (d_i)_{n1} - (d_i)_{2n} (d_k)_{n1}] = \frac{1}{\omega} (\mathrm{d}_k \mathrm{d}_i - \mathrm{d}_i \mathrm{d}_k)_{21}$$

e si annulla a causa della commutatività degli operatori d_i, d_k. Il successivo termine dello sviluppo è

$$(c_{ik})_{21} = \frac{1}{\omega^2} \sum_n [\omega_{2n} (d_k)_{2n} (d_i)_{n1} - (d_i)_{2n} \omega_{n1} (d_k)_{n1}] =$$

$$= \frac{1}{i\omega^2} (\dot{\mathrm{d}}_k \mathrm{d}_i - \mathrm{d}_i \dot{\mathrm{d}}_k)_{21}.$$

---

[1]) Il caso della risonanza (quando ω è vicina a una delle frequenze ω_{n1} o ω_{2n}) verrà considerato al § 64.

Usando la definizione $\boldsymbol{d} = \sum e\boldsymbol{r}$ (la somma è estesa a tutti gli elettroni dell'atomo) e le regole di commutazione tra gli impulsi e le coordinate, otteniamo

$$(c_{ik})_{11} = -\frac{Ze^2}{m\omega^2}\delta_{ik}, \quad (c_{ik})_{21} = 0, \tag{60,14}$$

dove Z è il numero totale degli elettroni del sistema. In tal modo, nel limite delle grandi frequenze, nel tensore di diffusione rimane solo la parte scalare, e la diffusione ha luogo senza cambiamento dello stato del sistema (cioè la diffusione è completamente coerente, vedi piú avanti). In questo caso, la sezione d'urto di diffusione è

$$d\sigma = r_e^2 Z^2 \,|\, \boldsymbol{e}'^* \boldsymbol{e} \,|^2 \, do', \tag{60,15}$$

dove $r_e = e^2/m$. Sommando sulle polarizzazioni del fotone finale, otteniamo la formula

$$d\sigma = r_e^2 Z^2 \{1 - (\boldsymbol{e}\boldsymbol{n}')^2\} \, do' = r_e^2 Z^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot do', \tag{60,16}$$

che coincide effettivamente con la formula classica di Thomson II (80,7) (θ è l'angolo tra la direzione di diffusione e il vettore polarizzazione del fotone incidente).

Consideriamo ora la diffusione della luce da parte di un insieme di N atomi identici, contenuti in un volume, le cui dimensioni sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda. Il tensore di diffusione associato a un tale insieme sarà uguale alla somma dei tensori di diffusione relativi a ciascun atomo. Occorre, però, tenere presente che le funzioni d'onda (mediante le quali si calcolano gli elementi di matrice del momento di dipolo) di piú atomi identici, considerati simultaneamente, non si possono considerare semplicemente uguali. Le funzioni d'onda sono per definizione determinate a meno di un fattore di fase arbitrario, e questi fattori sono peculiari di ogni atomo. La sezione d'urto di diffusione deve essere mediata rispetto ai fattori di fase di ciascun atomo separatamente.

Il tensore di diffusione $(c_{ik})_{21}$ di ciascun atomo contiene il fattore $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, dove φ_1 e φ_2 sono le fasi delle funzioni d'onda degli stati iniziale e finale. Per la diffusione Raman gli stati 1 e 2 sono differenti, e questo fattore è differente dall'unità. Nel quadrato del modulo

$$|\, e_i'^* e_k \sum (c_{ik})_{21} \,|^2$$

(sommatoria estesa a tutti gli N atomi) i prodotti dei termini della somma, relativi ad atomi differenti, contengono fattori di fase che si annullano quando si esegue separatamente la media sulle fasi degli atomi; rimangono solo i quadrati dei moduli di ciascun termine. Questo significa che la sezione d'urto di diffusione totale da parte di N atomi si ottiene moltiplicando per N la sezione d'urto di diffusione di un singolo atomo (la diffusione è incoerente).

Se, invece, gli stati iniziale e finale dell'atomo coincidono, allora i fattori $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ sono uguali all'unità. In questo caso sarà l'ampiezza di diffusione per un sistema di N atomi a differire di un fattore N dall'ampiezza di diffusione per un singolo atomo, mentre la sezione d'urto di diffusione differirà a sua volta di un fattore N^2 (la diffusione è coerente). Se il livello energetico dell'atomo non è degenere, la diffusione Rayleigh sarà, in tal modo, completamente coerente. Se, invece, il livello energetico è degenere, avrà luogo anche la diffusione Rayleigh incoerente, generata dalle transizioni dell'atomo tra i diversi stati reciprocamente degeneri. Notiamo che quest'ultimo fatto è un effetto puramente quantistico: nella teoria classica una diffusione senza variazione di frequenza è già coerente.

Il tensore di diffusione coerente è dato dall'elemento di matrice diagonale $(c_{ik})_{11}$: indichiamolo con α_{ik} (tralasciando, per semplicità, l'indice con il quale si indica lo stato dell'atomo). Dalla (60,6) abbiamo

$$\alpha_{ik}(\omega) \equiv (c_{ik})_{11} = \sum_n \left[\frac{(d_i)_{1n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1}-\omega} + \frac{(d_k)_{1n}(d_i)_{n1}}{\omega_{n1}+\omega}\right]. \qquad (60,17)$$

Notando che $(d_i)_{1n} = (d_i)^*_{n1}$, è facile vedere che questo tensore è hermitiano[1]):

$$\alpha_{ik} = \alpha^*_{ki}. \qquad (60,18)$$

Questo significa che la sua parte scalare e quella simmetrica sono reali, mentre la parte antisimmetrica è immaginaria. Notiamo che la parte antisimmetrica è chiaramente nulla, se l'atomo si trova in uno stato non degenere; la funzione d'onda di tale stato è reale[2]), e quindi sono reali anche gli elementi di matrice diagonali.

Il tensore α_{ik} è connesso con la polarizzabilità dell'atomo in un campo elettrico esterno. Per stabilire questa connessione, calcoliamo la correzione al valore medio del momento di dipolo del sistema, se quest'ultimo è posto in un campo elettrico esterno

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}e^{-i\omega t} + \boldsymbol{E}^* e^{i\omega t}). \qquad (60,19)$$

---

[1]) Questo risultato è connesso al fatto che noi trascuriamo la larghezza naturale della riga, e quindi anche la possibilità di assorbimento della luce incidente; vedi § 64.

[2]) Ricordiamo che questo fatto è connesso con la simmetria rispetto al cambiamento di segno del tempo (si sottintende che non ci sia un campo magnetico esterno). Per la sostituzione t con $-t$ la funzione d'onda di uno stato stazionario ψ viene sostituita con ψ^*, cioè ψ e ψ^* descrivono ambedue degli stati possibili con la stessa energia. Da qui discende che, se il livello non è degenere, allora ψ e ψ^* devono coincidere (a meno di un inessenziale fattore di fase), e di conseguenza ψ può essere sempre definita come una funzione reale. Se invece il livello è degenere, allora per coniugazione complessa le funzioni d'onda, relative ad uno stesso livello, si trasformano tra loro, e quindi non sono obbligatoriamente reali.

Si può usare a questo scopo la nota formula della teoria delle perturbazioni (vedi III, § 40): se su un sistema agisce la perturbazione

$$V = Fe^{-i\omega t} + F^{+}e^{i\omega t},$$

allora la correzione del primo ordine agli elementi di matrice diagonali di una grandezza f è uguale a

$$f_{11}^{(1)}(t) = -\sum_n \left\{ \left[\frac{f_{1n}^{(0)} F_{n1}}{\omega_{n1} - \omega} + \frac{f_{n1}^{(0)} F_{1n}}{\omega_{n1} + \omega} \right] e^{-i\omega t} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{f_{1n}^{(0)} F_{1n}^{*}}{\omega_{n1} + \omega} + \frac{f_{n1}^{(0)} F_{n1}^{*}}{\omega_{n1} - \omega} \right] e^{i\omega t} \right\}.$$

Nel caso considerato

$$F = -\frac{1}{2} \mathbf{d} \boldsymbol{E},$$

e la correzione all'elemento di matrice diagonale del momento di dipolo risulta uguale a

$$\boldsymbol{d}_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{\boldsymbol{d}} e^{-i\omega t} + \bar{\boldsymbol{d}}^{*} e^{i\omega t}), \tag{60,20}$$

dove $\bar{\boldsymbol{d}}$ è un vettore di componenti

$$\bar{d}_i = \alpha_{ik} E_k. \tag{60,21}$$

Dall'ultima formula si vede che il tensore di diffusione Rayleigh coerente $\alpha_{ik}(\omega)$ rappresenta anche il *tensore di polarizzabilità* dell'atomo in un campo di frequenza ω. Per $\omega = 0$ la formula (60,21) diventa la formula III (76,4) con tensore di polarizzabilità statica $\alpha_{ik}(0)$, nella forma in cui esso è determinato nell'ordinaria teoria delle perturbazioni in un campo costante.

PROBLEMI[1])

1. Calcolare la probabilità di emissione simultanea di due fotoni da parte di un atomo (*M. Göppert-Mayer*, 1931)[2]).

---

[1]) Nei problemi sono usate le unità ordinarie.

[2]) La probabilità di emissione di due fotoni ω e ω' è di solito molto piccola rispetto alla probabilità di emissione di un solo fotone di frequenza $\omega + \omega'$. Un'eccezione è costituita dai casi in cui le regole di selezione vietano il secondo processo e permettono il primo. Tali sono, ad esempio, le transizioni tra due stati di $J = 0$, per i quali qualsiasi processo di emissione di un solo fotone è vietato rigorosamente. Un altro esempio è costituito dalla transizione dal primo stato eccitato dell'atomo di idrogeno ($2s_{1/2}$) allo stato fondamentale ($1s_{1/2}$). Per la radiazione $E1$ questa transizione è rigorosamente vietata dalla regola di selezione relativa alla parità. Essa è vietata (se si trascura l'interazione spin-orbita molto debole) anche per la radiazione $M1$; il momento magnetico, in questo caso ($l = 0$), è una quantità puramente spinoriale, e il suo elemento di matrice si annulla in virtù della mutua ortogonalità delle funzioni orbitali di numero quantico principale differente. La vita media del livello $2s_{1/2}$, relativa all'emissione di due fotoni, è $\approx 1/7$ s.

Soluzione. L'emissione di due fotoni è, come anche la diffusione, un processo del secondo ordine nella teoria delle perturbazioni. La probabilità cercata differisce dalla (60,5) soltanto per 1) la sostituzione $\omega \to -\omega$, $e \to e^*$ (emissione di un fotone ω al posto del suo assorbimento), 2) il fattore addizionale

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{\omega^2\, d\omega\, do}{(2\pi)^3}.$$

In tal modo, la probabilità di radiazione (nell'unità di tempo) è

$$dw = \left| \sum_n \left[\frac{(d_{2n}e'^*)(d_{n1}e^*)}{\omega_{1n} - \omega} + \frac{(d_{2n}e^*)(d_{n1}e'^*)}{\omega_{1n} - \omega'} \right] \right|^2 \times$$

$$\times \frac{\omega^3\omega'^3}{(2\pi)^3 c^6 \hbar^2}\, do\, do'\, d\omega \tag{1}$$

($\omega + \omega' = \omega_{12}$). Sommando questa espressione sulle polarizzazioni dei fotoni e integrando sulle direzioni di uscita, otteniamo

$$dw = \frac{8}{9\pi} \left| \sum_n \left[\frac{(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}}{\omega_{1n} - \omega} + \frac{(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}}{\omega_{1n} - \omega'} \right] \right|^2 \frac{\omega^3\omega'^3}{\hbar^2 c^6}\, d\omega.$$

2. Calcolare la sezione d'urto di « diffusione forzata »: il fotone incidente $\boldsymbol{k}$ rimane invariato, ma sotto la sua azione l'atomo emette due fotoni, un fotone dello stesso tipo $\boldsymbol{k}$ e un fotone « diffuso » $\boldsymbol{k}'$.

Soluzione. La probabilità del processo considerato differisce dalla probabilità (1), trovata nel problema 1 per l'emissione simultanea di due quanti, per il fattore N_{ke}, dove N_{ke} è il numero di fotoni della luce incidente di dati $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}$. La densità del flusso di fotoni incidenti è uguale a

$$dI = cN_{ke} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = N_{ke} \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2}\, d\omega\, do.$$

Esprimendo il fattore N_{ke} mediante dI e dividendo per dI la probabilità del processo, otteniamo la sezione d'urto

$$d\sigma = \left| \sum_n \left[\frac{(d_{2n}e'^*)(d_{n1}e^*)}{\omega_{1n} - \omega} + \frac{(d_{2n}e^*)(d_{n1}e'^*)}{\omega_{1n} - \omega'} \right] \right|^2 \frac{\omega\omega'^3}{\hbar^2 c^4}\, do'.$$

Qui ω è la frequenza dei fotoni incidente e « forzato », ω' è la frequenza del fotone diffuso ($\omega + \omega' = \omega_{12}$).

3. Calcolare la probabilità di diffusione elastica di un elettrone (non relativistico) da parte di un'onda luminosa stazionaria quasi-monocromatica (*P. L. Kapitsa, P. A. M. Dirac*, 1933).

Soluzione. Un'onda stazionaria può essere considerata come composta da un insieme di fotoni di impulso $\boldsymbol{k}$ e $-\boldsymbol{k}$ (e di identiche polarizzazioni). La diffusione di un elettrone può essere considerata come l'assorbimento di un fotone $\boldsymbol{k}$ e l'emissione forzata di un fotone $-\boldsymbol{k}$; per effetto di questi due processi l'impulso dell'elettrone $\boldsymbol{p}$ riceve l'incremento $2\hbar\boldsymbol{k}$, ruotando (senza variazione del modulo) di un angolo θ: $|\boldsymbol{p}|$ sen $(\theta/2) = \hbar\omega/c$. La probabilità di questo processo si può ricavare dalla sezione d'urto di diffusione Thomson (60,15)

$$d\sigma = r_e^2\, |\boldsymbol{e}'^*\boldsymbol{e}|^2\, do' = r_e^2\, do'$$

moltiplicando quest'ultima per la densità del flusso di fotoni di impulso $\boldsymbol{k}$ e per il numero di fotoni di impulso $-\boldsymbol{k}$.

La densità del flusso di fotoni di frequenza compresa nell'intervallo $d\omega$ è uguale a

$$\frac{cU_\omega\, d\omega}{2\hbar\omega},$$

dove $U_\omega\, d\omega$ è la densità di energia nell'onda stazionaria nell'intervallo spettrale $d\omega$ (il fattore 1/2 tiene conto del fatto che l'energia dell'onda è divisa esattamente tra fotoni di direzioni opposte). Gli impulsi $\boldsymbol{k}$ di tutti i fotoni, che formano l'onda stazionaria, sono paralleli ad una determinata direzione $\boldsymbol{n}$ (« direzione » dell'onda stazionaria). In altre parole, la densità di energia, come funzione della frequenza e della direzione $\boldsymbol{n}'$ dei fotoni, è uguale a $U_{\omega n'} = U_\omega \delta^{(2)}(\boldsymbol{n}' - \boldsymbol{n})$. In relazione a ciò il numero di fotoni $-\boldsymbol{k}$ è uguale a

$$\int N_{-k}\, do' = \frac{8\pi^3 c^3}{\hbar\omega^3}\,\frac{U_\omega}{2}$$

(cfr. (44,8)). Per la probabilità di diffusione di un elettrone (in 1 s) otteniamo il risultato

$$w = \frac{2\pi^3 e^4}{m^2\hbar^2\omega^4}\int U_\omega^2\, d\omega.$$

Il fattore ω^{-4} è stato portato fuori dal segno di integrale, poiché il grado di non monocromaticità $\Delta\omega$ è supposto piccolo. Il valore dell'integrale è inversamente proporzionale a $\Delta\omega$ (per una data intensità totale).

§ 61. *Diffusione da parte di sistemi liberamente orientabili*

Se il livello energetico dell'atomo non è degenere, allora la polarizzabilità e l'intensità della diffusione coerente sono ambedue determinate dallo stesso tensore $\alpha_{ik} \equiv (c_{ik})_{11}$. Se, invece, il livello è degenere, allora i valori osservati delle grandezze citate si ottengono mediando su tutti gli stati relativi al dato livello. La polarizzabilità deve essere determinata come il valore medio[1])

$$\alpha_{ik} = \overline{(c_{ik})_{11}}.$$

L'intensità osservabile della diffusione invece è determinata dai valori dei prodotti

$$\overline{(c_{ik})_{11}\,(c_{lm})_{11}}.$$

Di conseguenza la connessione tra polarizzabilità e diffusione diventa meno diretta.

Per atomi o molecole liberi (che non si trovano in un campo esterno) la degenerazione dei livelli è connessa solitamente con il momento angolare liberamente orientabile nello spazio. Si supponga che lo stato iniziale nella diffusione abbia il momento angolare J_1, e lo

---

[1]) Sebbene ciascuna delle quantità $(c_{ik})_{11}$ possa essere complessa, il loro valore medio (per sistemi che non si trovano in un campo magnetico esterno) è reale. In effetti, nell'eseguire la media l'insieme delle funzioni d'onda indipendenti (relative ad un dato livello degenere) si può scegliere arbitrariamente, e quindi si può sempre fare in modo che tutte le funzioni siano reali.

stato finale il momento J_2. Come al solito, la sezione d'urto di diffusione deve essere mediata su tutti i valori della proiezione M_1 e sommata sui valori di M_2. Dopo la prima operazione, la sezione non dipende piú da M_2, e quindi la successiva somma si riduce alla moltiplicazione per $(2J_2 + 1)$. In tal modo, per la sezione d'urto di diffusione media otteniamo

$$d\bar{\sigma} = \omega\omega'^3 c^{(21)}_{iklm} e'^*_i e_k e'_l e^*_m \, do', \tag{61,1}$$

dove

$$c^{(21)}_{iklm} = \frac{1}{2J_1+1} \sum_{M_1 M_2} (c_{ik})_{21} (c_{lm})^*_{21} = (2J_2+1) \overline{(c_{ik})_{21} (c_{lm})^*_{21}}^{1}, \tag{61,2}$$

e la soprallineatura con l'indice 1 significa la media su M_1.

Per la diffusione Rayleigh gli stati *1* e *2* sono relativi ad uno stesso livello energetico ($\omega_{12} = 0$). Se si tratta solo di diffusione coerente, allora gli stati *1* e *2* devono coincidere completamente, deve cioè essere $M_1 = M_2$. La sommatoria su M_2, e con essa anche il fattore $2J_2 + 1$, spariscono dalla formula (61,2):

$$c^{\text{coer}}_{iklm} = \overline{(c_{ik})_{11} (c_{lm})^*_{11}}^{1}. \tag{61,3}$$

Il risultato di questa media può essere scritto senza calcoli particolari, se si tiene presente che la media su M_1 è equivalente alla media su tutte le orientazioni del sistema, e quindi il valore medio può esprimersi solo mediante il tensore unità δ_{ik}. Diversi da zero possono risultare solo i valori medi dei prodotti di componenti della parte scalare, simmetrica e antisimmetrica separatamente; è chiaro che mediante il tensore unità non si possono comporre espressioni, che possano, per le loro proprietà di simmetria, corrispondere ai prodotti incrociati. In tal modo, otteniamo

$$c^{(21)}_{iklm} = G^0_{21} \delta_{ik} \delta_{lm} + c^{(21)s}_{iklm} + c^{(21)a}_{iklm}, \tag{61,4}$$

dove

$$\begin{aligned} G^0_{21} &= (2J_2+1) \overline{|(c^0)_{21}|^2}^{1}, \\ c^{(21)s}_{iklm} &= (2J_2+1) \overline{(c^s_{ik})_{21} (c^s_{lm})^*_{21}}^{1}, \\ c^{(21)a}_{iklm} &= (2J_2+1) \overline{(c^a_{ik})_{21} (c^a_{lm})^*_{21}}^{1}. \end{aligned} \tag{61,5}$$

In altre parole, la sezione d'urto (e con essa l'intensità) di diffusione da parte di un sistema liberamente orientabile si scinde nella somma di tre parti indipendenti, che noi chiameremo *diffusione scalare*, *simmetrica* e *antisimmetrica*.

Ognuno dei tre termini nella (61,4) si esprime mediante una sola quantità indipendente. La diffusione scalare si esprime mediante la

quantità G^0_{21}, e per la diffusione simmetrica e antisimmetrica abbiamo

$$\begin{aligned} c^{(21)s}_{iklm} &= \frac{1}{10} G^s_{21} \left(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{lm}\right), \\ G^s_{21} &= (2J_2+1)\overline{(c^s_{ik})_{21}(c^s_{ik})_{21}}^{\,1}; \\ c^{(21)a}_{iklm} &= \frac{1}{6} G^a_{21} (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}), \\ G^a_{21} &= (2J_2+1)\overline{(c^a_{ik})_{21}(c^a_{ik})_{21}}^{\,1} \end{aligned} \tag{61,6}$$

(la combinazione dei tensori unità si forma secondo le proprietà di simmetria, e quindi il coefficiente generale si trova contraendo sulle coppie di indici *il* e *km*).

Sostituendo le formule (61,4-6) nella (61,1) si trova la seguente espressione per la sezione d'urto di diffusione:

$$d\bar{\sigma} = \omega\omega'^3 \left\{ G^0_{21} |e'^* e|^2 + \frac{1}{10} G^s_{21} \left(1 + |e'e|^2 - \frac{2}{3}|e'^* e|^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6} G^a_{21} (1 - |e'e|^2) \right\} do'. \tag{61,7}$$

Questa formula determina in forma esplicita le dipendenze angolari e le proprietà di polarizzazione della diffusione.

La sezione d'urto di diffusione totale rispetto a tutte le direzioni, sommata sulle polarizzazioni del fotone finale e mediata sulle polarizzazioni e sulle direzioni di incidenza del fotone iniziale, si ricava con facilità direttamente dalla (61,1). A questo scopo notiamo che

$$\overline{e^*_i e_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik},$$

sia che la media venga eseguita sulle polarizzazioni che sulle direzioni di propagazione del fotone (invece la somma su queste quantità darebbe corrispondentemente un risultato di $2 \cdot 4\pi$ volte maggiore). Otteniamo cosí

$$\bar{\sigma} = \frac{8\pi}{9}\omega\omega'^3 c^{(21)}_{ikik} = \frac{8\pi}{9}\omega\omega'^3 (3G^0_{21} + G^s_{21} + G^a_{21}). \tag{61,8}$$

Abbiamo già detto prima che le regole di selezione per la diffusione coincidono con le regole di selezione per gli elementi di matrice di un qualsiasi tensore di rango 2. Dal momento che l'intensità di diffusione si scompone in tre parti indipendenti, è opportuno formulare queste regole per ciascuna di queste parti separatamente.

Le regole di selezione per la diffusione simmetrica coincidono con le regole di selezione per la radiazione di quadrupolo elettrico, poiché quest'ultima è anch'essa determinata da un tensore simmetrico irriducibile (il tensore dei momenti di quadrupolo). Per la diffusione antisimmetrica le regole di selezione coincidono con quelle per la

radiazione di dipolo magnetico, poiché ambedue i processi sono determinati da un vettore assiale; ricordiamo che un tensore antisimmetrico è equivalente (duale) ad un vettore assiale[1]). Esiste, tuttavia, una differenza che consiste nel fatto che gli elementi di matrice diagonali, i quali nel caso radiativo danno i valori medi dei momenti elettrici e magnetici (e non corrispondono a transizioni radiative), nel caso della diffusione sono essenziali: essi sono relativi alla diffusione coerente.

Per la diffusione scalare le regole di selezione coincidono con le regole analoghe per gli elementi di matrice di qualsiasi grandezza scalare. Questo significa che sono possibili transizioni solo tra stati di uguale simmetria. In particolare, devono essere uguali i valori del momento angolare totale J e la sua proiezione M (gli elementi di matrice diagonali in M non dipendono dal numero M; vedi III (29,3)). Per la diffusione Rayleigh, quindi, gli stati *1* e *2* devono coincidere completamente (non solo nell'energia, ma anche nel numero M), e di conseguenza la diffusione Rayleigh scalare è completamente coerente. Inversamente, poiché nella diffusione scalare tutti gli stati in ogni caso si combinano tra loro, nella diffusione coerente c'è sempre una parte scalare.

Analogamente alla media, eseguita prima, della sezione d'urto di diffusione, per un sistema liberamente orientabile nello spazio deve essere effettuata la media sulle direzioni del momento angolare J_1 anche del tensore di polarizzabilità. Questa operazione è molto semplice: è evidente che

$$\alpha_{ik} \equiv \overline{(c_{ik})_{11}}^{1} = \overline{(c^0)_{11}}^{1}\, \delta_{ik}.$$

Le parti simmetrica e antisimmetrica del tensore di diffusione nella media vengono a mancare: δ_{ik} è il solo tensore isotropo di rango 2.

Prima abbiamo notato che gli elementi di matrice diagonali di uno scalare non dipendono dal numero M_1. Perciò il segno di media sopra $(c^0)_{11}$ si può omettere (e calcolare questo elemento per un qualsiasi valore di M_1), e quindi per la polarizzabilità troviamo

$$\alpha_{ik} = (c^0)_{11}\, \delta_{ik}. \tag{61,9}$$

Per la stessa ragione il segno di media si può omettere anche nella quantità G^0_{11}, che determina la parte scalare della diffusione coerente:

$$G^0_{11} = \overline{|(c^0)_{11}|^2}^{1} = (c^0)^2_{11} \tag{61,10}$$

[1]) Si parla qui, ovviamente, di quelle regole di selezione, che sono connesse ad una simmetria, e non alla forma concreta del vettore assiale nel caso di radiazione; il vettore momento magnetico contiene una parte di spin, mentre nel caso della diffusione si parla di elementi di matrice di grandezze di natura puramente orbitale.

(il fattore $2J_2 + 1$ è stato omesso in corrispondenza con la (61,3)). In tal modo, si stabilisce una semplice connessione tra la polarizzabilità media e la parte scalare della diffusione coerente. Ambedue queste grandezze sono determinate dalla quantità

$$(c^0)_{11} = \frac{2}{3} \sum_n \frac{\omega_{n1}}{\omega_{n1}^2 - \omega^2} \, |\boldsymbol{d}_{n1}|^2. \tag{61,11}$$

PROBLEMI

1. Trovare la distribuzione angolare e il grado di depolarizzazione nella diffusione di luce polarizzata linearmente.

Soluzione. Sia θ l'angolo tra la direzione di diffusione $\boldsymbol{n}'$ e la direzione di polarizzazione $\boldsymbol{e}$ della luce incidente. La luce diffusa contiene due componenti indipendenti, polarizzate nel piano $\boldsymbol{n}'$ $\boldsymbol{e}$ (intensità I_1) e nel piano perpendicolare (intensità I_2); il grado di depolarizzazione è dato dal rapporto I_2/I_1. Le intensità I_1 e I_2 si determinano secondo la formula (61,7) con il vettore $\boldsymbol{e}'$ diretto opportunamente.

Per la diffusione scalare la luce rimane completamente polarizzata nello stesso piano ($I_2 = 0$), e la distribuzione angolare dell'intensità è

$$I = \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2\theta.$$

(Qui e nel seguito le espressioni per $I = I_1 + I_2$ sono normalizzate in modo da ottenere l'unità mediando sulle direzioni). Per la diffusione simmetrica abbiamo

$$I = \frac{3}{20}(6 + \operatorname{sen}^2\theta), \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{3 + \operatorname{sen}^2\theta}.$$

Per la diffusione antisimmetrica troviamo

$$I = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\theta), \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

2. Determinare le stesse quantità per la diffusione di luce naturale.

Soluzione. Il passaggio nella formula (61,7) a luce incidente naturale (non polarizzata) si realizza con la sostituzione

$$e_i e_k^* \to \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k),$$

cioè si esegue la media sulle direzioni di polarizzazione $\boldsymbol{e}$ per una data direzione di incidenza. La luce diffusa sarà parzialmente polarizzata, e da considerazioni di simmetria è evidente che le due componenti indipendenti saranno polarizzate linearmente nel piano di diffusione $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ (intensità $I_{\parallel}$) e nel piano perpendicolare (intensità $I_{\perp}$). Indichiamo l'angolo di diffusione (l'angolo tra $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{n}'$) con ϑ.

Per la diffusione scalare abbiamo

$$I = I_{\perp} + I_{\parallel} = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\vartheta), \quad \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = \cos^2\vartheta.$$

Per la diffusione simmetrica

$$I = \frac{3}{40}(13 + \cos^2\vartheta), \quad \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = \frac{6 + \cos^2\vartheta}{7},$$

e per la diffusione antisimmetrica

$$I = \frac{3}{8}(2 + \operatorname{sen}^2\vartheta), \quad \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = 1 + \operatorname{sen}^2\vartheta.$$

3. Per la diffusione di luce polarizzata circolarmente determinare i coefficienti di inversione (cioè il rapporto tra l'intensità della componente polarizzata circolarmente nel senso « inverso » e l'intensità della componente polarizzata nello stesso senso, che chiameremo « regolare »).

Soluzione. Nel caso di luce incidente polarizzata circolarmente la distribuzione angolare e il grado di depolarizzazione (il rapporto $I_{\parallel}/I_{\perp}$) sono gli stessi che per la diffusione di luce naturale.

Siano $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0)$ le componenti del vettore e della luce incidente (nel sistema di coordinate con il piano xz coincidente con il piano di diffusione e l'asse z diretto secondo n). Allora per le componenti polarizzate circolarmente « inversa » e « regolare » della luce diffusa, i vettori di polarizzazione sono determinati dalle relazioni

$$e' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta,\ -i,\ -\operatorname{sen}\vartheta) \quad \text{e} \quad e' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta,\ i,\ -\operatorname{sen}\vartheta).$$

Calcolando l'intensità mediante la (61,7) troviamo i coefficienti di inversione P per i tre tipi di diffusione

$$P^0 = \operatorname{tg}^4\frac{\vartheta}{2}, \quad P^s = \frac{13+\cos^2\vartheta+10\cos\vartheta}{13+\cos^2\vartheta-10\cos\vartheta}, \quad P^a = \frac{1-\cos^4\frac{\vartheta}{2}}{1-\operatorname{sen}^4\frac{\vartheta}{2}}$$

(ϑ è l'angolo di diffusione).

4. Calcolare la sezione d'urto di diffusione elastica di raggi γ da parte del deutone (*H. A. Bethe, R. Peierls*, 1935).

Soluzione. Le funzioni d'onda dello stato fondamentale del deutone e dei suoi stati dello spettro continuo (deutone disintegrato) sono

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\, e^{-\varkappa r}, \quad \psi_p = e^{ipr}, \quad \varkappa = \sqrt{MI},$$

vedi (58,2-3). Il momento di dipolo è $d = er/2$ (solo il protone, il cui raggio vettore è $r/2$, ha carica elettrica). Per l'elemento di matrice troviamo

$$d_{p0} = \int \psi_p^* \, d\psi_0 \, d^3x = e\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\,\frac{\partial}{i\partial p}\times$$

$$\times \int \frac{d^3x}{r}\, e^{-\varkappa r + ipr} = 8\pi i e\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\,\frac{p}{(\varkappa^2+p^2)^2}$$

(l'integrale si calcola mediante la formula (57,6a)).

Per il tensore di polarizzabilità otteniamo

$$\alpha_{ik} = \int \frac{2\omega_{p0}}{\omega_{p0}^2-\omega^2}\,(d_i)_{0p}\,(d_k)_{p0}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} -$$

$$-\frac{e^2}{2M\omega^2}\,\delta_{ik} = \left\{\frac{2}{3}\int \frac{\omega_{p0}}{\omega_{p0}^2-\omega^2}\,|d_{0p}|^2\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} - \frac{e^2}{2M\omega^2}\right\}\delta_{ik}.$$

Il primo termine è connesso con l'eccitazione virtuale dei gradi di libertà intrinseci del deutone; esso è scritto nella forma (61,11), dove le frequenze sono $\omega_{p0} = (p^2+\varkappa^2)/M$. Il secondo termine è connesso con l'azione del campo dell'onda sul moto di traslazione d'insieme del deutone. Poiché questo moto è quasi-

classico, la corrispondente parte del tensore di diffusione è data semplicemente dalla formula (60,14) (con la massa del deutone $2M$ al posto di m).

Il calcolo di α_{ik} si riduce al calcolo dell'integrale

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^4\,dz}{(z^2+1)^3\,[(z^2+1)^2-\gamma^2]},\quad z=\frac{p}{\varkappa},\quad \gamma=\frac{M\omega}{\varkappa^2}=\frac{\omega}{I}.$$

Abbiamo

$$J=\frac{1}{8}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{dJ_0}{d\lambda}\right)\Big|_{\lambda=1},$$

$$J_0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^4\,dz}{(z^2+\lambda^2)\,[(z^2+1)^2-\gamma^2]}.$$

Per $\gamma<1$ l'espressione integranda ha, nel semipiano superiore della variabile complessa z, dei poli nei punti $i\lambda$, $i\sqrt{1+\gamma}$, $i\sqrt{1-\gamma}$; l'integrale J_0 si calcola determinando i residui in questi punti singolari. A conti fatti otteniamo

$$J=\pi\left\{\frac{(1+\gamma)^{3/2}}{2\gamma^4}+\frac{(1-\gamma)^{3/2}}{2\gamma^4}-\left(\frac{3}{8\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^4}\right)\right\}.$$

La sezione d'urto di diffusione totale si esprime mediante α_{ik} secondo la 61,8) ed è uguale (in unità ordinarie) a

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\left|-1-\frac{4}{3\gamma^2}+\frac{2}{3\gamma^2}\,[(1+\gamma)^{3/2}+(1-\gamma)^{3/2}]\right|^2\quad\text{per}\quad\gamma=\frac{\hbar\omega}{I}<1.$$

L'ampiezza di diffusione per $\gamma>1$ (sopra la soglia di dissociazione del deutone) si ricava dall'ampiezza per $\gamma<1$ mediante prolungamento analitico; per essa compare anche una parte immaginaria, che deve essere positiva,

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\left|-1-\frac{4}{3\gamma^2}+\frac{2}{3\gamma^2}\,(\gamma+1)^{3/2}+\right.$$
$$\left.+\,i\,\frac{2}{3\gamma^2}\,(\gamma-1)^{3/2}\right|^2\quad\text{per}\quad\gamma>1.$$

Per $\gamma\gg1$ si ottiene $\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2$, che corrisponde, come era naturale attendersi, alla diffusione (non relativistica) su un protone libero.

Per la distribuzione angolare della radiazione troviamo

$$d\sigma=\sigma\,\frac{3}{4}\,(1+\cos^2\theta)\,\frac{do}{4\pi},$$

dove θ è l'angolo di diffusione. Determinando l'ampiezza di diffusione in modo tale che $d\sigma=|f|^2\,do$, avremo

$$\operatorname{Im} f(0)=\frac{2e^2}{3Mc^2}\,\frac{(\gamma-1)^{3/2}}{\gamma^2}\quad\text{per}\quad\gamma>1.$$

Secondo il teorema ottico questa quantità deve coincidere con $\omega\sigma_{tot}/4\pi$, dove σ_{tot} è la sezione d'urto totale di diffusione anelastica (fotodissociazione) ed elastica. Nel caso considerato, però, la sezione d'urto di diffusione elastica è di ordine piú elevato ($\sim e^4$) della sezione d'urto di dissociazione ($\sim e^2$, vedi la (58,4)), e quindi $\operatorname{Im} f(0)\approx\omega\sigma_{diss}/4\pi$. Per questa stessa ragione nell'approssimazione considerata l'ampiezza di diffusione per $\gamma<1$ (cioè sotto la soglia di dissociazione) risulta reale.

§ 62. *Diffusione su molecole*

La peculiarità della diffusione molecolare è connessa con quelle proprietà che sono alla base della teoria dei loro spettri, e cioè con la possibilità di esaminare separatamente lo stato elettronico, considerando nuclei « fissi », e il moto dei nuclei nel campo efficace degli elettroni.

Supponiamo che la frequenza della luce incidente ω sia minore dell'energia ω_e della prima eccitazione elettronica. Allora nella diffusione i termini elettronici non possono eccitarsi. La diffusione sarà del tipo Rayleigh o del tipo Raman in relazione all'eccitazione dei livelli rotazionali e vibrazionali.

Supponiamo inoltre che il termine elettronico fondamentale non sia degenere (e non abbia una struttura fine). In altre parole, si suppone che siano uguali a zero lo spin totale degli elettroni e la proiezione del loro momento angolare orbitale totale sull'asse della molecola (per molecole del tipo « trottola simmetrica »). Questo significa che per molecole biatomiche il termine elettronico fondamentale deve essere $^1\Sigma$. Come è noto, queste condizioni sono soddisfatte per gli stati fondamentali della maggioranza delle molecole[1]).

Infine, supporremo che la frequenza ω sia grande rispetto agli intervalli della struttura nucleare (rotazionale e vibrazionale) del termine elettronico fondamentale, e che la differenza $\omega_e - \omega$ si trovi nello stesso rapporto rispetto alla struttura nucleare del termine elettronico eccitato. In altre parole, la frequenza della luce incidente deve essere sufficientemente lontana da risonanze. Queste condizioni permettono, nel calcolo del tensore di diffusione, di fare astrazione, in un primo momento, dal moto dei nuclei, e di considerare il problema per una data configurazione nucleare.

Nel problema cosí impostato il tensore di diffusione coincide col tensore di polarizzabilità $\alpha_{ik} \equiv (c_{ik})_{11}$ e si calcola, in linea di principio, secondo la formula generale (60,17), nella quale la somma viene effettuata su tutti i termini elettronici eccitati. Le quantità α_{ik} trovate in questo modo saranno funzioni delle coordinate della configurazione nucleare (dalle quali dipendono, come da parametri, le energie e le funzioni d'onda dei termini elettronici). Essendo lo stato non degenere, il tensore $\alpha_{ik}(q)$ sarà reale, e quindi simmetrico.

Il tensore $\alpha_{ik}(q)$ dà la polarizzabilità elettronica di una data configurazione nucleare della molecola. Per la soluzione del problema

---

[1]) I risultati esposti nel seguito possono, tuttavia, essere validi (con un determinato grado di precisione) anche nei casi in cui la degenerazione del termine elettronico fondamentale è connessa con uno spin non nullo, e l'interazione spin-orbita è debole (talché si può trascurare la struttura fina da essa generata). In questa approssimazione gli stati con differenti orientazioni dello spin non si combinano e in questo senso si comportano come stati non degeneri. Tale è, ad esempio, il caso della molecola O_2 il cui termine fondamentale è $^3\Sigma$.

reale della diffusione occorre tenere ancora conto del moto dei nuclei negli stati iniziale e finale. Siano $\psi_{s_1}(q)$ e $\psi_{s_2}(q)$ le funzioni d'onda nucleari di questi stati (dove s_1 e s_2 sono insiemi di numeri quantici rotazionali e vibrazionali). Il tensore cercato è dato dall'elemento di matrice del tensore $\alpha_{ik}(q)$, calcolato rispetto a queste funzioni d'onda:

$$\langle s_2 | \alpha_{ik} | s_1 \rangle = \int \psi^*_{s_2}(q)\, \alpha_{ik}(q)\, \psi_{s_1}(q)\, dq. \tag{62,1}$$

Dal carattere simmetrico del tensore $\alpha_{ik}(q)$ segue il carattere simmetrico (sia per s_1, s_2 uguali che per s_1, s_2 differenti) del tensore (62,1). In tal modo, siamo arrivati alla conclusione che, con le condizioni citate, la parte antisimmetrica mancherà sia nella diffusione Rayleigh che nella diffusione Raman. La diffusione conterrà solo una parte scalare e una simmetrica.

La parte scalare della polarizzabilità $\alpha^0(q)$ non dipende dall'orientazione della molecola, ma dipende soltanto dalla disposizione interna degli atomi. Indichiamo con v l'insieme dei numeri quantici vibrazionali della molecola, e con r l'insieme dei numeri rotazionali, ad eccezione del numero magnetico m. Allora gli elementi di matrice assumono la forma

$$\langle v_2 r_2 m_2 | \alpha^0 | v_1 r_1 m_1 \rangle = \langle v_2 | \alpha^0 | v_1 \rangle\, \delta_{r_1 r_2} \delta_{m_1 m_2}. \tag{62,2}$$

Il fatto che gli elementi di matrice siano diagonali in r, m è una proprietà comune di ogni scalare. La peculiarità della (62,2) consiste nel fatto che questi elementi, nel nostro caso, non dipendono dai suddetti numeri. Quindi, la diffusione scalare ha luogo solo per transizioni puramente vibrazionali e non dipende dallo stato rotazionale.

La diffusione simmetrica è determinata dagli elementi di matrice del tensore α^s_{ik}. Le sue componenti rispetto al sistema di coordinate fisso xyz si esprimono mediante le componenti $\bar{\alpha}^s_{i'k'}$ nel sistema $\xi\eta\zeta$ solidale con la molecola, secondo la formula

$$\alpha^s_{ik} = \sum_{i'k'} \bar{\alpha}^s_{i'k'} D_{i'i} D_{k'k}, \tag{62,3}$$

dove $D_{i'i}$ sono i coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi. Le quantità $\bar{\alpha}^s_{i'k'}$ non dipendono dall'orientazione della molecola, e $D_{i'i}$ non dipende dalle coordinate interne di essa. Perciò abbiamo

$$\langle v_2 r_2 m_2 | \alpha^s_{ik} | v_1 r_1 m_1 \rangle = \sum_{i'k'} \langle v_2 | \bar{\alpha}^s_{i'k'} | v_1 \rangle \times$$
$$\times \langle r_2 m_2 | D_{i'i} | r_1 m_1 \rangle \langle r_2 m_2 | D_{k'k} | r_1 m_1 \rangle.$$

La somma dei quadrati dei moduli di queste quantità, rispetto a $r_2 m_2$ è uguale, come è facile convincersi, a[1])

$$\sum_{m_2 r_2} \sum_{ik} |\langle v_2 r_2 m_2 | \alpha^s_{ik} | v_1 r_1 m_1 \rangle|^2 = \sum_{i'k'} |\langle v_2 | \bar{\alpha}^s_{i'k'} | v_1 \rangle|^2. \qquad (62,4)$$

Questo significa che l'intensità totale di diffusione, con transizioni da un dato livello vibro-rotazionale $v_1 r_1$ a tutti i livelli rotazionali dello stato vibrazionale v_2 non dipende da r_1.

Per molecole tipo trottola simmetrica si può andare oltre e stabilire la dipendenza dell'intensità di diffusione dai numeri quantici rotazionali per ciascuna transizione $v_1 r_1 \to v_2 r_2$. Numeri quantici r sono, in questo caso, il momento angolare J e la sua proiezione k sull'asse della molecola. Introduciamo, al posto delle componenti cartesiane α^s_{ik}, il corrispondente tensore sferico di rango 2, di cui indichiamo le componenti con $\alpha_\lambda (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2)$. Secondo la III (110,7) i quadrati dei moduli dei suoi elementi di matrice sono

$$|\langle v_2 J_2 k_2 m_2 | \alpha_\lambda | v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 = (2J_1 + 1)(2J_2 + 1) \begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2 \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -m_2 & \lambda & m_1 \end{pmatrix}^2 |\langle v_2 | \bar{\alpha}_{\lambda'} | v_1 \rangle|^2,$$

dove $\bar{\alpha}_{\lambda'}(q)$ è il tensore sferico di polarizzabilità, relativo agli assi solidali con la molecola, $\lambda' = k_2 - k_1$. Sommando su m_2 e $\lambda = m_2 - m_1$ (per un dato m), otteniamo (cfr. con la III (110,8))

$$\sum_{m_2 \lambda} |\langle v_2 J_2 k_2 m_2 | \alpha_\lambda | v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 =$$
$$= (2J_2 + 1) \begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2 |\langle v_2 | \bar{\alpha}_{\lambda'} | v_1 \rangle|^2. \qquad (62,5)$$

Questa quantità determina l'intensità di diffusione accompagnata dalla transizione roto-vibrazionale $v_1 J_1 k_1 \to v_2 J_2 k_2$. Poiché gli elementi di matrice $\langle v_2 | \bar{\alpha}_{\lambda'} | v_1 \rangle$ non dipendono affatto dalla rotazione della molecola, resta di conseguenza determinata la dipendenza dell'intensità sia dai numeri J_1, J_2, che dai numeri k_1, k_2. Notiamo, che nel membro destro della (62,5) compare in tutto una sola componente sferica del tensore di polarizzabilità.

---

[1]) Per la trasformazione della somma si ricorre all'uguaglianza

$$\sum_i \sum_{r_2 m_2} \langle r_1 m_1 | D_{ii'} | r_2 m_2 \rangle \langle r_2 m_2 | D_{ik'} | r_1 m_1 \rangle =$$
$$= \langle r_1 m_1 | \sum_i D_{ii'} D_{ik'} | r_1 m_1 \rangle = \langle r_1 m_1 | \delta_{i'k'} | r_1 m_1 \rangle = \delta_{i'k'}.$$

Sommando l'uguaglianza (62,5) su J_2 e k_2, otteniamo[1]

$$\sum_{\lambda} \sum_{J_2 k_2 m_2} |\langle v_2 J_2 k_2 m_2 | \alpha_\lambda | v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 = \sum_{\lambda'} |\langle v_2 | \bar{\alpha}_{\lambda'} | v_1 \rangle|^2,$$

ritorniamo cioè alla regola di somma (62,4).

Un caso particolare di trottola simmetrica rappresenta il rotatore, che in questo caso è una molecola lineare (in particolare, biatomica). La proiezione del momento angolare sull'asse di questa molecola è nulla (in uno stato elettronico non degenere di momento angolare orbitale elettronico nullo)[2]. In questo caso occorre quindi porre nella (62,5) $k_1 = k_2 = 0$.

Consideriamo infine il problema delle regole di selezione per la diffusione vibrazionale Raman contemporaneamente al problema analogo per gli spettri vibrazionali di emissione (o di assorbimento) della molecola[3].

Per la diffusione il problema si riconduce alla determinazione delle condizioni, per le quali sono diversi da zero gli elementi di matrice del tensore $\alpha_{ik}(q)$ rispetto alle funzioni d'onda vibrazionali $\psi_v(q)$; in questo procedimento è necessario considerare separatamente lo scalare α^0 (per la diffusione scalare) e il tensore simmetrico irriducibile α^s_{ik} (per la diffusione simmetrica). Nella radiazione il ruolo analogo è svolto dagli elementi di matrice del vettore $\mathbf{d}(q)$, che è il momento di dipolo della molecola, mediato rispetto ad uno stato elettronico per una data posizione dei nuclei (per le molecole biatomiche questo è stato già fatto nel § 54).

Le oscillazioni di molecole poliatomiche vengono classificate secondo i tipi di simmetria, cioè secondo le rappresentazioni irriducibili del gruppo puntiforme corrispondente D_a, dove a è il numero della rappresentazione (vedi III, § 100). Secondo queste rappresentazioni si determina anche la simmetria delle funzioni d'onda degli stati vibrazionali della molecola (vedi III, § 101). La simmetria delle funzioni d'onda del primo stato vibrazionale (numero quantico $v_a = 1$) coincide con la simmetria D_a del tipo di oscillazione. La simmetria degli stati piú elevati, invece, ($v_a > 1$) è data dalla rappresentazione $[D_a^{v_a}]$, cioè dal prodotto simmetrico della rappre-

---

[1]) Sommando su J_2 per k_1 e λ' fissati (e quindi anche per $k_2 = k_1 + \lambda'$), abbiamo

$$\sum_{J_2} (2J_2+1) \begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2 = 1$$

(in virtú della III (106,13)). Dopo questa operazione viene fatta la somma su k_2 (oppure, ciò che è lo stesso, su $\lambda' = k_2 - k_1$) per un dato k_1.

[2]) Noi non consideriamo qui effetti connessi all'interazione delle oscillazioni con la rotazione della molecola (vedi III, § 104).

[3]) Questi spettri cadono nel campo infrarosso e si osservano di solito in assorbimento.

sentazione D_a v_a volte per se stessa. Infine, la simmetria di stati con eccitazione simultanea di diverse oscillazioni a e b è data dal prodotto diretto $[D_a^{v_a}] \times [D_b^{v_b}]$[1]. Il metodo per trovare le regole di selezione delle diverse grandezze (scalare, vettore e tensore) relative ai tipi di simmetria, è esposto nel vol. III, § 97.

Le regole di selezione, basate sulle proprietà di simmetria della molecola, sono rigorose. Oltre a queste, esistono anche regole approssimate, connesse con l'ipotesi di armonicità delle oscillazioni e con lo sviluppo delle funzioni $\alpha_{ik}(q)$ oppure $\boldsymbol{d}(q)$ in potenze delle coordinate vibrazionali q. Esse sorgono come una conseguenza della nota regola di selezione per l'oscillatore lineare, secondo la quale gli elementi di matrice della sua coordinata q sono differenti da zero solo per transizioni con variazione del numero quantico vibrazionale $\Delta v = \pm 1$ [2].

§ 63. *Larghezza naturale delle righe spettrali*

Finora, nello studio dell'emissione e dell'assorbimento di luce noi abbiamo considerato tutti i livelli del sistema (diciamo, dell'atomo) come rigorosamente discreti. Invece, i livelli eccitati, avendo una probabilità di emettere luce, hanno una vita media finita. Secondo i princípi generali della meccanica quantistica, questo fatto ha come conseguenza che i livelli diventano quasi-discreti, acquistando una certa (piccola) larghezza (vedi III, § 134); essi si scrivono nella forma $E - \frac{1}{2} i\Gamma$, dove Γ $(=\Gamma/\hbar)$ è la probalilità totale (in un secondo) di tutti i possibili processi di « decadimento » dello stato considerato.

Consideriamo ora in quale modo questa circostanza influisce sul processo di radiazione (*V. Weisskopf*, *E. Wigner*, 1930). È a priori chiaro che, poiché la larghezza del livello è finita la luce risulterà non rigorosamente monocromatica: le frequenze cadranno a caso nell'intervallo $\Delta\omega \sim \Gamma$ $(= \Gamma/\hbar)$. Ma per misurare la distribuzione dei fotoni in funzione della frequenza con una tale precisione, è necessario un tempo $T \gg 1/\Delta\omega \sim \hbar/\Gamma$. In questo intervallo di tempo il livello decadrà con una probabilità molto elevata. Per questa ragione si deve parlare di determinazione della probabilità totale di emissione di un fotone di una data frequenza, e non della

[1]) Le proprietà di simmetria delle funzioni d'onda vibrazionali non dipendono, ovviamente, dalla forma concreta dell'energia potenziale vibrazionale; esse non dipendono, in particolare, dall'ipotesi di armonicità delle oscillazioni, fatta nel III, § 101.

[2]) Un'esposizione piú particolareggiata dei problemi toccati in questo paragrafo si può trovare nei libri: G. Placzek, Diffusione Rayleigh e effetto Raman, Kharkov, 1935; G. Gertsberg, Spettri vibrazionali e rotazionali delle molecole poliatomiche, IL, 1949; M. A. Eljaševič, Spettroscopia atomica e molecolare, Fizmatgiz, 1962.

probabilità totale nell'unità di tempo. Calcoliamo questa probabilità iniziando dal caso della transizione di un atomo da un certo livello eccitato

$$E_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1$$

al livello fondamentale E_2, che possiede vita media infinita e quindi è rigorosamente discreto.

Sia Ψ la funzione d'onda dell'atomo e del campo fotonico, $H = H^{(0)} + V$ è l'hamiltoniano del sistema, dove V è l'operatore di interazione dell'atomo col campo fotonico. Cercheremo la soluzione dell'equazione di Schrödinger

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (H^{(0)} + V)\,\Psi \tag{63,1}$$

sotto forma di sviluppo in serie di autofunzioni degli stati imperturbati del sistema

$$\Psi = \sum_{\nu} a_\nu(t)\,\Psi_\nu^{(0)} = \sum_{\nu} a_\nu(t)\,e^{-i\mathscr{E}_\nu t}\psi_\nu^{(0)}. \tag{63,2}$$

Per i coefficienti $a_\nu(t)$ otteniamo il seguente sistema di equazioni:

$$i\frac{\partial a_\nu}{\partial t} = \sum_{\nu'} \langle\nu\,|\,V\,|\,\nu'\rangle\, a_{\nu'} \exp\{i(\mathscr{E}_\nu - \mathscr{E}_{\nu'})\,t\}. \tag{63,3}$$

Sia $|\,\nu\,\rangle$ lo stato di energia $\mathscr{E}_\nu = E_2 + \omega$, nel quale l'atomo si trova nel suo livello fondamentale E_2, e si ha un quanto di data frequenza ω; indichiamo questo stato col simbolo $|\,\omega 2\,\rangle$. All'istante iniziale il sistema si trova nello stato $|\,1\,\rangle$, nel quale l'atomo è eccitato al livello E_1, e non vi sono fotoni. In altre parole, per $t = 0$, deve essere

$$a_1 = 1, \quad a_{\nu'} = 0 \quad \text{per} \quad |\,\nu'\rangle \neq |\,1\rangle. \tag{63,4}$$

La soluzione dell'equazione (63,3) trovata con questa condizione iniziale darà (con una opportuna normalizzazione delle funzioni d'onda) la probabilità che entro il tempo t avvenga la transizione $1 \to 2$ con emissione di un fotone nell'intervallo di frequenze $d\omega$:

$$|\,a_{\omega 2}(t)\,|^2\, d\omega.$$

A noi interessa la probabilità definitiva per $t \to \infty$:

$$dw = |\,a_{\omega 2}(\infty)\,|^2\, d\omega. \tag{63,5}$$

Per chiarire meglio l'impostazione del problema ricordiamo che per determinare la probabilità ordinaria di radiazione (in 1 s) accompagnata dalla transizione $1 \to 2$ (senza tener conto della larghezza del livello) occorre risolvere l'equazione (63,3) sostituendo, in prima approssimazione, tutti gli $a_{\nu'}(t)$ nel membro destro con

i valori (63,4). Si studia, quindi, il comportamento della soluzione ottenuta per grandi t (cfr. III, § 42). Noi possiamo ora precisare il senso di questo procedimento: esso vale per tempi piccoli rispetto alla vita media del livello eccitato; per grandi t si intendono qui tempi grandi rispetto al periodo $1/(E_1 - E_2)$, ma piccoli rispetto a $1/\Gamma_1$.

Nel nostro caso, in cui invece si considerano tempi confrontabili con $1/\Gamma_1$, la funzione $a_1(t)$ decresce col tempo secondo la legge

$$a_1(t) = e^{-\frac{\Gamma_1}{2}t}. \tag{63,6}$$

Quanto alle funzioni $a_{\nu'}(t)$ relative agli stati $|\nu'\rangle$ che si possono avere nel decadimento dell'atomo, esse col tempo crescono. Se dal livello E_1 è possibile un decadimento verso diversi livelli dell'atomo (oltre a E_2), si avranno molte funzioni crescenti $a_{\nu'}(t)$; ognuna di esse è relativa ad uno stato, nel quale l'atomo viene a trovarsi in uno dei suoi livelli, e si ha un fotone di energia corrispondente. Tuttavia, nella parte destra dell'equazione (63,3) rimarrà sempre un solo termine: quello relativo a $|\nu'\rangle = |1\rangle$. Infatti, poiché gli elementi di matrice possono essere diversi da zero solo per transizioni in cui il numero di fotoni di una certa energia (quale che essa sia) può variare solo di una unità, allora essi sono ovviamente nulli per transizioni tra stati che contengono ognuno un fotone di energia diversa.

In tal modo, per le funzioni $a_{\omega 2}(t)$ abbiamo l'equazione

$$i\frac{da_{\omega 2}}{dt} = \langle \omega 2 | V | 1\rangle\, e^{i(E_2+\omega-E_1)t} a_1 =$$
$$= \langle \omega 2 | V | 1\rangle \exp\left\{ i(\omega - \omega_{12})t - \frac{\Gamma_1}{2}t \right\}, \tag{63,7}$$

(dove $\omega_{12} = E_1 - E_2$). Integrando con la condizione $a_{\omega 2}(0) = 0$, troviamo

$$a_{\omega 2} = \langle \omega 2 | V | 1\rangle \frac{1 - \exp\left\{ i(\omega - \omega_{12})t - \frac{\Gamma_1}{2}t \right\}}{\omega - \omega_{12} + \frac{i}{2}\Gamma_1}. \tag{63,8}$$

Da qui troviamo la probabilità dw (63,5):

$$dw = |\langle \omega 2 | V | 1\rangle|^2 \frac{d\omega}{(\omega - \omega_{12})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_1^2}.$$

Poiché si ha $\Gamma_1 \ll \omega_{12}$ nel fattore $|\langle \omega 2 | V | 1\rangle|^2$ si può porre $\omega = \omega_{12}$. Allora la quantità $2\pi\, |\langle \omega 2 | V | 1\rangle|^2$ è la probabilità ordinaria di radiazione (in 1 s) di un fotone di frequenza ω_{12} che possiede anche altre caratteristiche (oltre alla frequenza, direzione di propagazione, polarizzazione), delle quali finora, per brevità di scrittura, non ci siamo preoccupati. Notiamo che la dipendenza

della probabilità da queste caratteristiche è completamente determinata dal fattore $|\langle\omega 2 \mid V \mid 1\rangle|^2$. In altre parole, il tener conto della larghezza del livello non porta a cambiamenti nelle proprietà di polarizzazione e nella distribuzione angolare della radiazione.

La somma

$$\Gamma_{1\to 2} = 2\pi \sum |\langle\omega 2 \mid V \mid 1\rangle|^2, \tag{63,9}$$

calcolata sulle polarizzazioni e sulle direzioni di propagazione del fotone, è la probabilità totale ordinaria di radiazione. Nello stesso tempo, però, essa è anche quella parte della larghezza del livello E_1 (larghezza parziale), che è connessa alla transizione $1 \to 2$, a differenza della larghezza totale Γ_1, formata mediante i contributi di tutti i possibili modi di « decadimento » del livello quasi-stazionario[1]) dato.

Eseguendo questa stessa somma per la probabilità dw, otteniamo la seguente formula definitiva per la distribuzione della luce irraggiata in funzione della frequenza:

$$dw = w_{\text{tot}} \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega_{12}-\omega)^2 + \frac{\Gamma_1^2}{4}}, \tag{63,10}$$

dove $w_{\text{tot}} = \Gamma_{1\to 2}/\Gamma_1$ è la probabilità relativa totale della transizione $1 \to 2$ in esame. Questa è una distribuzione avente la forma delle relazioni di dispersione. La forma della riga spettrale, descritta dalla formula (63,10), è propria di un atomo isolato fisso ed è chiamata *naturale*[2]).

Supponiamo ora che anche il livello dell'atomo E_2 sia eccitato con larghezza finita Γ_2. Teniamo conto di questo fatto, supponendo che nell'equazione (63,1) nell'hamiltoniano « imperturbato » siano inclusi tutti i termini (cioè gli elementi di matrice), che portano al decadimento dello stato 2. Allora nella parte destra dell'equazione (63,7) l'energia E_2 viene sostituita con $E_2 - 1/2i\Gamma_2$. Nell'approssimazione richiesta, la piccola (per piccoli valori di Γ_2) variazione di $H^{(0)}$ non si rifletterà in alcun modo sull'elemento di matrice $\langle\omega 2 \mid V \mid 1\rangle$. Di conseguenza, al posto della (63,8) otteniamo

$$a_{\omega 2}(t) = \langle\omega 2 \mid V \mid 1\rangle \frac{1-\exp\left\{i(\omega-\omega_{12})t - \frac{1}{2}(\Gamma_1-\Gamma_2)t\right\}}{\omega-\omega_{12}+\frac{i}{2}(\Gamma_1-\Gamma_2)}. \tag{63,11}$$

---

[1]) Notiamo che le transizioni a stati dello spettro continuo, dovute alla larghezza finita del livello, non sono necessariamente connesse con emissione di fotoni. I livelli fortemente eccitati (livelli Röntgen) possono decadere emettendo un elettrone formando cosí uno ione positivo nello stato fondamentale (effetto Auger).

[2]) Ciò per distinguerla dall'allargamento connesso all'interazione dell'atomo con altri atomi (allargamento per collisione) o alla presenza, nella sorgente, di atomi che si muovono a velocità differenti (allargamento per effetto Doppler).

Lo stato *2*, avendo una vita media finita, decade a sua volta emettendo un fotone di una certa frequenza ω', e l'atomo passa finalmente al suo stato fondamentale E_0 (in relazione a ciò, la probabilità che l'atomo si trovi nello stato *2*, uguale a $|a_{\omega 2}(t)\exp(-\Gamma_2 t/2)|^2$, tende a zero per $t \to \infty$)[1]. In questo stato finale del sistema, l'atomo si trova, quindi, al suo livello fondamentale E_0 e si ha un fotone per ognuna delle due frequenze ω e ω'. L'ampiezza di questo stato $a_{\omega\omega' 0}(t)$ soddisfa un'equazione, che differisce dalla (63,7) solo per le notazioni

$$i\frac{da_{\omega\omega' 0}}{dt} = a_{\omega 2}\langle\omega\omega' O|V|\omega 2\rangle \times$$
$$\times \exp\left\{i(E_0+\omega+\omega')t - i(E_2+\omega)t - \frac{\Gamma_2}{2}t\right\} =$$
$$= a_{\omega 2}\langle\omega\omega' O|V|\omega 2\rangle \exp\left\{i(\omega'-\omega_{20})t - \frac{\Gamma_2}{2}t\right\}.$$

Sostituendo nella parte destra di questa equazione $a_{\omega 2}(t)$ dalla (63,11), integrando (con la condizione iniziale $a_{\omega 2}(0) = 0$) e facendo quindi tendere t all'infinito, otteniamo

$$a_{\omega\omega' 0}(\infty) = \frac{\langle\omega 2|V|1\rangle\langle\omega\omega' O|V|\omega 2\rangle}{\omega-\omega_{12}+\frac{i}{2}(\Gamma_1-\Gamma_2)} \times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\omega'-\omega_{20}+\frac{i}{2}\Gamma_2} - \frac{1}{\omega+\omega'-\omega_{10}+\frac{i}{2}\Gamma_1}\right\} =$$
$$= \frac{\langle\omega\omega' O|V|\omega 2\rangle\langle\omega 2|V|1\rangle}{\left(\omega'-\omega_{20}+\frac{i}{2}\Gamma_2\right)\left(\omega+\omega'-\omega_{10}+\frac{i}{2}\Gamma_1\right)}.$$

La probabilità di emissione dei fotoni ω e ω' è

$$dw = |a_{\omega\omega' 0}(\infty)|^2 d\omega\, d\omega' = \frac{\Gamma_{1\to 2}}{2\pi}\frac{\Gamma_{2\to 0}}{2\pi} \times$$
$$\times \frac{d\omega\, d\omega'}{\left[(\omega'-\omega_{20})^2+\frac{1}{4}\Gamma_2^2\right]\left[(\omega+\omega'-\omega_{10})^2+\frac{1}{4}\Gamma_1^2\right]}. \quad (63,12)$$

Come doveva essere, questa espressione ha dei massimi molto marcati per $\omega' \approx \omega_{20}$ e $\omega \approx \omega_{12}$.

La forma cercata della riga spettrale, relativa alla transizione $1 \to 2$, si ottiene integrando la (63,12) in $d\omega'$ (da $-\infty$ a $+\infty$). L'integrazione si esegue facilmente applicando il teorema dei resi-

[1]) Per semplicità supporremo che la transizione dell'atomo $2 \to 0$ avvenga direttamente, senza tappe intermedie. Questa supposizione non ha carattere di principio e non si riflette sul risultato finale (63,13).

dui; come risultato otteniamo[1])

$$dw = w_{\text{tot}} \frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega-\omega_{12})^2+\frac{1}{4}(\Gamma_1+\Gamma_2)^2}, \tag{63,13}$$

dove $w_{\text{tot}} = \frac{\Gamma_{1\to 2}\Gamma_{2\to 0}}{\Gamma_1\Gamma_2}$ è la probabilità totale della doppia transizione $1 \to 2 \to 0$[2]).

La forma della riga (63,13) differisce dalla (63,10) solo per la sostituzione di Γ_1 con $\Gamma_1 + \Gamma_2$: la larghezza della riga è uguale alla somma delle larghezze degli stati iniziale e finale.

Notiamo che la larghezza della riga non risulta, in generale, uguale alla probabilità $\Gamma_{1\to 2}$ della transizione stessa $1 \to 2$, cioè non è proporzionale all'intensità della riga (come sarebbe invece nella teoria classica). Poiché $\Gamma_1 + \Gamma_2 > \Gamma_{1\to 2}$, la riga può avere una larghezza grande per una intensità relativamente piccola.

§ 64. *Fluorescenza di risonanza*

La larghezza dei livelli nel problema della diffusione della luce è molto importante in quei casi, nei quali la frequenza ω della luce incidente è vicina ad una delle frequenze « intermedie » ω_{n1} o ω_{2n} (si ha allora *fluorescenza di risonanza*)[3]).

Consideriamo la diffusione Rayleigh da parte di un sistema (diciamo, un atomo) nel suo stato fondamentale, cosí che i livelli iniziale e finale coincidano e siano rigorosamente discreti. Sia la frequenza della luce vicina ad una certa frequenza ω_{n1}, dove il livello n è eccitato e quindi quasi-discreto.

Questo problema si potrebbe risolvere col metodo esposto nel paragrafo precedente. Questo non è, tuttavia, necessario poiché il problema è del tutto analogo al problema, considerato nel vol. III, § 134, della diffusione non relativistica di risonanza su un livello quasi-discreto. Secondo i risultati ottenuti in quella sede, l'ampiezza

---

[1]) L'integrazione viene effettuata su un cammino composto dall'asse reale ω' e da un semicerchio all'infinito nel semipiano superiore. L'espressione integranda ha, nel semipiano superiore, due punti singolari:

$$\omega' = \omega_{20} + \frac{i}{2}\Gamma_2 \quad \text{e} \quad \omega' = \omega_{10} - \omega + \frac{i}{2}\Gamma_1,$$

nei quali i residui sono uguali a

$$\frac{1}{i\Gamma_2}\left[\left(\omega-\omega_{12}+\frac{i}{2}\Gamma_2\right)^2+\frac{\Gamma_1^2}{4}\right]^{-1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{i\Gamma_1}\left[\left(\omega-\omega_{12}-\frac{i}{2}\Gamma_1\right)^2+\frac{\Gamma_2^2}{4}\right]^{-1}.$$

[2]) In casi piú complessi (vedi nota a pag. 291) w_{tot} è la probabilità totale di tutte le cascate, che iniziano con la transizione $1 \to 2$ e terminano al livello 0.

[3]) Questo problema venne per la prima volta affrontato da *V. Weisskopf* (1931).

di diffusione deve contenere un termine con un punto singolare

$$\frac{1}{\omega - \left(E_n - i\frac{\Gamma_n}{2} - E_1\right)}.$$

D'altra parte, per $|\omega - \omega_{n1}| \gg \Gamma_n$ la formula deve trasformarsi nella formula di non risonanza (60,5). È quindi chiaro che la sezione d'urto di diffusione che cerchiamo si ottiene semplicemente mediante la sostituzione di E_n con $E_n - i/2\Gamma_n$ nella formula (60,5), dove ora nella somma su n ci si può limitare ai termini di risonanza

$$d\sigma = \frac{\left|\sum\limits_{M_n} (d_{2n}e'^*)\,(d_{n1}e)\right|^2}{(\omega_{n1}-\omega)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2}\,\omega^4\,do'. \tag{64,1}$$

La sommatoria è estesa a tutti gli stati (con diversa proiezione del momento M_n), relativi al livello di risonanza E_n; gli stati *1* e *2* sono relativi ad uno stesso livello (fondamentale), ma possono differire per i valori di M_1 e M_2.

La sezione d'urto (64,1) è massima per $\omega = \omega_{n1}$. Come ordine di grandezza, il suo valore in questo punto è $\sigma_{\max} \sim \omega^4 d^4/\Gamma_n^2$. Poiché la probabilità di transizione spontanea $n \to 1$, e quindi anche la larghezza Γ_n, è proporzionale a $\omega^3 d^2$, per questo valore otteniamo

$$\sigma_{\max} \sim \frac{1}{\omega^2} \sim \lambda^2, \tag{64,2}$$

e cioè dell'ordine di grandezza del quadrato della lunghezza d'onda della luce e non dipende dalla costante della struttura fina.

Sottolineiamo che poiché l'atomo prima e dopo la diffusione si trova ad un livello rigorosamente discreto (quello fondamentale), allora anche le frequenze dei fotoni primario e secondario coincidono esattamente. Perciò, per un irraggiamento con luce monocromatica, sarà monocromatica anche la riga diffusa. Se invece la luce incidente ha la distribuzione spettrale di intensità $I(\omega)$, e se inoltre $I(\omega)$ varia di poco sulla larghezza Γ_n, allora l'intensità della luce diffusa sarà proporzionale a

$$\frac{I(\omega_{n1})\,d\omega}{(\omega-\omega_{n1})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2}. \tag{64,3}$$

In altre parole, la forma della riga diffusa coinciderà con la forma naturale della riga per emissione spontanea dal livello E_n.

Alla sezione di diffusione (64,1) corrisponde il tensore di diffusione

$$(c_{ik})_{21} = \frac{\sum\limits_{M_n} (d_i)_{2n}\,(d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega - \frac{i}{2}\Gamma_n}. \tag{64,4}$$

In particolare, il tensore di polarizzabilità è

$$\alpha_{ik} = (c_{ik})_{11} = \frac{\sum\limits_{M_n} (d_i)_{1n} (d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega - \frac{i}{2}\Gamma_n}. \tag{64,5}$$

Notiamo subito che, poiché ora nei livelli energetici degli stati eccitati intermedi compare anche una parte immaginaria, il tensore di polarizzabilità non è piú hermitiano. In esso compare anche una parte antihermitiana, direttamente connessa, come ora mostreremo, con l'assorbimento di luce[1]).

Assorbendo un quanto, l'atomo prima o poi finirà per passare allo stato fondamentale emettendo uno o piú fotoni. Perciò, da questo punto di vista, la sezione d'urto di assorbimento è semplicemente la sezione d'urto totale σ_t di tutti i processi di diffusione[2]). D'altra parte, secondo il teorema ottico (§ 72), la sezione d'urto si esprime mediante la parte immaginaria dell'ampiezza $f(0)$ di diffusione elastica ad angolo zero secondo la relazione

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{\omega} \operatorname{Im} f(0).$$

L'ampiezza di diffusione elastica del fotone è data, come si vede dalla (60,7), dalla quantità

$$f = \omega^2 \alpha_{ik} e_i'^* e_k.$$

La diffusione « ad angolo zero » significa nel caso in esame una diffusione senza variazione dell'impulso e della polarizzazione del fotone, cioè $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}$. In tal modo, la sezione d'urto di assorbimento di un fotone è data dalla relazione

$$\sigma_{\text{ass}} = 4\pi\omega \operatorname{Im}(\alpha_{ik} e_i^* e_k) = 4\pi\omega e_i^* e_k \frac{\alpha_{ik} - \alpha_{ki}^*}{2i}, \tag{64,6}$$

che determina il suo legame con la parte antihermitiana del tensore di polarizzabilità.

La formula (64,6) ha un senso classico molto semplice. Il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ compie (in 1 s) su un sistema di cariche un lavoro uguale a $\sum e\boldsymbol{v}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{d}}$. Rappresentando il campo nella forma (60,19) e il momento di dipolo nella forma (60,20-21) e mediando questo lavoro

---

[1]) Notiamo anche che questa formula chiarisce il senso in cui va intesa l'espressione (60,17) in prossimità delle sue singolarità per $\Gamma \to 0$. Secondo quanto si è detto, per $\Gamma \to 0$ l'espressione per $\alpha_{ik}(\omega)$ con la sostituzione $\omega_{n1} \to \omega_{n1} - i0$ si trasforma nella (60,17).

[2]) Sottolineiamo che si parla qui di assorbimento da parte di un sistema, che si trova al livello fondamentale stabile. Poiché il tempo dell'osservazione sperimentale è necessariamente limitato, l'impostazione del problema per stati eccitati sarebbe stata differente.

rispetto al tempo, troviamo

$$\frac{1}{2}\omega\,|E|^2 e_i^* e_k \frac{\alpha_{ik}-\alpha_{ki}^*}{2i}$$

($\boldsymbol{E} = e\boldsymbol{E}$). D'altra parte, se $\boldsymbol{E}$ è il campo della luce incidente, la densità media del flusso di energia in esso sarà uguale a $\frac{1}{8\pi}|E|^2$, e l'energia assorbita dall'atomo (in 1 s) è

$$\frac{1}{8\pi}|E|^2\sigma_{\text{ass}}.$$

Uguagliando le due espressioni ottenute, troviamo la formula (64,6).

Sostituendo nella (64,6) il tensore di polarizzazione preso dalla (64,5), troviamo la seguente formula per la sezione d'urto di assorbimento di un fotone di frequenza ω vicina alla frequenza ω_{n1}:

$$\sigma_{\text{ass}} = 4\pi^2 \sum_{Mn} |\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e}|^2\,\omega \frac{\Gamma_n/2}{\pi\left[(\omega-\omega_{n1})^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2\right]}. \tag{64,7}$$

Nel limite $\Gamma_n \to 0$ l'ultimo fattore in questa formula tende alla funzione $\delta(\omega - \omega_{n1})$, in corrispondenza al fatto che, in questo caso, può venire assorbito un fotone di frequenza rigorosamente determinata. Se sull'atomo cade una luce di densità spettrale e angolare del flusso di energia I_{ke} (cfr. (44,7)), allora la densità del flusso di fotoni è uguale a $\frac{I_{ke}}{\omega}\,d\omega\,do$, e per la probabilità di assorbimento troviamo

$$dw_{\text{ass}} = \sigma_{\text{ass}}\frac{I_{ke}}{\omega}\,d\omega\,do. \tag{64,8}$$

Se la funzione $I_{ke}(\omega)$ varia di poco sulla larghezza Γ_n, allora integrando rispetto alle frequenze otteniamo

$$dw_{\text{ass}} = 4\pi^2 \sum_{Mn} |\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e}|^2 I_{ke}(\omega_{n1})\,do.$$

Notando d'altra parte che, secondo la (45,5)

$$dw_{\text{spont}} = \frac{\omega^3}{2\pi}\sum_{Mn}|\boldsymbol{d}_{1n}\boldsymbol{e}^*|^2\,do = \frac{\omega^3}{2\pi}\sum_{Mn}|\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e}|^2\,do$$

è la probabilità di emissione spontanea di un fotone di frequenza ω_{n1}, si riottiene la formula (44,9).

PROBLEMA

Trovare la sezione d'urto di diffusione di risonanza, sommata su tutte le polarizzazioni finali e su tutte le direzioni iniziali del fotone, e anche sulle proiezioni finali M_2 del momento angolare dell'atomo (e mediata inoltre sulle polarizzazioni del fotone iniziale e sui valori iniziali di M_1).

Soluzione. Secondo le (61,8), (61,2) e la (64,4), la sezione d'urto cercata è

$$\sigma=\frac{8\pi\omega^4}{9}\frac{1}{(\omega-\omega_{n1})^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2}\left\{(2J_1+1)\overline{\left|\sum_{M_n}(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}\right|^2}\right\} \tag{1}$$

(poiché gli stati *1* e *2* differiscono solo per i valori di M_1 e M_2, si ha $J_2=J_1$). L'espressione tra parentesi graffa si riscrive nella forma

$$\{\ldots\}=\frac{1}{2J_1+1}\sum_{M_1M_2}\sum_{M_nM_{n'}}(\boldsymbol{d}_{2n}\boldsymbol{d}_{n'2})(\boldsymbol{d}_{1n'}\boldsymbol{d}_{n1})$$

(il quadrato della somma su M_n è rappresentato sotto forma di una doppia somma su M_n e M_n'). Le somme

$$\sum_{M_2}(\boldsymbol{d}_{n'2}\boldsymbol{d}_{2n})=\sum_{M_1}(\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{d}_{1n'})$$

sono diverse da zero solo per $M_n=M_{n'}$ e coincidono con la quantità $3\Gamma_{n\to1}/4\omega^3$, dove $\Gamma_{\to1}$ è la probabilità della transizione $n\to1$ (essa è anche una larghezza parziale del livello E_n). Quindi abbiamo

$$\{\ldots\}=\frac{1}{2J_1+1}(2J_n+1)\left(\frac{3}{4\omega^3}\Gamma_{n\to1}\right)^2,$$

e per la sezione d'urto totale troviamo[1])

$$\sigma=g\frac{\pi}{\omega^2}\frac{\Gamma_{n1}^2}{(\omega-\omega_{n1})^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2}, \tag{2}$$

dove

$$g=\frac{2J_n+1}{2(2J_1+1)}.$$

Se a noi interessa solo la parte coerente della diffusione (gli stati *1* e *2* coincidono, cioè $M_1=M_2$), allora nella (1) il fattore tra parentesi graffa deve essere sostituito con

$$\overline{\left\{\left|\sum_{M_n}(d_i)_{1n}(d_k)_{n1}\right|^2\right\}}=\frac{1}{2J_1+1}\sum_{M_1}\sum_{M_nM_{n'}}(\boldsymbol{d}_{1n}\boldsymbol{d}_{n'1})(\boldsymbol{d}_{1n'}\boldsymbol{d}_{n1})$$

(cfr. con la (61,3)). In componenti vettoriali sferiche il prodotto scalare si scrive

$$\boldsymbol{d}_{1n}\boldsymbol{d}_{n'1}=\sum_{\lambda}(-1)^{1-\lambda}(d_\lambda)_{1n}(d_{-\lambda})_{n'1};$$

esso è diverso da zero solo per $M_n=M_{n'}$. Esprimendo gli elementi di matrice mediante gli elementi ridotti e introducendo di nuovo le larghezze parziali

$$\Gamma_{n\to1}=\frac{4\omega^3}{3}\frac{1}{2J_n+1}|\langle n\|d\|1\rangle|^2,$$

---

[1]) Come c'era da aspettarsi (per la somiglianza formale dei due problemi), questa formula coincide con la formula di Breit — Wigner per la diffusione elastica di risonanza di neutroni lenti su un nucleo (vedi III (145,16), (145,18)). Il fattore g è la probabilità di ottenere il dato valore J_n per una composizione arbitraria dei momenti del fotone e dell'atomo iniziale.

per σ_{coer} otteniamo la formula (2) dove

$$g=\frac{(2J_n+1)^2}{2\,(2J_1+1)}\sum_{M_1M_n}\begin{pmatrix} J_n & 1 & J_1 \\ -M_n & \lambda & M_1 \end{pmatrix}^4.$$

Per i tre casi possibili

$$J_n = J_1,\ J_1 \pm 1,$$

un calcolo diretto della somma dà

$$g=\begin{cases} \dfrac{7J_1\,(J_1+1)+1}{30J_1\,(J_1+1)}, & J_n=J_1\neq 0; \\[2ex] \dfrac{(2J_1+3)\,[16\,(J_1+1)^2-1]}{30\,(2J_1+1)^2\,(J_1+1)}, & J_n=J_1+1; \\[2ex] \dfrac{(2J_1-1)\,(16J_1^2-1)}{30J_1\,(2J_1+1)^2}, & J_n=J_1-1,\ J_1\geqslant 1. \end{cases}$$

Capitolo VII

MATRICE DI DIFFUSIONE

§ 65. *Ampiezza di diffusione*

L'impostazione generale del problema delle collisioni consiste in questo: per un dato stato iniziale del sistema (una certa collezione di particelle libere) occorre determinare le probabilità dei diversi stati finali possibili (altre collezioni di particelle libere). Se con il simbolo $|i\rangle$ indichiamo lo stato iniziale, allora il risultato della collisione può essere rappresentato come una sovrapposizione

$$\sum_f |f\rangle \langle f|S|i\rangle, \tag{65,1}$$

dove la sommatoria è estesa ai diversi stati finali possibili $|f\rangle$. I coefficienti di questo sviluppo $\langle f|S|i\rangle$ (oppure piú brevemente S_{fi}) formano la *matrice di diffusione* o *matrice* S[1]). I quadrati $|S_{fi}|^2$ danno la probabilità delle transizioni a determinati stati $|f\rangle$.

In assenza di interazione tra le particelle lo stato del sistema non subisce cambiamenti e quindi a questo caso corrisponde la matrice unità (assenza di diffusione). Risulta sempre comodo mettere in evidenza questa matrice unità rappresentando la matrice di diffusione nella forma

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,T_{fi}, \tag{65,2}$$

dove T_{fi} è una nuova matrice. Nel secondo termine è evidenziata una funzione delta quadridimensionale, che esprime la legge di conservazione del 4-impulso (o energia-impulso) (P_i e P_f sono le somme dei 4-impulsi di tutte le particelle negli stati iniziale e finale); gli altri moltiplicatori sono stati introdotti per ragioni di comodità. Negli elementi di matrice non diagonali il primo termine nella (65,2) viene a mancare, e quindi per la transizione $i \to f$ gli elementi delle matrici S e T sono connessi tra loro dalla relazione

$$S_{fi} = i\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,T_{fi}. \tag{65,3}$$

Noi chiameremo *ampiezze di diffusione* gli elementi di matrice T_{fi}, che rimangono dopo che si è evidenziata la funzione delta.

---

[1]) Dall'inglese « scattering » o dal tedesco « Streuung ».

Elevando i moduli $|S_{fi}|$ al quadrato compare il quadrato della funzione delta, che va inteso nel modo seguente: la funzione delta è definita dall'integrale

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(P_f - P_i)x} d^4x. \tag{65,4}$$

Se ora calcoliamo un altro di questi integrali per $P_f = P_i$ (questo in virtú della presenza di una funzione delta) estendendo l'integrazione su un certo volume grande ma finito V e su un certo intervallo di tempo t, si otterrà il risultato $Vt/(2\pi)^4$ [1]). Possiamo quindi scrivere

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 Vt.$$

Dividendo per t otteniamo la probabilità di transizione nell'unità di tempo

$$w_{f \leftarrow i} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V. \tag{65,5}$$

Ciascuna delle particelle libere (iniziali e finali) è descritta da una propria funzione d'onda, un'onda piana di una certa ampiezza u (per l'elettrone è un bispinore, per il fotone è un quadrivettore, ecc.). L'ampiezza di diffusione T_{fi} ha una struttura della forma

$$T_{fi} = u_1^* u_2^* \ldots Q u_1 u_2 \ldots, \tag{65,6}$$

dove a sinistra stanno le ampiezze delle funzioni d'onda delle particelle finali e a destra quelle delle particelle iniziali; Q è una certa matrice (rispetto agli indici delle componenti delle ampiezze d'onda di tutte le particelle).

I casi piú importanti sono quelli in cui nello stato iniziale ci sono in tutto una o due particelle. Nel primo di questi due casi si tratta di decadimento, nel secondo di collisione di due particelle.

Esaminiamo dapprima il decadimento di una particella in un numero qualsiasi di altre particelle di impulsi $\boldsymbol{p}'_a$ nell'elemento dello spazio degli impulsi $\prod_a d^3p'_a$ (l'indice a numera le particelle nello stato finale, e quindi $\sum_a \boldsymbol{p}'_a = \boldsymbol{P}_f$). Il numero degli stati relativi a questo elemento (e al volume di normalizzazione V)[2]) è

$$\prod_a \frac{V d^3p'_a}{(2\pi)^3}.$$

---

[1]) A questo si può arrivare in un altro modo, eseguendo prima l'integrazione nella (65,4) rispetto a ciascuna coordinata tra limiti finiti e facendo quindi tendere questi limiti all'infinito usando la formula III (42,4):

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha\xi}{\xi\alpha^2} = \pi\delta(\alpha).$$

[2]) Per visualizzare meglio i calcoli, in questo paragrafo non porremo il volume di normalizzazione uguale all'unità.

L'espressione (65,5) va moltiplicata per questa quantità:

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)} (P_f - P_i) \, | T_{fi} |^2 V \prod_a \frac{V d^3 p'_a}{(2\pi)^3}. \qquad (65,7)$$

Le funzioni d'onda di tutte le particelle, usate per il calcolo dell'elemento di matrice, devono essere normalizzate secondo «una particella nel volume V»[1]). Cosí per l'elettrone abbiamo l'onda piana (23,1), per una particella a spin 1 la funzione (14,12), e per il fotone la (4,3). Tutte queste funzioni contengono il fattore $1/\sqrt{2\varepsilon V}$, dove ε è l'energia della particella. Nel seguito, tuttavia, sarà comodo scrivere in tutti i calcoli le funzioni d'onda senza questi fattori (che noi includeremo nell'espressione della probabilità). In tal modo, l'onda piana elettronica sarà

$$\psi = u e^{-ipx}, \quad \bar{u} u = 2m, \qquad (65,8)$$

e l'onda fotonica

$$A = \sqrt{4\pi} e e^{-ikx}, \quad e e^* = -1, \quad ek = 0. \qquad (65,9)$$

Indichiamo l'ampiezza di diffusione calcolata mediante queste funzioni con M_{fi} (per distinguerla da T_{fi}). È evidente che

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{(2\varepsilon_1 V \ldots 2\varepsilon'_1 V \ldots)^{1/2}}; \qquad (65,10)$$

al denominatore compare un fattore $\sqrt{2\varepsilon V}$ per ogni particella iniziale e finale.

In particolare, per la probabilità di decadimento, invece della (65,7), avremo

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)} (P_f - P_i) \, | M_{fi} |^2 \frac{1}{2\varepsilon} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 \, 2\varepsilon'_a}, \qquad (65,11)$$

dove ε è l'energia della particella che decade; il volume di normalizzazione, come era naturale, è scomparso dalla formula[2]).

Diamo alla formula (65,11) una forma diversa (eliminando in essa le funzioni delta) per il caso in cui il decadimento avvenga con la generazione di due particelle (di impulso $\boldsymbol{p}'_1$, $\boldsymbol{p}'_2$ e energie ε'_1, ε'_2). Nel sistema di quiete della particella che decade abbiamo $\boldsymbol{p}'_1 = -\boldsymbol{p}'_2 \equiv \boldsymbol{p}'$, $\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 = m$. Otteniamo quindi

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^2} | M_{fi} |^2 \frac{1}{2m} \frac{1}{4\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} \delta (\boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2) \, \delta (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - m) \, d^3 p'_1 d^3 p'_2.$$

---

[1]) Ricordiamo (vedi nota a pag. 193) che questa normalizzazione è equivalente alla normalizzazione secondo la quale le funzioni d'onda delle particelle finali sono normalizzate secondo $\delta(\boldsymbol{p})$, e la probabilità è relativa a $d^3 p'_1 \ldots$

[2]) Se tra le particelle finali ce ne sono N identiche, integrando rispetto ai loro impulsi (per la determinazione della probabilità integrale) deve essere introdotto il fattore $1/N!$, che tiene conto della identità degli stati che differiscono per uno scambio di posto delle particelle.

La prima delle funzioni delta viene eliminata integrando in $d^3p'_2$; il differenziale $d^3p'_1$ si riscrive nella forma

$$d^3p' = p'^2 d|p'|\,do = |p'|\,do\,\frac{\varepsilon'_1\varepsilon'_2 d(\varepsilon'_1+\varepsilon'_2)}{\varepsilon'_1+\varepsilon'_2} \tag{65,12}$$

(l'esattezza di questa forma di scrittura è facilmente verificabile se si nota che $\varepsilon_1'^2 - m_1'^2 = \varepsilon_2'^2 - m_2'^2 = p'^2$). L'integrazione in $d(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$ elimina la seconda funzione δ, e si ottiene

$$dw = \frac{1}{32\pi^2 m^2}|M_{fi}|^2|p'|\,do'. \tag{65,13}$$

Esaminiamo ora la collisione di due particelle (di impulso p_1 e p_2 e energie ε_1 e ε_2) accompagnata dalla trasformazione di queste in un numero qualsiasi di particelle di impulso p'_a. Invece della (65,11) otterremo ora

$$dw = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,|M_{fi}|^2\,\frac{1}{4\varepsilon_1\varepsilon_2 V}\prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3\,2\varepsilon'_a}.$$

La quantità che ci interessa in questo caso non è, tuttavia, la probabilità, ma la sezione d'urto $d\sigma$. La sezione d'urto invariante (rispetto alle trasformazioni di Lorentz) si ottiene dalla probabilità dw dividendo per la quantità

$$j = \frac{I}{V\varepsilon_1\varepsilon_2}, \tag{65,14}$$

dove I indica la quantità quadriscalare

$$I = \sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \tag{65,15}$$

(vedi II, § 12)[1]. Nel sistema di riferimento del baricentro ($p_1 = -p_2 \equiv p$) abbiamo

$$I = |p|\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \tag{65,16}$$

e quindi

$$j = \frac{|p|}{V}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{v_1 + v_2}{V}, \tag{65,17}$$

che coincide con la definizione ordinaria della densità di flusso delle particelle collidenti (v_1, v_2 sono le loro velocità)[2]. In tal modo, per

---

[1]) Per futuri riferimenti, scriviamo anche l'espressione I nella forma

$$I^2 = \frac{1}{4}[s - (m_1+m_2)^2]\,[s - (m_1-m_2)^2], \tag{65,15a}$$

dove $s = (p_1 + p_2)^2$.

[2]) In un sistema di riferimento generico

$$j = \frac{1}{V}\sqrt{(v_1 - v_2)^2 - [v_1 v_2]^2}.$$

Questa espressione si riduce alla densità ordinaria in tutti i casi in cui $v_1 \parallel v_2$: $= |v_1 - v_2|/V$.

la sezione d'urto troviamo la formula

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)} (P_f - P_i) \, | M_{fi} |^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 \, 2\varepsilon'_a}. \qquad (65,18)$$

Diamo a questa formula la sua forma definitiva eliminando in essa la funzione delta per il caso in cui nello stato finale si abbiano in tutto ancora due particelle. Esaminiamo il processo nel sistema del baricentro. Sia $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$ l'energia totale; siano $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 \equiv \boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p}'_1 = -\boldsymbol{p}'_2 \equiv \boldsymbol{p}'$ gli impulsi iniziale e finale. La funzione delta viene eliminata come nella deduzione della (65,13) e si ottiene

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \, | M_{fi} |^2 \frac{| \boldsymbol{p}' |}{| \boldsymbol{p} | \, \varepsilon^2} \, do' \qquad (65,19)$$

(nel caso particolare di diffusione elastica, quando il tipo di particelle nella collisione rimane lo stesso, abbiamo $| \boldsymbol{p}' | = | \boldsymbol{p} |$).

Riscriviamo questa formula in un'altra forma ancora, introducendo in essa la quantità invariante

$$t \equiv (p_1 - p'_1)^2 = m_1^2 + m_1'^2 - 2 (p_1 p'_1) =$$
$$= m_1^2 + m_1'^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon'_1 + 2 \, | \boldsymbol{p}_1 | \, | \boldsymbol{p}'_1 | \cos\theta, \qquad (65,20)$$

dove θ è l'angolo tra $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}'_1$. Nel sistema del baricentro gli impulsi $| \boldsymbol{p}_1 | \equiv | \boldsymbol{p} |$ e $| \boldsymbol{p}'_1 | \equiv | \boldsymbol{p}' |$ determinano soltanto l'energia totale ε, e per una data ε abbiamo

$$dt = 2 \, | \boldsymbol{p} | \, | \boldsymbol{p}' | \, d \cos\theta. \qquad (65,21)$$

Nella (65,19) si può quindi sostituire

$$do' = -d\varphi d \cos\theta = \frac{d\varphi d(-t)}{2 | \boldsymbol{p} | \, | \boldsymbol{p}' |},$$

dove φ è l'azimut di $\boldsymbol{p}'_1$ rispetto a $\boldsymbol{p}_1$[1]). In tal modo troviamo

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} \, | M_{fi} |^2 \frac{dt}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} \qquad (65,22)$$

(abbiamo nuovamente introdotto l'invariante I secondo la (65,16)). L'azimut φ, e con esso anche la sezione d'urto nella forma (65,22). è invariante per le trasformazioni di Lorentz, che non cambiano la direzione del moto relativo delle particelle. Se la sezione d'urto non dipende dall'azimut, allora la formula (65,22) assume una forma particolarmente semplice

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} \, | M_{fi} |^2 \frac{dt}{I^2}. \qquad (65,23)$$

---

[1]) Poiché il segno giusto del differenziale in casi del genere è evidente, nel seguito noi scriveremo per semplicità dt invece di $d(-t)$, ecc.

Se una delle particelle collidenti è sufficientemente pesante (e il suo stato non cambia in seguito alla collisione), allora il suo ruolo nel processo si riduce al ruolo di una sorgente fissa di un campo costante, sul quale va a diffondersi l'altra particella. In relazione al fatto che in un campo costante si conserva l'energia (ma non l'impulso!) del sistema, in questa descrizione del processo di collisione rappresentiamo gli elementi della matrice S nella forma

$$S_{fi} = i2\pi\delta(E_f - E_i)\, T_{fi}. \tag{65,24}$$

Nell'espressione $|S_{fi}|^2$ il quadrato della funzione δ va inteso come segue:

$$[\delta(E_f - E_i)]^2 \to \frac{1}{2\pi}\delta(E_f - E_i)\, t.$$

Passando quindi (come abbiamo fatto anche per la deduzione della (65,11)) dalla quantità T_{fi} all'ampiezza M_{fi}, otteniamo per la probabilità del processo in cui una particella, incidendo su un campo costante, crea nello stato finale un certo numero di altre particelle, la seguente espressione:

$$dw = 2\pi\delta(E_f - \varepsilon)\,|M_{fi}|^2 \frac{1}{2\varepsilon V} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3\, 2\varepsilon'_a}.$$

Anche qui ε $(= E_i)$ è l'energia della particella iniziale, $\boldsymbol{p}'_a$ e ε'_a sono gli impulsi e le energie delle particelle finali. La sezione d'urto di diffusione si ottiene dividendo dw per la densità di flusso $j = v/V$, dove $v = |\boldsymbol{p}|/\varepsilon$ è la velocità della particella diffusa. Allora il volume di normalizzazione, come doveva avvenire, scompare e si ottiene

$$d\sigma = 2\pi\delta(E_f - \varepsilon)\,|M_{fi}|^2 \frac{1}{2|\boldsymbol{p}|} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3\, 2\varepsilon'_a}. \tag{65,25}$$

Nel caso particolare di diffusione elastica, nello stato finale si ha ancora una sola particella avente lo stesso impulso (per modulo) e la stessa energia. Sostituendo $d^3p' \to \boldsymbol{p}'^2 d|\boldsymbol{p}'|\, do' = |\boldsymbol{p}'|\,\varepsilon'\, d\varepsilon'\, do'$ e eliminando $\delta(\varepsilon' - \varepsilon)$ con l'integrazione in $d\varepsilon'$, otteniamo la sezione d'urto nella forma

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}\,|M_{fi}|^2\, do'. \tag{65,26}$$

§ 66. *Reazioni con particelle polarizzate*

In questo paragrafo mostreremo, sulla base di esempi semplici, in che modo si tiene conto, nel calcolo della sezione d'urto di diffusione, dello stato di polarizzazione delle particelle che intervengono nella reazione.

Si supponga che negli stati iniziale e finale vi sia un elettrone. Allora l'ampiezza di diffusione ha la forma

$$M_{fi} = \bar{u}' A u \; (\equiv \bar{u}'_i A_{ik} u_k), \tag{66,1}$$

dove u e u' sono le ampiezze bispinoriali dell'elettrone iniziale e finale, e A una certa matrice (che dipende dagli impulsi e dalle polarizzazioni delle altre particelle che intervengono nella reazione, se tali particelle ci sono).

La sezione d'urto di diffusione è proporzionale a $|M_{fi}|^2$. Abbiamo

$$(\bar{u}' A u)^* = u' \gamma^{0*} A^* u^* = u^* A^+ \gamma^{0+} u',$$

ovvero

$$(\bar{u}' A u)^* = \bar{u} \bar{A} u', \tag{66,2}$$

dove[1])

$$\bar{A} = \gamma^0 A^+ \gamma^0.$$

In tal modo, otteniamo

$$|M_{fi}|^2 = (\bar{u}' A u)(\bar{u} \bar{A} u') \equiv u'_i \bar{u}'_k A_{kl} u_l \bar{u}_m \bar{A}_{mi}. \tag{66,3}$$

Se l'elettrone iniziale si trova in uno stato miscelato (parzialmente polarizzato) con matrice densità ρ, e se a noi interessa la sezione d'urto del processo con formazione di un elettrone finale in un determinato stato, fissato a priori, di polarizzazione ρ', allora occorre sostituire i prodotti delle componenti delle ampiezze bispinoriali come segue:

$$u'_i \bar{u}'_k \to \rho'_{ik}, \quad u_l \bar{u}_m \to \rho_{lm}.$$

Allora otteniamo

$$|M_{fi}|^2 = \mathrm{Tr}\,(\rho' A \rho \bar{A}). \tag{66,4}$$

Le matrici densità ρ e ρ' sono date dalla formula (29,13)

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m)(1 - \gamma^5 \hat{a}) \tag{66,5}$$

(e analogamente per ρ').

Se l'elettrone iniziale non è polarizzato, allora si ha

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m). \tag{66,6}$$

La sostituzione di questa espressione è equivalente al calcolo della media sulle polarizzazioni dell'elettrone. Se si richiede di determina-

---

[1]) In relazione alla necessità di formare la matrice $\bar{A}$, notiamo, per future esigenze, le seguenti uguaglianze facilmente verificabili

$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu, \quad \overline{\gamma^\mu \gamma^\nu \ldots \gamma^\rho} = \gamma^\rho \ldots \gamma^\nu \gamma^\mu, \qquad \bar{\gamma}^5 = -\gamma^5, \quad \overline{\gamma^5 \gamma^\mu} = \gamma^5 \gamma^\mu. \tag{66,2a}$$

re la sezione d'urto di diffusione con polarizzazione qualsiasi dell'elettrone finale, allora occorre anche porre $\rho' = (\hat{p}' + m)/2$ e raddoppiare il risultato; questa operazione è equivalente alla sommatoria sulle polarizzazioni dell'elettrone. In tal modo otteniamo

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \{(\hat{p}' + m) A (\hat{p} + m) \bar{A}\}, \tag{66,7}$$

dove $\sum_{\text{polar}}$ significa la sommatoria sulle polarizzazioni iniziali e finali, e il fattore 1/2 trasforma una delle sommatorie in una media.

La matrice densità ρ' nella (66,4) è un concetto ausiliario, che caratterizza, in sostanza, le proprietà del detector (che rivela questa o quella polarizzazione dell'elettrone finale), e non del processo di diffusione in quanto tale. Sorge ora il problema dello stato di polarizzazione, nel quale l'elettrone si viene a trovare in conseguenza del processo stesso di diffusione. Se $\rho^{(f)}$ è la matrice densità di questo stato, allora la probabilità che l'elettrone venga rivelato nello stato ρ' si ottiene proiettando $\rho^{(f)}$ su ρ', cioè formando la traccia $\operatorname{Tr}(\rho^{(f)}\rho')$. A questa quantità sarà proporzionale la corrispondente sezione d'urto, cioè il quadrato $|M_{fi}|^2$. Confrontando con la (66,4) si arriva alla conclusione che

$$\rho^{(f)} \sim A\rho\bar{A}. \tag{66,8}$$

Poiché è noto a priori che $\rho^{(f)}$ deve avere la forma (66,5) con un certo quadrivettore $a^{(f)}$, allora il problema si riconduce alla determinazione di quest'ultimo. Ciò si potrebbe fare sulla base della (29,14), ma risulta ancora piú semplice procedere come ora mostreremo.

Abbiamo visto nel § 29 che le componenti del quadrivettore a si esprimono attraverso le componenti del 3-vettore $\boldsymbol{\zeta}$, che rappresenta il valore (raddoppiato) dello spin dell'elettrone nel suo sistema a riposo. Gli stati di polarizzazione degli elettroni sono determinati completamente da questi vettori, ed è quindi opportuno esprimere tramite essi anche la sezione d'urto di diffusione. È evidente che il quadrato $|M_{fi}|^2$ è lineare rispetto a ciascuno dei vettori $\boldsymbol{\zeta}$ e $\boldsymbol{\zeta}'$, relativi agli elettroni iniziale e finale. Come funzione di $\boldsymbol{\zeta}'$ esso avrà la forma

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\zeta}', \tag{66,9}$$

dove α e $\boldsymbol{\beta}$ sono esse stesse funzioni lineari di $\boldsymbol{\zeta}$.

Il vettore $\boldsymbol{\zeta}'$ nella (66,9) è una data polarizzazione dell'elettrone finale, rivelata dal detector. Il vettore $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$ invece, relativo alla matrice $\rho^{(f)}$, è facilmente determinabile nel seguente modo. Secondo quanto detto prima abbiamo

$$|M_{fi}|^2 \sim \operatorname{Tr}(\rho'\rho^{(f)}).$$

In virtú della invarianza relativistica di questa quantità, la possiamo calcolare in qualsiasi sistema di riferimento. Nel sistema di

quiete dell'elettrone finale, in accordo con la (29,20), abbiamo

$$\rho'\rho^{(f)} \sim (1+\sigma\zeta')(1+\sigma\zeta^{(f)}).$$

Perciò

$$|M_{fi}|^2 \sim 1+\zeta'\zeta^{(f)}$$

e, confrontando con la (66,9), troviamo che

$$\zeta^{(f)} = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{66,10}$$

In tal modo, calcolando la sezione d'urto come funzione del para metro ζ', noi determiniamo anche la polarizzazione $\zeta^{(f)}$.

In casi piú complessi, quando si hanno piú elettroni negli stati finali e iniziali, i calcoli vengono eseguiti in maniera analoga secondo lo schema esposto.

Per esempio, nel caso che sia all'inizio che alla fine si abbia a che fare con due elettroni, l'ampiezza di diffusione ha la forma

$$M_{fi} = (\bar{u}_1' A u_1)(\bar{u}_2' B u_2) + (\bar{u}_2' C u_1)(\bar{u}_1' D u_2),$$

dove u_1, u_2 sono le ampiezze bispinoriali degli elettroni iniziali, e u_1', u_2' le ampiezze degli elettroni finali. Formando il quadrato $|M_{fi}|^2$ compaiono termini del tipo

$$|\bar{u}_1' A u_1|^2 \, |\bar{u}_2' B u_2|^2$$

e del tipo

$$(\bar{u}_1' A u_1)(\bar{u}_2' B u_2)(\bar{u}_2' C u_1)^* (u_1' D u_2)^*.$$

I primi si riconducono a prodotti di due tracce della forma (66,4), mentre i secondi a tracce della forma

$$\mathrm{Tr}\,(\rho_1' A \rho_1 \bar{C} \rho_2' B \rho_2 \bar{D}).$$

I positroni sono descritti dalle ampiezze « a frequenza negativa » $u(-p)$. Per reazioni con la partecipazione di positroni, l'unica differenza da quanto detto finora consiste nel fatto che come matrici densità occorre usare espressioni, che differiscono dalle (66,5-6) solo per il cambiamento di segno davanti a m (cfr. (29,16-17)).

Esaminiamo ora gli stati di polarizzazione dei fotoni che intervengono nella reazione.

La polarizzazione di ciascuno dei fotoni iniziali entra nell'ampiezza di diffusione linearmente sotto forma del 4-vettore e, mentre la polarizzazione di ciascuno dei fotoni finali entra in essa sotto forma del quadrivettore e^*. In ambedue i casi nella sezione d'urto (cioè nel quadrato $|M_{fi}|^2$) entra il 4-tensore $e_\mu e_\nu^*$. Per passare al caso di uno stato qualsiasi parzialmente polarizzato questo tensore va sostituito con la matrice densità quadridimensionale, cioè con il

4-tensore $\rho_{\mu\nu}$:

$$e_\mu e_\nu^* \to \rho_{\mu\nu}. \tag{66,11}$$

In particolare, per un fotone non polarizzato, in accordo con la (8,15), abbiamo

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \tag{66,12}$$

In tal modo, la media sulle polarizzazioni del fotone si riconduce ad una contrazione tensoriale in $|M_{fi}|^2$ rispetto ai due indici tensoriali $\mu\nu$[1]).

Se si richiede di eseguire non la media ma la somma sulle polarizzazioni del fotone, allora occorre sostituire $e_\mu e_\nu^*$ con l'espressione precedente raddoppiata

$$e_\mu e_\nu^* \to -g_{\mu\nu}. \tag{66,13}$$

La matrice densità di un fotone polarizzato è data dalla formula (8,17). La scelta dei 4-vettori $e^{(1)}$ e $e^{(2)}$, che figurano in questa espressione, è dettata di solito dalle condizioni concrete del problema. In certi casi questi vettori possono essere connessi a determinate direzioni spaziali in un dato sistema di riferimento. In altri casi risulta piú comodo mettere questi vettori in relazione ai 4-vettori caratteristici, che figurano nelle condizioni del problema, i 4-impulsi delle particelle.

Nella (8,17) la polarizzazione del fotone è descritta mediante i parametri di Stokes, che formano il « vettore » $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Come anche per l'elettrone, è necessario distinguere la polarizzazione $\xi^{(f)}$ del fotone finale come tale dalla polarizzazione ξ', rivelata dal detector. Se il quadrato dell'ampiezza di diffusione in funzione del parametro ξ' è noto

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \beta\xi',$$

allora la polarizzazione $\xi^{(f)} = \beta/\alpha$ è del tutto analoga alla formula (66,10).

§ 67. *Invarianti cinematici*

Esaminiamo alcune relazioni cinematiche per i processi di diffusione, per i quali si abbiano due particelle sia nello stato iniziale che in quello finale. Ci riferiamo qui a relazioni che siano una conseguenza solo delle leggi generali di conservazione e quindi valide indipendentemente dal tipo di particelle e dalle leggi della loro interazione.

---

[1]) L'espressione (66,12) riconduce, in un certo senso, il problema del calcolo della media sulle due polarizzazioni realmente possibili del fotone al calcolo della media sulle quattro direzioni indipendenti del 4-vettore e.

Scriviamo la legge di conservazione dell'energia-impulso in forma generale, senza preoccuparci di stabilire quali impulsi siano relativi alle particelle iniziali e quali a quelle finali:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0. \tag{67,1}$$

Qui $\pm q_a$ sono i 4-vettori impulso, dei quali due sono relativi alle particelle incidenti e due alle particelle diffuse; per queste ultime gli impulsi sono $-q_a$. In altre parole, per due dei vettori q_a la componente temporale $q_a^0 > 0$, mentre per gli altri due $q_a^0 < 0$.

Contemporaneamente alla conservazione dell'energia-impulso deve essere osservata la legge di conservazione della carica. Per « carica » si intende qui non solo la carica elettrica ma anche altre quantità conservative che hanno segno diverso per particelle e antiparticelle.

Per un dato tipo di particelle partecipanti al processo, i quadrati dei 4-vettori q_a sono quadrati dati delle masse delle particelle ($q_a^2 = m_a^2$). A seconda dei valori assunti dalle componenti temporali q_a^0, e dei valori delle cariche, si ottengono tre reazioni differenti. Scriviamo questi tre processi come segue:

$$\begin{aligned} &\text{I)}\ 1+2 \to 3+4, \\ &\text{II)}\ 1+\bar{3} \to \bar{2}+4, \\ &\text{III)}\ 1+\bar{4} \to 2+3. \end{aligned} \tag{67,2}$$

Qui il numero individua la particella, la soprallineatura distingue l'antiparticella dalla particella. Al passaggio da una di queste reazioni ad un'altra, cioè al passaggio di una particella dall'una all'altra parte della formula, corrisponde il cambiamento di segno della corrispondente componente temporale q_a^0, e anche del segno della carica, cioè la sostituzione della particella con l'antiparticella. (Oltre ai processi (67,2) sono possibili, ovviamente, anche le reazioni inverse.)

Dei tre processi (67,2) si parla come di tre canali *incrociati* (« *cross-channels* ») di un'unica reazione (generalizzata).

Riportiamo alcuni esempi. Se le particelle 1 e 3 sono elettroni, e le 2 e 4 fotoni, allora il canale I rappresenta la diffusione di un fotone su un elettrone; essendo il fotone una particella realmente neutra, il canale III è lo stesso del canale I. Il canale II invece dà l'annichilazione della coppia elettrone-positrone in 2 fotoni. Se tutte e quattro le particelle sono elettroni, allora il canale I è la diffusione elettrone-elettrone, mentre i canali II e III sono la diffusione positrone-elettrone. Se le particelle 1 e 3 sono elettroni, e le 2 e 4 muoni, allora il canale I è la diffusione dell'elettrone sul muone, il canale III la diffusione di e su $\bar{\mu}$ e il canale II la trasformazione della coppia $e\bar{e}$ nella coppia $\mu\bar{\mu}$.

Nell'esame dei processi di diffusione un ruolo particolare è svolto dalle quantità invarianti, che si possono comporre con i 4-impulsi. Funzioni di queste quantità sono le ampiezze invarianti di diffusione (§ 71).

Con quattro 4-impulsi si possono comporre due quantità invarianti indipendenti. In effetti, in virtú della (67,1) solo tre dei 4-vettori q_a sono indipendenti; siano questi q_1, q_2, q_3. Con questi vettori si possono formare sei invarianti: i tre quadrati q_1^2, q_2^2, q_3^2 e i tre prodotti q_1q_2, q_1q_3, q_2q_3. Le prime tre quantità sono i quadrati dati delle masse, mentre le seconde tre sono legate da una relazione, che discende dall'uguaglianza[1])

$$(q_1+q_2+q_3)^2=q_4^2=m_4^2.$$

Per avere una maggiore simmetria è comodo considerare non due ma tre invarianti, scelti nel seguente modo:

$$\begin{aligned} s&=(q_1+q_2)^2=(q_3+q_4)^2,\\ t&=(q_1+q_3)^2=(q_2+q_4)^2,\\ u&=(q_1+q_4)^2=(q_2+q_3)^2. \end{aligned} \tag{67,3}$$

Essi sono legati, come è facile vedere, dalla relazione

$$s+t+u=h, \tag{67,4}$$

dove

$$h=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2. \tag{67,5}$$

Nel canale fondamentale (I) l'invariante s ha un senso fisico molto semplice. Esso dà il quadrato dell'energia totale delle particelle collidenti (1 e 2) nel sistema del loro baricentro (per $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=0$: $s=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2$). Nel canale II il ruolo analogo è svolto dall'invariante t, e nel canale III dall'invariante u. In relazione a questo, i canali I, II, III sono spesso chiamati canali s, t, u.

Non è difficile esprimere tutti gli invarianti s, t, u attraverso l'energia e l'impulso delle particelle collidenti in ognuno dei canali. Esaminiamo il canale s. Nel sistema di baricentro delle particelle 1 e 2 le componenti temporali e spaziali dei 4-vettori q_a sono date

---

[1]) Nel caso generale, quando nella reazione intervengono $n \geqslant 4$ particelle, il numero delle variabili invarianti funzionalmente indipendenti è uguale a $3n-10$. Si hanno infatti in totale $4n$ grandezze, le componenti di n 4-impulsi q_a. Tra queste grandezze si hanno n legami funzionali $q_a^2=m_a^2$ e ancora 4 relazioni date dalla legge di conservazione $\sum_{a=1}^{n} q_a=0$. Valori arbitrari possono venire assegnati a 6 grandezze, in accordo col numero di parametri che determinano una trasformazione generale di Lorentz (una rotazione quadridimensionale). Perciò il numero di variabili invarianti indipendenti è uguale a

$$4n-n-4-6=3n-10.$$

nel seguente modo:

$$q_1 = p_1 = (\varepsilon_1, \boldsymbol{p}_s), \qquad q_2 = p_2 = (\varepsilon_2, -\boldsymbol{p}_s),$$
$$q_3 = -p_3 = (-\varepsilon_3, -\boldsymbol{p}'_s), \qquad q_4 = -p_4 = (-\varepsilon_4, \boldsymbol{p}'_s) \tag{67,6}$$

(gli indici s apposti a $\boldsymbol{p}_s$ e $\boldsymbol{p}'_s$ ricordano che questi impulsi si riferiscono ad una reazione nel canale s). Allora

$$s = \varepsilon_s^2, \qquad \varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4; \tag{67,7}$$

$$4s\boldsymbol{p}_s^2 = [s - (m_1 + m_2)^2]\,[s - (m_1 - m_2)^2],$$
$$4s\boldsymbol{p}_s'^2 = [s - (m_3 + m_4)^2]\,[s - (m_3 - mm_4)^2]; \tag{67,8}$$

$$2t = h - s + 4\boldsymbol{p}_s\boldsymbol{p}'_s - \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2),$$
$$2u = h - s - 4\boldsymbol{p}_s\boldsymbol{p}'_s + \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2). \tag{67,9}$$

Nel caso di diffusione elastica ($m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$) abbiamo $|\boldsymbol{p}_s| = |\boldsymbol{p}'_s|$; quindi $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$. Al posto della (67,9) si ottengono allora formule più semplici

$$t = -(\boldsymbol{p}_s - \boldsymbol{p}'_s)^2 = -2\boldsymbol{p}_s^2(1 - \cos\theta_s),$$
$$u = -2\boldsymbol{p}_s^2(1 + \cos\theta_s) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2, \tag{67,10}$$

dove θ_s è l'angolo tra $\boldsymbol{p}_s$ e $\boldsymbol{p}'_s$. Notiamo che l'invariante $-t$ rappresenta il quadrato dell'impulso trasferito (tridimensionale) nella collisione.

Formule analoghe per gli altri canali si ottengono con un semplice cambiamento delle notazioni. Per passare al canale t occorre operare nella (67,6-10) la sostituzione $s \leftrightarrow t$, $2 \leftrightarrow 3$; per passare al canale u è necessaria la sostituzione $s \leftrightarrow u$, $2 \leftrightarrow 4$.

§ 68. *Domini fisici*

Nel considerare le ampiezze di diffusione come funzioni delle variabili indipendenti s, t, u (connesse tra loro solo dalla relazione $s + t + u = h$), noi dobbiamo necessariamente distinguere i domini ammessi e quelli non ammessi dei valori di tali variabili. I valori, che possono rispondere a un processo fisico di diffusione, devono soddisfare a determinate condizioni, che sono conseguenze della legge di conservazione dell'energia-impulso e del fatto che il quadrato di ciascuno dei 4-vettori q_a è uguale ad una quantità data: $q_a^2 = m_a^2$.

Per il prodotto di due 4-impulsi abbiamo

$$p_a p_b \geqslant m_a m_b. \tag{68,1}$$

Quindi abbiamo

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a + p_b)^2 \geqslant (m_a + m_b)^2,$$

se $q_a = p_a$, $q_b = p_b$ (oppure $q_a = -p_a$, $q_b = -p_b$), oppure

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a - p_b)^2 \leqslant (m_a - m_b)^2,$$

se $q_a = p_a$, $q_b = -p_b$. Da qui discende che per le reazioni nel canale s valgono le relazioni

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2)^2 \leqslant s \geqslant (m_3 + m_4)^2, \\ &(m_1 - m_3)^2 \geqslant t \leqslant (m_2 - m_4)^2 \\ &(m_1 - m_4)^2 \geqslant u \leqslant (m_2 - m_3)^2 \end{aligned} \tag{68,2}$$

(disuguaglianze analoghe valgono anche nei canali t e u).

Per determinare le altre condizioni formiamo il 4-vettore L, duale del prodotto di tre quadrivettori q_a qualsiasi, per esempio

$$L_\lambda = e_{\lambda\mu\nu\rho} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho. \tag{68,3}$$

Nel sistema di quiete di una delle particelle (diciamo, della particella 1) $q_1 = (q_1^0, 0)$. In questo caso, L ha solo le componenti spaziali $L_i = e_{i0kl} q_1^0 q_2^k q_3^l$. In altre parole, L è un vettore del genere spazio, e in tutti i sistemi di riferimento $L^2 \leqslant 0$. Svilluppando il quadrato L^2, troviamo la condizione

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3^2 \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{68,4}$$

Essa può venire espressa attraverso gli invarianti s, t, u in una forma unica per tutti i canali

$$stu \geqslant as + bt + cu, \tag{68,5}$$

dove

$$\begin{aligned} ah &= (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)\,(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2), \\ bh &= (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)\,(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - {}_4^2), \\ ch &= (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)\,(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2) \end{aligned} \tag{68,6}$$

(*T. W. B. Kibble*, 1960).

Per la rappresentazione grafica dei domini di variazione delle variabili s, t, u è comodo ricorrere alle cosiddette coordinate triangolari nel piano di Mandelstam (*S. Mandelstam*, 1958). In questo piano gli assi coordinati sono dati da tre rette che formano, intersecandosi, un triangolo equilatero. Le coordinate s, t, u sono misurate su direzioni perpendicolari a queste tre rette (considerando positive le direzioni verso l'interno del triangolo, come è indicato nella fig. 7 dalle freccette). In altre parole, ad ogni punto del piano corrispondono dei valori s, t, u, dati graficamente (con i relativi segni) dalle lunghezze delle perpendicolari abbassate sui tre assi. Il soddisfacimento della condizione $s + t + u = h$ è garantito da un noto

teorema di geometria (se l'altezza del triangolo equilatero è uguale a h)[1]).

Esaminiamo il caso, molto importante, in cui al canale principale (s) corrisponde la diffusione elastica; in questo caso le masse delle particelle sono a due a due uguali:

$$m_1 = m_3 \equiv m, \quad m_2 = m_4 \equiv \mu. \tag{68,7}$$

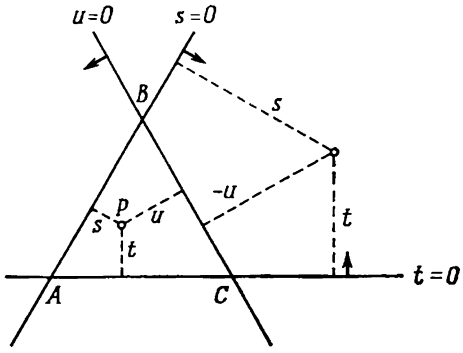


Fig. 7

Sia $m > \mu$. Nella condizione (68,5) abbiamo

$$h = 2(m^2 + \mu^2), \qquad a = c = 0,$$
$$b = (m^2 - \mu^2)^2,$$

e di conseguenza

$$sut \geqslant (m^2 - \mu^2)^2 t. \tag{68,8}$$

La frontiera del dominio, determinata da questa disuguaglianza, è costituita dalla retta $t = 0$ e dall'iperbole

$$su = (m^2 - \mu^2)^2, \tag{68,9}$$

i due rami della quale giacciono nei settori $u < 0$, $s < 0$ e $s > 0$, $u > 0$; gli assi $s = 0$ e $u = 0$ sono gli asintoti dell'iperbole. Invece della (68,8) si può scrivere

$$t > 0, \ su > (m^2 - \mu^2)^2 \quad \text{oppure} \quad t < 0, \ su < (m^2 - \mu^2)^2.$$

Inoltre, in base alle condizioni (68,2), occorre tenere ancora conto della disuguaglianza $s > (m + \mu)^2$ nel canale s e $u > (m + \mu)^2$ nel canale u; le altre disuguaglianze sono automaticamente soddisfatte. In conclusione troviamo che ai canali I, II, III (s, t, u) corrispondono i *domini fisici* rappresentati nella fig. 8 dalle parti tratteggiate.

Se $\mu = 0$ (le particelle 2, 4 sono dei fotoni), allora il ramo inferiore dell'iperbole è tangente all'asse $t = 0$, e i domini fisici sono le parti tratteggiate nella fig. 9.

Se $\mu = m$, allora le frontiere del dominio (68,8) sono gli stessi assi coordinati, e i domini fisici sono i tre settori indicati nella fig. 10.

---

[1]) Unendo, ad esempio, il punto P (fig. 7) con i tre vertici del triangolo ABC, noi dividiamo quest'ultimo in tre triangoli di altezze s, t, u; uguagliando la somma delle loro aree all'area del triangolo ABC si trova l'uguaglianza richiesta. Analogamente essa si dimostra per il caso in cui il punto P giaccia fuori dal triangolo ABC.

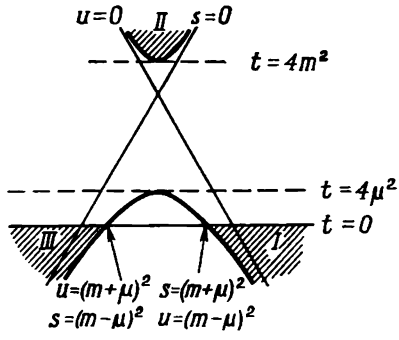


Fig. 8

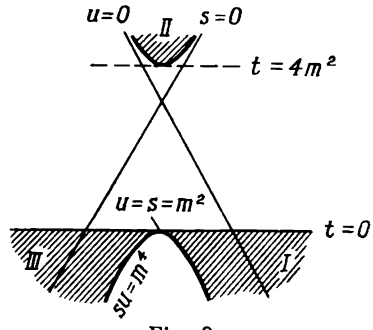


Fig. 9

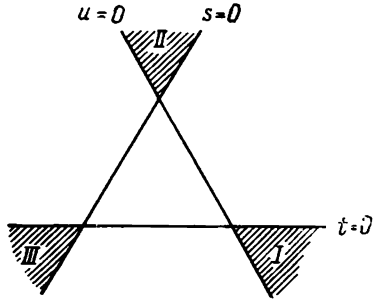


Fig. 10

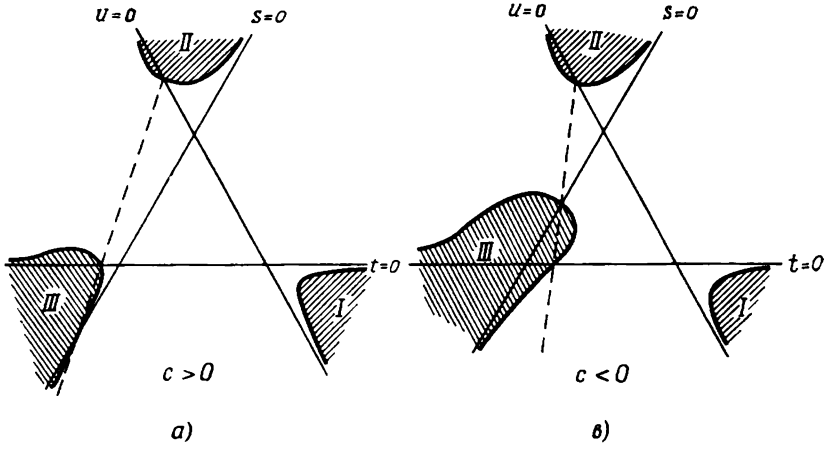


Fig. 11

Nel caso generale di quattro masse differenti l'equazione

$$stu = as + bt + cu \tag{68,10}$$

determina una curva del terzo ordine, i cui rami delimitano i domini fisici dei tre canali come è mostrato nella fig. 11. Sia

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3 \geqslant m_4,$$

allora

$$a \geqslant b \geqslant c, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

La curva (68,10) interseca gli assi coordinati in punti che giacciono sulla retta

$$as + bt + cu = 0.$$

A seconda del segno di c, essa è situata come è mostrato rispettivamente nella fig. 11, a e 11, b. Per $c < 0$ il dominio fisico del canale u va ad occupare una parte dell'area del triangolo delle coordinate; in altre parole, in questo caso, le quantità s, t, u possono essere simultaneamente positive. Tutti e tre i rami della curva di frontiere hanno come asintoto gli assi coordinati corrispondenti (come è facile convincersi eliminando dall'equazione (68,10) una delle variabili mediante la relazione $s + t + u = h$ e facendo quindi tendere all'infinito una delle variabili rimaste). Le condizioni (68,2) nel caso generale, non introducono niente di nuovo rispetto alle frontiere determinate dall'equazione (68,10). Le rette, corrispondenti ai segni di uguaglianza nella (68,2), non intersecano i domini fisici tratteggiati nella fig. 11, a, b; alcune di esse sono tangenti alle frontiere di questi domini, e corrispondono ai valori estremi delle variabili s, t, oppure u nel canale corrispondente.

Nel caso in cui la massa di una delle particelle sia maggiore della somma delle masse delle altre tre ($m_1 > m_2 + m_3 + m_4$) oltre ai canali I, II, III è possibile anche un quarto canale di reazione, relativo al decadimento

$$\text{IV)}\ 1 \to \bar{2} + 3 + 4. \tag{68,11}$$

Per questo canale, nel sistema di quiete della particella che decade, abbiamo

$$q_1 = (m_1, 0), \qquad q_2 = (-\varepsilon_2, -p_2),$$
$$q_3 = (-\varepsilon_3, -p_3), \quad q_4 = (-\varepsilon_4, -p_4),$$
$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = m_1, \quad p_2 + p_3 + p_4 = 0.$$

Gli invarianti sono

$$\begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 - 2m_1\varepsilon_2, \\ t &= m_1^2 + m_3^2 - 2m_1\varepsilon_3, \\ u &= m_1^2 + m_4^2 - 2m_1\varepsilon_4. \end{aligned} \tag{68,12}$$

Dalla (68,1) otteniamo ora

$$\begin{aligned}(m_3+m_4)^2 &\leqslant s \leqslant (m_1-m_2)^2,\\ (m_2+m_4)^2 &\leqslant t \leqslant (m_1-m_3)^2,\\ (m_2+m_3)^2 &\leqslant u \leqslant (m_1-m_4)^2.\end{aligned} \tag{68,13}$$

In tal modo, tutti e tre gli invarianti sono positivi, e quindi il dominio fisico del canale di decadimento si trova all'interno del triangolo delle coordinate. Esso è delimitato da una curva chiusa, che si ottiene dalla (68, 10).

PROBLEMI

1. Trovare i domini fisici nel caso di tre masse uguali: $m_1 \equiv m$, $m_2 = m_3 = m_4 \equiv \mu$ (ad esempio, la reazione $K + \pi \to \pi + \pi$).

Soluzione. L'equazione (68,10) assume la forma

$$stu = \mu^2 (m^2-\mu^2)^2 \tag{1}$$

e si ha la relazione

$$s + t + u = 3\mu^2 + m^2.$$

I domini I, II, III sono delimitati da curve di forma uguale (per I: $s > 0$, $t < 0$, $u < 0$, e analogamente per II e III). Se $m > 3\mu$, allora la (1) ha anche un ramo (una curva chiusa) per il quale $s > 0$, $t > 0$, $u > 0$, e che rappresenta il dominio del canale IV (fig. 12).

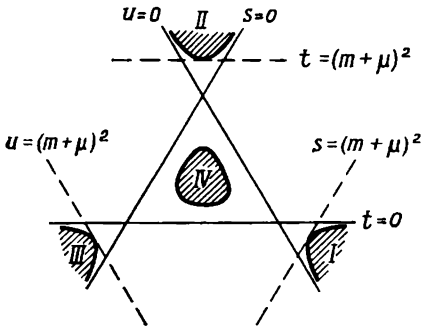


Fig. 12

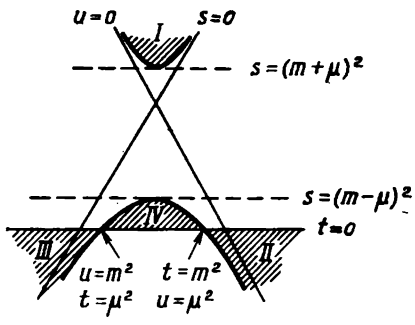


Fig. 13

2. Rispondere allo stesso quesito per il caso $m_1 \equiv m$, $m_2 \equiv \mu$, $m_3 = m_4 = 0$, $m > \mu$ (ad esempio, la reazione $\mu + \nu \to e + \nu$).

Soluzione. La condizione (68,5) assume la forma

$$stu \geqslant m^2\mu^2 s$$

e si ha la relazione $s + t + u = m^2 + \mu^2$. I domini fisici sono delimitati dall'asse $s = 0$ e dai due rami dell'iperbole $tu = m^2\mu^2$ (fig. 13).

3. Lo stesso per il caso $m_1 = m_3 \equiv m$, $m_2 = 0$, $m_4 \equiv \mu$, $m > 2\mu$ (ad esempio, la reazione $p + \gamma \to p + \pi^0$).

Soluzione. L'equazione (68,10) assume la forma

$$stu = a(s + u) + bt,$$

$$ah = m^2\mu^4,\ bh = m^4(2m^2 - \mu^2);\ h = 2m^2 + \mu^2.$$

Eliminando u otteniamo

$$t^2 + \left(\frac{b-a}{s} + s - h\right)t + \frac{ah}{s} = 0.$$

Per un dato s questa è un'equazione quadratica rispetto a t. Per $s > (m + \mu)^2$ (dominio del canale s) ad ogni s corrispondono due valori negativi di t. Per $s = (m + \mu)^2$ queste due radici dell'equazione quadratica coincidono: $t = -m\mu^2/(m + \mu)$. Il dominio del canale s ha la forma mostrata nella fig. 14.

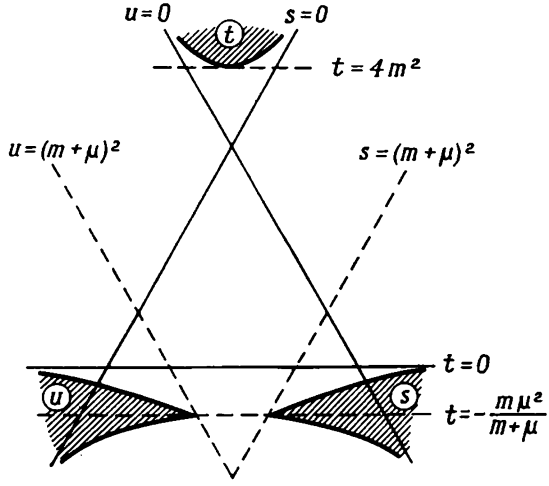


Fig. 14

Il ramo inferiore della curva di frontiera si avvicina asintoticamente all'asse $u = 0$, e quello superiore interseca questo asse nel punto $t = \mu^4/(\mu^2 - m^2)$.

Il dominio del canale u è simmetrico al dominio del canale s, e il dominio del canale t è disposto come mostra la figura.

§ 69. *Sviluppo in ampiezze parziali*

Un punto essenziale nello studio di reazioni del tipo

$$a + b \to c + d \tag{69,1}$$

è costituito dallo sviluppo dell'ampiezza di diffusione in ampiezze parziali, ognuna delle quali corrisponde (per una data energia totale ε) ad un valore determinato del momento angolare totale delle particelle J nel sistema del loro baricentro[1]).

---

[1]) La maggior parte dei risultati esposti nei §§ 69, 70, sono stati ottenuti da *M. Jacob, G. C. Wick* (1959).

Queste ampiezze parziali sono, in altre parole, elementi della matrice S nella rappresentazione del momento angolare

$$\langle \varepsilon J'M' \,|\, S \,|\, \varepsilon JM \rangle.$$

Poiché il momento angolare J e la sua proiezione su un dato asse z si conservano, la matrice S è diagonale rispetto a questi numeri (come anche rispetto all'energia ε). Inoltre, per l'isotropia dello spazio, gli elementi diagonali non dipendono dal valore di M. Per J, M, ε assegnati la matrice di diffusione rimane ancora matrice rispetto ai numeri quantici di spin; gli elementi di tale matrice noi li scriveremo in una forma piú breve

$$\langle \varepsilon JM\lambda' \,|\, S \,|\, \varepsilon JM\lambda \rangle \equiv \langle \lambda' \,|\, S'(\varepsilon) \,|\, \lambda \rangle, \tag{69,2}$$

dove λ e λ' indicano tutti i numeri quantici di spin. La cosa piú naturale è prendere per questi ultimi le elicità delle particelle. Ricordiamo che l'elicità (a differenza della proiezione dello spin su un asse qualsiasi nello spazio) per una particella libera si conserva e che, inoltre, essa commuta sia con l'impulso che con il momento angolare (§ 16). Perciò le elicità possono venire usate sia nella rappresentazione degli impulsi che nella rappresentazione del momento angolare della matrice di diffusione.

Chiameremo gli elementi della matrice S rispetto agli indici delle elicità, *ampiezze di diffusione nella rappresentazione delle elicità* e, in tal modo, per λ e λ' intenderemo l'insieme delle elicità delle particelle iniziali e finali: $\lambda = (\lambda_a, \lambda_b)$, $\lambda' = (\lambda_c, \lambda_d)$.

Nella rappresentazione degli impulsi gli elementi della matrice di diffusione sono definiti rispetto agli stati $|\, \varepsilon\, \boldsymbol{n}\lambda \rangle$ (dove $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ è la direzione dell'impulso del moto relativo nel sistema del baricentro) mentre nella rappresentazione del momento angolare sono definiti rispetto agli stati $|\, \varepsilon JM\lambda \rangle$. Essi si esprimono l'uno attraverso l'altro sotto forma di sviluppi

$$|\, JM\lambda \rangle = \int |\, \boldsymbol{n}\lambda \rangle \langle \boldsymbol{n}\lambda \,|\, JM\lambda \rangle \, do_{\boldsymbol{n}}, \tag{69,3}$$

dove l'integrazione è eseguita rispetto alla direzione $\boldsymbol{n}$ (nei simboli degli stati ometteremo per brevità l'energia ε). In virtú dell'unitarietà di questa trasformazione (vedi III, § 12) i coefficienti della trasformazione inversa sono

$$\langle JM\lambda \,|\, \boldsymbol{n}\lambda \rangle = \langle \boldsymbol{n}\lambda \,|\, JM\lambda \rangle^*. \tag{69,4}$$

Secondo la regola generale di trasformazione delle matrici, questi stessi coefficienti determinano il legame tra gli elementi della matrice S nelle due rappresentazioni

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' \,|\, S \,|\, \boldsymbol{n}\lambda \rangle = \sum_{JM} \langle \boldsymbol{n}'\lambda' \,|\, JM\lambda' \rangle \langle JM\lambda' \,|\, S \,|\, JM\lambda \rangle \langle JM\lambda \,|\, \boldsymbol{n}\lambda \rangle. \tag{69,5}$$

I coefficienti dello sviluppo (69,3) si possono facilmente trovare usando i risultati del § 16.

Assumiamo ora che le funzioni d'onda di tutti gli stati siano espresse nella rappresentazione degli impulsi, cioè come funzioni della direzione dell'impulso (per una data energia); questa direzione, considerata come variabile indipendente, sarà indicata con $\boldsymbol{\nu}$, per distinguerla da $\boldsymbol{n}$, che indica la direzione come numero quantico di stato. In questa rappresentazione la funzione d'onda ha la forma (16,2)

$$\psi_{n\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = u^{(\lambda)}\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n}). \tag{69,6}$$

Sostituendo la (69,6) nello sviluppo (69,3), quest'ultimo si riduce ad un solo termine

$$\psi_{JM\lambda} = \langle \boldsymbol{\nu}\lambda \,|\, JM\lambda\rangle\, u^{(\lambda)}. \tag{69,7}$$

Le elicità λ_a e λ_b di ciascuna delle due particelle sono definite come la proiezione del loro spin sulla direzione del loro impulso. Se gli impulsi delle particelle sono $\boldsymbol{p}_a \equiv \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_b = -\boldsymbol{p}$, allora per la prima particella questa direzione è $\boldsymbol{n}$, e per la seconda è $-\boldsymbol{n}$. Se consideriamo ora il sistema come una particella di elicità Λ nella direzione $\boldsymbol{n}$, allora $\Lambda = \lambda_a - \lambda_b$. La sua funzione d'onda (nella rappresentazione degli impulsi) può essere rappresentata, secondo la (16,4), nella forma

$$\psi_{JM\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = u^{(\lambda)} D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{\nu}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}. \tag{69,8}$$

Confrontando le due espressioni (69,7-8) (e cambiando la notazione della variabile $\boldsymbol{\nu}$ in $\boldsymbol{n}$), per i coefficienti cercati troviamo

$$\langle \boldsymbol{n}\lambda \,|\, JM\lambda\rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\, D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n}). \tag{69,9}$$

Sostituendo questi coefficienti nella (69,5) troviamo

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' \,|\, S \,|\, \boldsymbol{n}\lambda\rangle = \sum_{JM} \frac{2J+1}{4\pi} D^{(J)*}_{\Lambda' M}(\boldsymbol{n}')\, D^{(J)*}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n})\, \langle \lambda' \,|\, S^J \,|\, \lambda\rangle, \tag{69,10}$$

$$\Lambda = \lambda_a - \lambda_b, \quad \Lambda' = \lambda_c - \lambda_d,$$

dove è stata usata la notazione abbreviata (69,2). Scegliendo la direzione $\boldsymbol{n}$ come asse z abbiamo

$$D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n}) = \delta_{\Lambda M}$$

e la (69,10) assume la forma

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' \,|\, S \,|\, \boldsymbol{n}\lambda\rangle = \sum_{J} \frac{2J+1}{4\pi}\, D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}(\boldsymbol{n}')\, \langle \lambda' \,|\, S^J \,|\, \lambda\rangle. \tag{69,11}$$

Noi vediamo che lo sviluppo in ampiezze parziali ha per coefficienti le funzioni $D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}$. Per reazioni del tipo (69,1) è comodo definire l'ampiezza di diffusione f in modo che la sezione d'urto (nel sistema del baricentro) sia

$$d\sigma = |\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | f | \boldsymbol{n}\lambda\rangle|^2 \, do' \tag{69,12}$$

(confrontando con la (65,19) si può stabilire il legame tra questa ampiezza e gli elementi di matrice M_{fi}). Scriviamo il suo sviluppo in ampiezze parziali nella forma

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | f | \boldsymbol{n}\lambda\rangle = \sum_{JM} (2J+1)\, D^{(J)}_{\Lambda'M}(\boldsymbol{n}')\, D^{(J)*}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n})\, \langle \lambda' | f^J | \lambda\rangle, \tag{69,13}$$

oppure, assumendo l'asse z diretto secondo $\boldsymbol{n}$,

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | f | \boldsymbol{n}\lambda\rangle = \sum_{J} (2J+1)\, D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}(\boldsymbol{n}')\, \langle \lambda' | f^J | \lambda\rangle. \tag{69,14}$$

Questa formula rappresenta la generalizzazione dello sviluppo in ampiezze parziali per la diffusione di particelle prive di spin (vedi III (123,14)). Poiché $D^{(L)}_{00} = P_L(\cos\theta)$, allora per spin nulli la (69,14) diventa lo sviluppo in polinomi di Legendre

$$f(\theta) = \sum_{L} (2L+1)\, f_L P_L(\cos\theta).$$

La sezione d'urto (69,12) si riferisce al caso in cui tutte le particelle hanno elicità determinate. Se invece le particelle si trovano in stati di polarizzazione miscelati, allora la sezione d'urto si ottiene mediando il prodotto

$$\langle \lambda_c\lambda_d | f | \lambda_a\lambda_b\rangle \langle \lambda_c'\lambda_d' | f | \lambda_a'\lambda_b'\rangle^*$$

sulle matrici densità di polarizzazione delle particelle

$$\langle \lambda_a | \rho^{(a)} | \lambda_a'\rangle \langle \lambda_b | \rho^{(b)} | \lambda_b'\rangle \langle \lambda_c' | \rho^{(c)} | \lambda_c\rangle \langle \lambda_d' | \rho^{(d)} | \lambda_d\rangle$$

(vedi nota a pag. 207). Cosí, per una reazione tra particelle non polarizzate a e b con generazione di particelle non polarizzate c e d, otteniamo

$$d\sigma = \frac{do}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \sum_{(\lambda)} \sum_{JJ'} (2J+1)(2J'+1) \times$$
$$\times \langle \lambda_c\lambda_d | f^J | \lambda_a\lambda_b\rangle \langle \lambda_c\lambda_d | f^{J'} | \times$$
$$\times \lambda_a\lambda_b\rangle^* \, D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}(\boldsymbol{n}')\, D^{(J')*}_{\Lambda'\Lambda}(\boldsymbol{n}') \tag{69,15}$$

(l'asse z è diretta secondo $\boldsymbol{n}$, il simbolo $\sum_{(\lambda)}$ indica la sommatoria su $\lambda_a\lambda_b\lambda_c\lambda_d$). Sostituendo la funzione $D^{(J')*}_{\Lambda'\Lambda}$ in accordo con la III (58,19)

e usando poi lo sviluppo III (110,2), otteniamo in definitiva

$$d\sigma = \frac{do}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \sum_{(\lambda)JJ'} (-1)^{\Lambda-\Lambda'} (2J+1)(2J'+$$

$$+1) \langle \lambda_c \lambda_d | f^J | \lambda_a \lambda_b \rangle \langle \lambda_c \lambda_d | f^{J'} | \times$$

$$\times \lambda_a \lambda_b)^* \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} J & J' & L \\ \Lambda & -\Lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & J' & L \\ \Lambda' & -\Lambda' & 0 \end{pmatrix} P_L(\cos\theta) \qquad (69,16)$$

(θ è l'angolo tra $\boldsymbol{n}'$ e l'asse z); la sommatoria rispetto a L è fatta su tutti i valori interi, che si ottengono componendo vettorialmente J con J'.

Lo sviluppo dell'ampiezza di diffusione in ampiezze parziali tiene conto completamente di tutte le proprietà della distribuzione angolare della diffusione, connesse alla simmetria rispetto alle rotazioni spaziali. Esso, tuttavia, non tiene conto esplicitamente delle proprietà connesse alla simmetria rispetto alla riflessione spaziale. L'invarianza P (se l'interazione gode di essa) porta a determinate relazioni tra le diverse ampiezze nella rappresentazione delle elicità (vedi piú avanti, § 70).

§ 70. *Simmetria delle ampiezze di diffusione nella rappresentazione delle elicità*

Le richieste, imposte dalla simmetria rispetto alle trasformazioni P, T, C (se, naturalmente, il processo considerato di interazione tra particelle gode effettivamente di questa simmetria), portano a determinate relazioni tra le diverse ampiezze di diffusione nella rappresentazione delle elicità e, di conseguenza, diminuiscono il numero delle ampiezze indipendenti[1]).

Per stabilire queste relazioni chiariamo dapprima le proprietà degli stati di elicità di un sistema di due particelle.

Consideriamo le particelle nel sistema del loro baricentro. Una delle particelle ha impulso $\boldsymbol{p}_1 \equiv \boldsymbol{p}$ e elicità λ_1 rispetto alla direzione $\boldsymbol{p}$, l'altra ha impulso $\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}$ e elicità λ_2 rispetto alla direzione $-\boldsymbol{p}$. Se ci si riferisce invece alla elicità di ambedue le particelle rispetto alla stessa direzione $\boldsymbol{p}$, allora esse saranno λ_1 e $-\lambda_2$. In accordo con questo, esse saranno descritte da onde piane di ampiezza $u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1)}$ e $u_{\boldsymbol{p}}^{(-\lambda_2)}$. Il sistema delle due particelle è descritto dalla funzione (a piú componenti) $u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1\lambda_2)}$, composta dai prodotti delle ampiezze $u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1)}$ e $u_{\boldsymbol{p}}^{(-\lambda_2)}$.

---

[1]) Il numero di ampiezze indipendenti non dipende, ovviamente, dalla rappresentazione concreta della matrice S^J e rimane invariato per qualsiasi scelta delle variabili di spin.

Considerando ora il sistema come un'unica particella di elicità $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ sulla direzione $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$, noi possiamo scrivere la funzione d'onda (nella rappresentazione degli impulsi, cioè come funzione di $\boldsymbol{n}$) per lo stato di dati valori $J, M, \lambda_1, \lambda_2$ assegnati (e con energia totale ε) nella forma

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = u_p^{(\lambda_1\lambda_2)} D_{\Lambda M}^{(J)}(\boldsymbol{n}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}},$$
$$\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \tag{70,1}$$

(cfr. la (69,8)). Poiché Λ è la proiezione del momento angolare totale su $\boldsymbol{p}$, deve valere la relazione

$$|\Lambda| \leqslant J. \tag{70,2}$$

Secondo la (16,14), per la riflessione spaziale si ha

$$\mathrm{P}u^{(\lambda_1\lambda_2)'}(\boldsymbol{n}) = \eta_1\eta_2 u^{(\lambda_1\lambda_2)}(-\boldsymbol{n}) = \eta_1\eta_2 (-1)^{s_1+s_2-\lambda_1+\lambda_2} u^{(-\lambda_1-\lambda_2)}(\boldsymbol{n}), \tag{70,3}$$

dove η_1, η_2 sono le parità intrinseche delle particelle. Utilizzando anche la (16,10), si trova la legge di trasformazione delle funzioni (70,1):

$$\mathrm{P}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = \eta_1\eta_2 (-1)^{s_1+s_2-J} \psi_{JM-\lambda_1-\lambda_2}. \tag{70,4}$$

Se le due particelle sono identiche, allora sorge il problema della simmetria rispetto alla loro permutazione. Lo scambio di posto delle particelle significa lo scambio dei loro impulsi e dei loro spin. Per chiarire il senso di questa operazione in relazione alla funzione (70,1) notiamo che nella definizione stessa di quest'ultima è contenuta una certa asimmetria, consistente nel fatto che i momenti di ambedue le particelle vengono proiettati sulla direzione di uno stesso vettore $\boldsymbol{p}_1 \equiv \boldsymbol{p}$, che è l'impulso di una (la prima) delle particelle. Dopo la permutazione il posto di questo vettore verrà preso dal vettore $\boldsymbol{p}_2 \equiv -\boldsymbol{p}$; le proiezioni dei momenti $\boldsymbol{j}_1$ e $\boldsymbol{j}_2$ su questo vettore saranno $-\lambda_1$ e λ_2 (invece delle proiezioni λ_1 e $-\lambda_2$ su $\boldsymbol{p}$). Perciò il risultato dell'azione dell'operatore di scambio delle particelle (P_{12}) sulla funzione (70,1) può essere scritto come

$$\mathrm{P}_{12}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = u^{(-\lambda_2-\lambda_1)}(-\boldsymbol{n}) D_{\Lambda M}^{(J)}(-\boldsymbol{n}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}$$

(dove, come prima, $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$). Usando poi la (70,3) e la (16,10) troviamo

$$\mathrm{P}_{12}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{2s-J} \psi_{JM\lambda_2\lambda_1}, \tag{70,5}$$

dove $s_1 = s_2 \equiv s$.

Per particelle identiche sono ammessi solo stati simmetrici (per bosoni) e solo stati antisimmetrici (per fermioni) rispetto allo scam-

bio delle particelle. Poiché il primo di questi casi corrisponde a spin s intero e il secondo a spin s semintero, allora gli stati possibili di elicità di un sistema di due particelle possono, in ambedue i casi, essere scritti sotto forma di combinazioni lineari

$$[1+(-1)^{2s}P_{12}]\,\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}$$

oppure, secondo la (70,5),

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}+(-1)^J\,\psi_{JM\lambda_2\lambda_1}. \tag{70,6}$$

È notevole il fatto che questa combinazione ha una forma unica per i bosoni e per i fermioni.

Per un sistema particella-antiparticella il risultato dello scambio è espresso sempre dalla formula (70,5). Tuttavia, a differenza del caso di particelle identiche, qui sono ammessi stati che godono di ambedue le simmetrie di scambio, cioè sono possibili le due combinazioni

$$\psi^{\pm}=\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}\pm(-1)\quad\psi_{JM\lambda_2\lambda_1}. \tag{70,7}$$

Questi stati hanno parità di carica C determinata. L'operazione di coniugazione di carica si può rappresentare come il risultato di uno scambio totale di tutte le variabili (di spin e di carica) delle due particelle seguito dallo scambio inverso delle variabili di spin (di elicità). Il risultato della prima operazione deve coincidere col risultato dello scambio per un sistema di due particelle identiche. Da qui è chiaro che se nella (70,7) si prende il segno positivo (che coincide con il segno nello stato (70,6), ammesso per particelle identiche) il sistema avrà parità di carica positiva, mentre se si prende segno negativo il sistema avrà parità di carica negativa

$$C\psi^{\pm}=\pm\,\psi^{\pm}.$$

Esaminiamo, infine, l'operazione di inversione temporale. La funzione d'onda di una particella a riposo di spin s e con proiezione dello spin uguale a σ si trasforma come segue:

$$T\psi_{s\sigma}=(-1)^{s-\sigma}\,\psi_{s,\,-\sigma}$$

(vedi III (60,2)). La funzione d'onda di due particelle nel sistema del loro baricentro può anch'essa venire considerata (rispetto alle proprietà di trasformazione) come la funzione d'onda di una « particella a riposo » di momento J e proiezione M. Per quanto riguarda le elicità λ_1, λ_2, esse non cambiano: l'inversione del tempo cambia il segno dei vettori impulso e momento angolare e quindi i prodotti $\boldsymbol{jp}$ restano invariati. In tal modo, troviamo

$$T\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}=(-1)^{J-M}\,\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}. \tag{70,8}$$

Ora possiamo scrivere immediatamente le relazioni di simmetria per le ampiezze di elicità.

Se l'interazione è P-invariante, allora per la reazione

$$a + b \to c + d$$

le ampiezze di transizione (per dati J e ε) devono coincidere

$$|\lambda_a\lambda_b\rangle \to |\lambda_c\lambda_d\rangle \quad \text{e} \quad \mathrm{P}\,|\lambda_a\lambda_b\rangle \to \mathrm{P}\,|\lambda_c\lambda_d\rangle.$$

Usando la (70,4), troviamo quindi

$$\langle\lambda_c\lambda_d\,|\,S^J\,|\lambda_a\lambda_b\rangle = \frac{\eta_c\eta_d}{\eta_a\eta_b}\,(-1)^{s_c+s_d-s_a-s_b}\times$$
$$\times\,\langle-\lambda_c,\ -\lambda_d\,|\,S^J\,|-\lambda_a,\ -\lambda_b\rangle. \qquad (70,9)$$

Se invece di stati di date elicità si prendono stati di data parità, cioè le combinazioni

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \pm \mathrm{P}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2})$$

(dove $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_a\lambda_b$ oppure $\lambda_c\lambda_d$), allora le ampiezze di transizione, che non conservano la parità, si annulleranno.

L'inversione del tempo trasforma ciascuno degli stati secondo la (70,8) e, inoltre, scambia di posto gli stati iniziali e finali. Perciò l'invarianza T porta alle relazioni

$$\langle\lambda_c\lambda_d\,|\,S^J(\varepsilon)\,|\,\lambda_a\lambda_b\rangle = \langle\lambda_a\lambda_b\,|\,S^J(\varepsilon)\,|\lambda_c\lambda_d\rangle. \qquad (70,10)$$

Queste due ampiezze, tuttavia, si riferiscono a processi differenti (reazione diretta e inversa). Soltanto nel caso di diffusione elastica ambedue i processi in sostanza coincidono, e allora la (70,10) rappresenta una determinata relazione tra le ampiezze nella rappresentazione delle elicità dell'una e dell'altra reazione.

Nella diffusione elastica di due particelle identiche il numero di ampiezze differenti diminuisce ulteriormente in virtú della simmetria di scambio. Noi abbiamo visto che, per un dato J, si realizzano stati o solo simmetrici o solo antisimmetrici rispetto a λ_1, λ_2. Perciò la conservazione del momento angolare significa automaticamente la conservazione anche della simmetria rispetto allo scambio delle elicità.

Una situazione analoga ha luogo nella diffusione elastica particella-antiparticella (oppure nella trasformazione di tale coppia in un'altra coppia, cioè in una reazione del tipo $a + \bar{a} \to b + \bar{b}$). Per un dato J esistono stati sia simmetrici che antisimmetrici rispetto a λ_1, λ_2, ma a questi stati corrispondono valori diversi di parità di carica del sistema. Da qui segue che, se l'interazione tra le particelle è C-invariante, e quindi la parità di carica si conserva, allora le transizioni tra stati di diversa simmetria rispetto a λ_1, λ_2 sono vieta-

te[1]). Sottolineiamo, tuttavia, la differenza che c'è rispetto al caso di particelle identiche, quando per un dato J gli stati di una delle simmetrie vengono a mancare completamente. Nel caso di « particella-antiparticella » sono vietate solo le transizioni tra stati di simmetria differente, sebbene questi stati (per ogni J) esistano. In virtú della universalità dell'invarianza CPT, l'esistenza dell'invarianza T significa anche l'invarianza CP. Quest'ultima porta all'uguaglianza delle ampiezze di due reazioni, delle quali una si ricava dall'altra mediante la sostituzione di tutte le particelle con le rispettive antiparticelle (e mediante il cambiamento di segno delle elicità):

$$\langle \lambda_c \lambda_d \,|\, S^J \,|\, \lambda_a \lambda_b \rangle = \langle \lambda_{\bar{c}} \lambda_{\bar{d}} \,|\, S^J \,|\, \lambda_{\bar{a}} \lambda_{\bar{b}} \rangle, \tag{70,11}$$

dove $\lambda_{\bar{a}} = -\lambda_a, \ldots$[2]).

Il numero delle ampiezze indipendenti è uguale per tutti i canali incrociati di una stessa reazione generalizzata; perciò per determinare questo numero si può prendere in esame uno qualsiasi dei canali. Per esempio, con un uguale numero di ampiezze indipendenti si descrivono la diffusione elastica $a + b \to a + b$ e l'annichilazione $a + \bar{a} \to b + \bar{b}$. Le limitazioni, imposte dall'invarianza T nel primo caso, sono equivalenti alle limitazioni, imposte dall'invarianza C nel secondo.

Soffermiamoci ancora sulla reazione di disintegrazione di una particella in due particelle: $a \to b + c$. Nel sistema del baricentro (il sistema di quiete della particella a) abbiamo $\boldsymbol{p}_b = -\boldsymbol{p}_c$. Moltiplicando l'uguaglianza $\boldsymbol{j}_a = \boldsymbol{j}_b + \boldsymbol{j}_c$ per $\boldsymbol{p}_b$ otteniamo

$$\lambda_a = \lambda_b - \lambda_c \tag{70,12}$$

(la elicità λ_a della particella primaria è determinata come la proiee zione del suo spin sulla direzione dell'impulso di una delle particella secondarie). Questa relazione è, per cosí dire, la conseguenza di unsimmetria addizionale, di cui gode il processo considerato: la simmetria assiale rispetto alla direzione di $\boldsymbol{p}_b$ e $\boldsymbol{p}_c$. Se lo spin della particella originaria $s_a < s_b + s_c$, allora la relazione (70,12) diminuisce il numero degli insiemi ammissibili dei valori di λ_a, λ_b, λ_c e quindi anche il numero delle ampiezze di disintegrazione indipendenti nella rappresentazione delle elicità. Il momento angolare totale J in

---

[1]) Un divieto analogo può sorgere anche come conseguenza dell'invarianza isotopica dell'interazione di particelle non identiche. Per esempio, in virtú di questa invarianza, sono vietate le transizioni tra stati di diversa simmetria rispetto a λ_1, λ_2 nella diffusione neutrone-protone.

[2]) Poiché queste due ampiezze sono relative a processi differenti, l'interferenza tra i quali è perciò impossibile, un fattore di fase nella (70,11) non avrebbe alcun senso e lo si può uguagliare ad 1. Un senso reale l'ha solo l'uguaglianza delle sezioni d'urto, che discende dalla (70,11).

questo caso coincide con lo spin della particella primaria s_a, e quindi è una quantità fissata.

L'invarianza P nel decadimento è espressa dalla relazione

$$\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle = \frac{\eta_b \eta_c}{\eta_a} (-1)^{s_a - s_b - s_c} \langle -\lambda_b, -\lambda_c | S^J | -\lambda_a \rangle \qquad (70,13)$$

(qui oltre alla (70,4) si è usata anche la legge di trasformazione della funzione d'onda di una singola particella (16,16)).

Se la particella primaria è neutra, allora sorgono ulteriori limitazioni nel caso in cui la parità C si conservi. Qui occorre distinguere tre casi. Se i prodotti della disintegrazione sono anch'essi neutri, allora deve essere $C_a = C_b C_c$; questa condizione o vieta totalmente la disintegrazione, oppure viene soddisfatta e non comporta quindi nuove limitazioni. Se le particelle b e c sono differenti, allora l'invarianza C stabilisce una relazione tra le ampiezze dei processi: $a \to b + c$ e $a \to \bar{b} + \bar{c}$. Infine, per la disintegrazione $a \to b + \bar{b}$ compare una limitazione connessa con il fatto che per una data parità di carica C e un dato momento angolare totale $J = s_a$, il sistema può trovarsi soltanto o in stati simmetrici o in stati antisimmetrici rispetto alle elicità, a seconda della parità del numero J e del segno di C.

L'invarianza CP porta ad un'uguaglianza delle ampiezze di disintegrazione dei processi $a \to b + c$ e $\bar{a} \to \bar{b} + \bar{c}$:

$$\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle = \langle \lambda_{\bar{b}} \lambda_{\bar{c}} | S^J | \lambda_{\bar{a}} \rangle \qquad (70,14)$$

(dove $\lambda_{\bar{a}} = -\lambda_a, \ldots$), cioè all'uguaglianza delle probabilità di decadimento di particella e antiparticella. Se la particella può disintegrarsi in diversi modi (secondo diversi canali), allora questa uguaglianza vale per ciascuno dei canali. Sottolineiamo, tuttavia, che questo risultato presuppone l'osservanza dell'invarianza CP, che non è una proprietà universale della natura. Soltanto l'invarianza CPT ha carattere universale; quest'ultima richiesta avrebbe portato, di per se stessa, solo all'uguaglianza

$$\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle = \langle \lambda_{\bar{b}} \lambda_{\bar{c}} | S^J | \lambda_a \rangle ,$$

nella quale la parte destra è relativa al processo inverso del processo di decadimento. Piú avanti (§ 72) vedremo che la condizione di invarianza CPT unitamente alle richieste di unitarietà porta, tuttavia, ad una certa relazione, anche se piú limitata, tra le probabilità di decadimento di una particella e della rispettiva antiparticella.

PROBLEMI

1. Ottenere mediante la (70,6) una classificazione degli stati possibili di un sistema di due fotoni.

Soluzione. In questo caso λ_1, $\lambda_2 = \pm 1$. Per J pari ($J > 0$), secondo la (70,6) sono ammessi tre stati simmetrici rispetto a λ_1, λ_2:

$$\text{a) } \psi_{JM11}, \quad \text{b) } \psi_{JM-1-1}, \quad \text{c) } \psi_{JM1-1} + \psi_{JM-11}.$$

Per J dispari ($J > 1$) è ammesso un solo stato antisimmetrico:

$$\text{d) } \psi_{JM1-1} - \psi_{JM-11}.$$

Gli stati c) e d) hanno anche parità definita ($+1$); secondo la (70,4) abbiamo

$$P(\psi_{JM1-1} \pm \psi_{JM-11}) = \pm(-1)^J (\psi_{JM1-1} \pm \psi_{JM-11});$$

il fattore $\pm(-1)^J = 1$, poiché il segno superiore si riferisce ai valori pari di J e il segno inferiore a quelli dispari. Gli stati a) e b), invece, non hanno una parità definita ma, formando con essi le combinazioni

$$\text{a}') \ \psi_{JM11} + \psi_{JM-1-1}, \quad \text{b}') \ \psi_{JM11} - \psi_{JM-1-1},$$

si ottengono stati pari e dispari. Per $J = 0$ (per la condizione $|\lambda_1 - \lambda_2| \leqslant J$) deve essere $\lambda_1 = \lambda_2$; di conseguenza lo stato c) viene a mancare e rimangono solo uno stato pari ed uno dispari: a') e b'). Infine per $J = 1$ l'unico stato ammissibile per J dispari, e cioè lo stato d), è vietato, poiché per esso $\lambda = 2 > J$. In tal modo, noi arriviamo alla tabella degli stati ammissibili (9,5).

2. Nell'approssimazione non relativistica il momento totale J è il risultato della composizione dello spin S e del momento angolare orbitale L. Per un sistema di due particelle trovare la relazione tra gli stati $|JLSM\rangle$ e $|JM\lambda_1\lambda_2\rangle$.

Soluzione. Secondo la regola di formazione delle funzioni d'onda con composizione dei momenti angolari abbiamo

$$\psi_{JLSM} = \sum \{\psi_{s_1\sigma_1}\psi_{s_2\sigma_2} C^{SM_S}_{\sigma_1\sigma_2}\} \psi_{LM_L} C^{JM}_{M_L M_S}. \tag{1}$$

Qui $\psi_{s\sigma}$ sono autofunzioni dello spin s con proiezione σ (su un asse scelto z), ψ_{LM_L} sono autofunzioni del momento angolare orbitale L con proiezione M_L; l'espressione tra parentesi corrisponde alla composizione di s_1 e s_2 in S, e alla successiva composizione di S e L in J; la sommatoria avviene su tutti gli indici m. Esprimiamo queste funzioni nella rappresentazione degli impulsi come funzioni della direzione n (cioè dell'impulso $p \equiv p_1$), esprimendo le funzioni $\psi_{s\sigma}$ attraverso le funzioni degli stati di elicità $\psi_{n\lambda}$ mediante la III (58,7):

$$\psi_{s_1\sigma_1} = \sum_{\lambda_1} D^{(s_1)}_{\lambda_1\sigma_1}(n) \psi_{n\lambda_1},$$

$$\psi_{s_2\sigma_2} = \sum_{\lambda_2} D^{(s_2)}_{-\lambda_2\sigma_2}(n) \psi_{n,-\lambda_2}.$$

Per le funzioni ψ_{LM_L} abbiamo invece

$$\psi_{LM_L} = Y_{LM_L}(n) = i^L \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} D^{(L)}_{0M_L}(n)$$

(sono state usate la III (58,25) e la definizione (16,5)). Sostituendo queste funzioni nella (1), usando due volte lo sviluppo III (110,1) e usando anche la proprietà di ortogonalità dei coefficienti di Clebsch — Gordan III (106,13) otteniamo la funzione ψ_{JLSM} sotto forma dello sviluppo

$$\psi_{JLSM} = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \langle JM\lambda_1\lambda_2 | JLSM\rangle, \tag{2}$$

dove

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = \psi_{n\lambda_1}\psi_{n,\,-\lambda_2} D^{(J)}_{\Lambda M}(n) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}},$$

$$\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2,$$

e i coefficienti

$$\langle JM\lambda_1\lambda_2 \,|\, JLSM\rangle = (-i)^L (-1)^{s_1 - s_2 + S} \times$$

$$\times \sqrt{(2L+1)(2S+1)} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & S \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & S & J \\ 0 & \Lambda & -\Lambda \end{pmatrix}. \tag{3}$$

In virtú dell'unitarietà della trasformazione (2) abbiamo

$$\langle JLSM \,|\, JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \langle JM\lambda_1\lambda_2 \,|\, JLSM\rangle^*.$$

3. Determinare il numero di ampiezze parziali indipendenti per i seguenti processi di diffusione: a) $\pi + N \to \pi + N$, b) $\gamma + \pi \to \gamma + \pi$, c) $\gamma + N \to \gamma + N$, d) $e + N \to e + N$, e) $\nu + e \to \nu + e$, f) $p + \gamma \to n + \pi^+$, g) $N + N \to N + N$[1]).

Soluzione. a), b) Il numero totale di elementi di matrice S^J (cioè il numero dei diversi insiemi dei numeri $\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'$) è $N = 4$. Se si tiene conto dell'invarianza P il numero di elementi indipendenti si riduce a $N_P = 2$; con l'invarianza T si riduce a $N_T = 3$, mentre se si tiene conto di ambedue il numero si riduce a $N_{PT} = 2$.

c), d) $N = 16$, $N_P = 8$, $N_T = 10$, $N_{PT} = 6$.

e) $N = 4$, $N_T = 3$.

f) $N = 8$, $N_P = 4$.

g) In questo caso è comodo partire da combinazioni lineari degli stati di elicità:

$$\psi_{1g} = \psi_{++} + \psi_{--}, \qquad \psi_{2g} = \psi_{++} - \psi_{--},$$

$$\psi_{3g} = \psi_{+-} + \psi_{-+}, \qquad \psi_u = \psi_{+-} - \psi_{-+},$$

dove gli indici $\pm$ indicano i valori delle elicità ($\pm 1/2$) delle due particelle. Gli stati $1g$, $2g$, $3g$ sono pari, mentre lo stato u è dispari rispetto allo scambio delle particelle. Allora le transizioni $g \leftrightarrow u$ sono vietate, e di conseguenza, tenendo conto della simmetria di scambio, abbiamo $N = 16 - 6 = 10$. Rispetto alla riflessione spaziale P le funzioni ψ_{1g}, ψ_{3g} e ψ_{2g}, ψ_u hanno parità opposte (rispettivamente $(-1)^{J+1}$ e $(-1)^J$); il divieto di transizioni tra questi stati porta il numero di ampiezze indipendenti a $N_P = 6$. Infine, l'invarianza T comporta l'uguaglianza delle ampiezze $1g \to 3g$, $3g \to 1g$, e quindi $N_{PT} = 5$.

§ 71. *Ampiezze invarianti*

Per le ampiezze nella rappresentazione delle elicità viene usato un determinato sistema di riferimento: il sistema del baricentro. Nei calcoli delle ampiezze di diffusione mediante la teoria invariante delle perturbazioni (e anche per l'analisi delle loro proprietà generali di analiticità) è conveniente scrivere le ampiezze in forma esplicitamente invariante.

Se le particelle che partecipano alla reazione non hanno spin, allora l'ampiezza di diffusione dipende solo dai prodotti invarianti

[1]) In questi esempi sono essenziali solo gli spin delle particelle e la simmetria della loro interazione.

dei 4-impulsi delle particelle. Per una reazione del tipo

$$a + b \to c + d \tag{71,1}$$

come invarianti si possono scegliere due qualsiasi delle grandezze s, t, u, definite nel § 67. Allora l'ampiezza di diffusione si riduce alla sola funzione $M_{fi} = f(s, t)$.

Se, invece, le particelle hanno spin, allora, oltre agli invarianti cinematici s, t, u, esistono anche invarianti, che si possono formare con le ampiezze d'onda delle particelle (bispinori, 4-tensori, ecc.). Le ampiezze di diffusione devono allora avere la forma

$$M_{fi} = \sum_n f_n(s, t) F_n, \tag{71,2}$$

dove F_n sono degli invarianti, che dipendono linearmente dalle ampiezze d'onda di tutte le particelle partecipanti al processo (e anche dai loro 4-impulsi). I coefficienti $f_n(s, t)$ sono chiamati *ampiezze invarianti*.

Scegliendo le ampiezze d'onda in modo tale che corrispondano a particelle di elicità definita, noi otteniamo determinati valori degli invarianti $F_n = F_n(\lambda_i, \lambda_f)$. Allora le ampiezze di diffusione nella rappresentazione delle elicità assumono la forma di combinazioni lineari omogenee delle ampiezze invarianti f_n. È quindi evidente che il numero di funzioni d'onda indipendenti $f_n(s, t)$ coincide con il numero di ampiezze indipendenti nella rappresentazione delle elicità. Poiché il numero di queste ultime è facile da determinare (come abbiamo spiegato nel § 70), il problema degli invarianti F_n viene in tal modo a semplificarsi: noi ne conosciamo a priori il numero.

Esaminiamo alcuni esempi, supponendo che, in ogni caso, l'interazione goda dell'invarianza P e T; quest'ultima proprietà implica che gli invarianti F_n devono essere dei « veri » scalari (e non degli pseudoscalari).

1) Diffusione di una particella di spin 0 su una particella di spin 1/2. Il numero degli invarianti è uguale a 2 (vedi problema 3, § 70). Come invarianti si possono scegliere

$$F_1 = \bar{u}'u, \quad F_2 = \bar{u}'\hat{K}u, \tag{71,3}$$

dove $u = u(p)$, $u' = u(p')$ sono ampiezze bispinoriali dei fermioni iniziale e finale; $K = k + k'$, dove k e k' sono i 4-impulsi dei bosoni iniziale e finale[1]).

---

[1]) A prima vista sembrerebbe possibile formare ancora un invariante

$$\bar{u}'\sigma_{\mu\nu}k^{\mu}k'^{\nu}u.$$

È facile, tuttavia, convincersi che esso si riduce agli invarianti (71,3) se si tiene conto della legge di conservazione $k' = p + k - p'$ e delle equazioni $pu = mu$ e $\bar{u}'\hat{p}' = m\bar{u}'$, alle quali soddisfano le ampiezze bispinoriali.

L'invarianza T delle grandezze (71,3) si può con facilità verificare direttamente. L'inversione temporale scambia di posto gli stati iniziale e finale e sostituisce le ampiezze $u(p)$ con le « ampiezze invertite nel tempo »:

$$u^T = \mathrm{U}_T \bar{u}, \quad \bar{u}^T = -\mathrm{U}_T^{+} u$$

(vedi la (28,5)). Troviamo quindi la relazione

$$u'u \to \bar{u}^T u'^T = -(\mathrm{U}_T^{+} u)(\mathrm{U}_T \bar{u}') =$$
$$= -\bar{u}' \tilde{\mathrm{U}}_T \mathrm{U}_T^{+} u = \bar{u}' \mathrm{U}_T \mathrm{U}_T^{+} u = \bar{u}' u,$$

che dimostra l'invarianza T di F_1. Analogamente abbiamo

$$\bar{u}' \gamma^\mu u \to \bar{u}^T \gamma^\mu u'^T = -(\mathrm{U}_T^{+} u)\gamma^\mu (\mathrm{U}_T \bar{u}') = \bar{u}' \mathrm{U}_T \tilde{\gamma}^\mu \mathrm{U}_T^{+} u,$$

oppure, in virtú della (26,12)[1])

$$\bar{u}' \gamma^0 u \to \bar{u}' \gamma^0 u, \quad \bar{u}' \boldsymbol{\gamma} u \to -\bar{u}' \boldsymbol{\gamma} u.$$

In questo stesso modo si trasformano i 4-impulsi $(K^0, \boldsymbol{K}) \to (K^0, -\boldsymbol{K})$, e di conseguenza, il prodotto scalare $F_2 = K_\mu (\bar{u}' \gamma^\mu u)$ è invariante.

2) Diffusione elastica di due particelle identiche di spin 1/2. Esistono 5 invarianti indipendenti, che possono essere scelti nel modo seguente:

$$F_1 = (\bar{u}_1' u_1)(u_2' u_2), \qquad F_2 = (\bar{u}_1' \gamma^5 u_1)(\bar{u}_2' \gamma^5 u_2),$$
$$F_3 = (\bar{u}_1' \gamma^\mu u_1)(\bar{u}_2' \gamma_\mu u_2), \qquad F_4 = (\bar{u}_1' \gamma^\mu \gamma^5 u_1)(\bar{u}_2' \gamma_\mu \gamma^5 u_2),$$
$$F_5 = (\bar{u}_1' \sigma^{\mu\nu} u_1)(\bar{u}_2' \sigma_{\mu\nu} u_2), \tag{71,4}$$

dove u_1, u_2 sono le ampiezze bispinoriali delle particelle iniziali, e u_1', u_2' quelle delle particelle finali. Lo scambio delle particelle iniziali (o di quelle finali) non porta a nuovi invarianti: i nuovi invarianti si esprimono attraverso i vecchi (problema 1, § 28). L'espressione (71,2) con F_n preso dalla (71,4), non ha però la proprietà richiesta di cambiare di segno per lo scambio di due fermioni identici. Si può invece usare l'espressione seguente:

$$M_{fi} = [(\bar{u}_1' u_1)(\bar{u}_2' u_2) f_1(t, u) - (\bar{u}_2' u_1)(\bar{u}_1' u_2) f_1(u, t)] + \ldots \tag{71,5}$$

In effetti, per lo scambio di p_1' e p_2' (oppure di p_1 e p_2) gli invarianti cinematici si trasformano come segue: $s \to s$, $t \to u$, $u \to t$ e perciò la proprietà richiesta viene soddisfatta automaticamente.

Esaminiamo ancora due esempi: la diffusione di un fotone su particelle di spin 0 e 1/2. È opportuno esprimere l'ampiezza di

[1]) Queste leggi di trasformazione seguono, evidentemente, anche dal comportamento, chiarito nel § 28, nell'inversione temporale degli operatori $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, i cui elementi di matrice sono i prodotti $\bar{u}'u$, $\bar{u}'\gamma^\mu u$.

questo processo mediante i quadriversori del genere spazio $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, che soddisfano le condizioni

$$e^{(1)2} = e^{(2)2} = -1, \qquad e^{(1)}e^{(2)} = 0,$$
$$e^{(1)}k = e^{(2)}k = 0, \qquad e^{(1)}k' = e^{(2)}k' = 0 \tag{71,6}$$

(per ciascuno dei fotoni questi 4-vettori possono servire da sistema di riferimento quadridimensionale mediante il quale si realizza la descrizione invariante delle loro proprietà di polarizzazione; vedi § 8).

Siano k e k' i 4-impulsi iniziale e finale del fotone, e p e p' le corrispondenti quantità per la particella bersaglio. Consideriamo i quadrivettori

$$P^\lambda = p^\lambda + p'^\lambda - K^\lambda \frac{pK + p'K}{K^2},$$
$$N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho, \tag{71,7}$$

dove

$$K = k + k', \quad q = p - p' = k' - k.$$

Questi vettori sono evidentemente ortogonali. Essi sono ortogonali anche ai quadrivettori K, q e quindi anche a k, k'. Essendo ortogonali al 4-vettore del genere tempo K ($K^2 = 2kk' > 0$), significa che essi sono del genere spazio (infatti, nel sistema di riferimento in cui $\boldsymbol{K} = 0$, dall'uguaglianza $KP = 0$ segue che $P_0 = 0$, e quindi $P^2 < 0$). Normalizzando P e N, cioè formando

$$e^{(1)\lambda} = \frac{N^\lambda}{\sqrt{-N^2}}, \quad e^{(2)\lambda} = \frac{P^\lambda}{\sqrt{-P^2}}, \tag{71,8}$$

noi otteniamo una coppia di quadrivettori, che godono di tutte le proprietà richieste. Notiamo che $e^{(2)}$ è un « vero » vettore, mentre $e^{(1)}$ è uno pseudovettore.

Rappresentiamo l'ampiezza di diffusione del fotone nella forma

$$M_{fi} = F^{\lambda\mu} e'^*_\lambda e_\mu, \tag{71,9}$$

evidenziando i 4-vettori polarizzazione e, e' dei fotoni iniziale e finale.

3) Diffusione di un fotone su una particella di spin 0. Il tensore $F^{\lambda\mu}$ nella (71,9) deve essere costruito solo con i 4-impulsi delle particelle. Lo si può rappresentare nella forma

$$F^{\lambda\mu} = f_1 e^{(1)\lambda} e^{(1)\mu} + f_2 e^{(2)\lambda} e^{(2)\mu}. \tag{71,10}$$

dove f_1, f_2 sono ampiezze invarianti, il cui numero è, in questo caso, uguale a 2. Notiamo che il termine contenente il prodotto $e^{(1)\lambda}\, e^{(2)\mu}$ è impossibile in $F^{\lambda\mu}$, poiché questo prodotto è uno pseudotensore e, sostituito nella (71,9), avrebbe dato uno pseudoscalare.

4) Diffusione di un fotone su una particella di spin 1/2. Rappresentiamo il tensore $F_{\lambda\mu}$ nella forma

$$F_{\lambda\mu} = G_0 (e_\lambda^{(1)} e_\mu^{(1)} + e_\lambda^{(2)} e_\mu^{(2)}) + G_1 (e_\lambda^{(1)} e_\mu^{(2)} + \\ + e_\lambda^{(2)} e_\mu^{(1)}) + G_2 (e_\lambda^{(1)} e_\mu^{(2)} - e_\lambda^{(2)} e_\mu^{(1)}) + G_3 (e_\lambda^{(1)} e_\mu^{(1)} - e_\lambda^{(2)} e_\mu^{(2)}), \qquad (71,11)$$

dove G_0, G_3 sono « veri » scalari, e G_1 e G_2 sono degli pseudoscalari. Sia questi che quelli sono bilineari rispetto alle ampiezze bispinoriali dei fermioni $\bar{u}(p')$ e $u(p)$, hanno cioè la forma

$$G_n = \bar{u}(p') Q_n u(p). \qquad (71,12)$$

La forma generale delle matrici Q_n (rispetto agli indici bispinoriali) è

$$Q_0 = f_1 + f_2 \hat{K}, \qquad Q_1 = \gamma^5 (f_3 + f_4 \hat{K}), \\ Q_2 = \gamma^5 (f_5 + f_6 \hat{K}), \qquad Q_3 = f_7 + f_8 \hat{K}, \qquad (71,13)$$

dove $K = k + k'$. I coefficienti $f_1, \ldots, f_8$ sono le ampiezze invarianti, il cui numero è risultato qui uguale a 8 (invece delle 6 richieste) per il fatto che non si è ancora tenuto conto dell'invarianza T.

L'inversione temporale scambia di posto i 4-impulsi iniziale e finale delle particelle, cambiando anche i segni delle loro componenti spaziali:

$$(k_0, \boldsymbol{k}) \longleftrightarrow (k_0', -\boldsymbol{k}'), \quad (p_0, \boldsymbol{p}) \longleftrightarrow (p_0', -\boldsymbol{p}'). \qquad (71,14)$$

I quadrivettori polarizzazione dei fotoni si trasformano come segue:

$$(e_0, \boldsymbol{e}) \longleftrightarrow (e_0'^*, -\boldsymbol{e}'^*) \qquad (71,15)$$

(cfr. la (8,11a)), e quindi

$$(e_0'^* e_0, e_i'^* e_0, e_i'^* e_k) \to (e_0'^* e_0, -e_0'^* e_i, e_k'^* e_i).$$

In virtú dell'ultima trasformazione la condizione di invarianza dell'ampiezza di diffusione (71,9) è equivalente alla richiesta

$$(F_{00}, F_{i0}, F_{ik}) \to (F_{00}, -F_{0i}, F_{ki}).$$

D'altra parte, come conseguenza delle sostituzioni (71,14) abbiamo

$$(K_0, \boldsymbol{K}) \to (K_0, -\boldsymbol{K}), \qquad (q_0, \boldsymbol{q}) \to (-q_0, \boldsymbol{q}), \\ (P_0, \boldsymbol{P}) \to (P_0, -\boldsymbol{P}), \qquad (N_0, \boldsymbol{N}) \to (N_0, -\boldsymbol{N}),$$

e perciò

$$(e_0^{(1,2)}, \boldsymbol{e}^{(1,2)}) \to (e_0^{(1,2)}, -\boldsymbol{e}^{(1,2)}). \qquad (71,16)$$

Dalla espressione (71,11) segue quindi che deve essere

$$G_{0,1,3} \to G_{0\ 1\ 3}, \qquad G_2 \to -G_2,$$

Abbiamo visto precedentemente che per l'inversione temporale abbiamo

$$\bar{u}'u \to \bar{u}'u, \qquad \bar{u}'\hat{K}u \to \bar{u}'\hat{K}u. \tag{71,17}$$

Analogamente si può trovare che

$$\bar{u}'\gamma^5 u \to -\bar{u}'\gamma^5 u, \qquad \bar{u}'\gamma^5\hat{K}u \to \bar{u}'\gamma^5\hat{K}u. \tag{71,18}$$

Dalle espressioni (71,12-13) si vede infine che l'invarianza T dell'ampiezza di diffusione implica

$$f_3 = f_6 = 0. \tag{71,19}$$

§ 72. *Condizione di unitarietà*

La matrice di diffusione deve essere unitaria: $SS^* = 1$, ovvero, in termini di elementi di matrice,

$$(SS^*)_{fi} = \sum_n S_{fn} S^*_{in} = \delta_{fi}, \tag{72,1}$$

dove l'indice n numera tutti gli stati intermedi possibili[1]). Questa è la proprietà piú generale della matrice S, che garantisce la conservazione della normalizzazione e della ortogonalità degli stati nelle reazioni (cfr. III, § 125, 144). In particolare, gli elementi diagonali dell'uguaglianza (72,1) esprimono semplicemente il fatto che la somma delle probabilità di transizione da un dato stato iniziale ad uno stato finale qualsiasi è uguale all'unità:

$$\sum_n |S_{ni}|^2 = 1.$$

Sostituendo nella (72,1) gli elementi di matrice nella forma (65,2), otteniamo[2])

$$T_{fi} - T^*_{if} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n)\, T_{fn} T^*_{in}. \tag{72,2}$$

Notiamo che la parte sinistra di questa uguaglianza è lineare rispetto agli elementi di matrice T mentre la parte destra è quadratica. Se l'interazione contiene un parametro « piccolo » (come, ad esempio, l'interazione elettromagnetica), allora la parte sinistra sarà del primo ordine di grandezza rispetto a questo parametro, la parte

---

[1]) Il senso concreto del simbolo δ_{fi} nella (72,1) dipende naturalmente dalla scelta concreta dei numeri quantici e dalla normalizzazione delle funzioni d'onda del sistema. Esso deve essere definito in modo che: $\sum_f \delta_{if} = 1$.

[2]) Se scriviamo la condizione di unitarietà nella forma $S^+S = 1$ (invertendo cioèi fattori S^+ e S) allora la (72,2) si rappresenta nella forma equivalente

$$T_{fi} - T^*_{if} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n)\, T^*_{nf} T_{ni}. \tag{72,2a}$$

destra del secondo. Nell'approssimazione del primo ordine si può quindi trascurare la parte destra, e allora abbiamo

$$T_{fi} = T^*_{if}, \tag{72,3}$$

cioè la matrice T è hermitiana.

Per dare alla condizione di unitarietà (72,2) una forma piú concreta, occorre precisare cosa si intenda esattamente per sommatoria su n. Chiariamo questo punto per il caso di collisione di due particelle, supponendo inoltre che le leggi di conservazione permettano solo la diffusione elastica; allora anche tutti gli stati « intermedi » nella (72,2) saranno stati « a due particelle ». La sommatoria su questi stati significa l'integrazione rispetto agli impulsi $\boldsymbol{p}''_1$, $\boldsymbol{p}''_2$ e la sommatoria sui numeri quantici di spin (ad esempio, sulle elicità) di ambedue le particelle, che denoteremo con λ'':

$$\sum_n = \int \frac{V^2 d^3p''_1 d^3p''_2}{(2\pi)^6} \sum_{\lambda''} .$$

Eliminando le funzioni δ con lo stesso metodo usato nel § 65, otteniamo la condizione di unitarietà « a due particelle » nella forma

$$T_{fi} - T^*_{if} = \frac{iV^2}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon} \int T_{fn} T^*_{in} \varepsilon''_1 \varepsilon''_2 \, do'',$$

dove $\boldsymbol{p}$ è l'impulso ed ε l'energia totale nel sistema del baricentro. Il volume di normalizzazione scompare da questa relazione dopo il passaggio dalle ampiezze T_{fi} alle ampiezze M_{fi} eseguito secondo la (65,10)

$$M_{fi} - M^*_{if} = \frac{i}{(4\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon} \int M_{fn} M^*_{in} \, do''. \tag{72,4}$$

Definiamo l'ampiezza di diffusione elastica in modo che

$$d\sigma = |\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | f | \boldsymbol{n}\lambda \rangle|^2 \, do' \tag{72,5}$$

($\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ sono le direzioni degli impulsi iniziale e finale; λ, λ' i numeri quantici di spin iniziali e finali). Un confronto con la (65,19) mostra che

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | f | \boldsymbol{n}\lambda \rangle = \frac{1}{8\pi\varepsilon} M_{fi}, \tag{72,6}$$

e la condizione di unitarietà (72,4) assume la forma

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | f | \boldsymbol{n}\lambda \rangle - \langle \boldsymbol{n}\lambda | f | \boldsymbol{n}'\lambda' \rangle^* = \frac{i|\boldsymbol{p}|}{2\pi} \sum_{\lambda''} \int \langle \boldsymbol{n}'\lambda' | f | \boldsymbol{n}''\lambda'' \rangle \times$$
$$\times \langle \boldsymbol{n}\lambda | f | \boldsymbol{n}''\lambda'' \rangle^* \, do'', \tag{72,7}$$

che generalizza la nota formula della teoria non relativistica III (125,8).

Per ampiezza di diffusione elastica ad angolo zero si intende l'elemento di matrice diagonale T_{ii}, per il quale lo stato finale delle particelle coincide con quello iniziale[1]). Per questa ampiezza la condizion di unitarietà (72,2) assume la forma

$$2\,\mathrm{Im}\,T_{ii} = (2\pi)^4 \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(P_i - P_n). \tag{72,8}$$

La parte destra di questa uguaglianza differisce solo per un fattore moltiplicativo dalla sezione d'urto totale di tutti i processi possibili di diffusione per un dato stato iniziale i; indichiamo questa sezione con σ_t. Infatti, sommando la probabilità (65,5) sugli stati f e dividendo per la densità di flusso j, troviamo

$$\sigma_t = \frac{(2\pi)^4 V}{j} \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(P_i - P_n),$$

e quindi

$$\frac{2V}{j}\,\mathrm{Im}\,T_{ii} = \sigma_t.$$

Il volume di normalizzazione scompare dopo la sostituzione $T_{ii} = M_{ii}/(2\varepsilon_1 V \cdot 2\varepsilon_2 V)$ (ε_1, ε_2 sono le energie delle particelle nel sistema del baricentro) e la sostituzione di j secondo la (65,17):

$$\mathrm{Im}\,M_{ii} = 2\,|\boldsymbol{p}|\,\varepsilon\sigma_t. \tag{72,9}$$

Questa formula costituisce il contenuto del cosiddetto *teorema ottico*. Se si introduce l'ampiezza di diffusione elastica (72,6), questa formula assume la sua forma ordinaria

$$\mathrm{Im}\,\langle \boldsymbol{n}\lambda\,|\,f\,|\,\boldsymbol{n}\lambda\rangle = \frac{|\boldsymbol{p}|}{4\pi}\,\sigma_t \tag{72,10}$$

(cfr. III (142,10)).

Se la matrice S è data in rappresentazione angolare (ampiezze parziali), essendo essa diagonale in J, la condizione di unitarietà si scrive separatamente per ciascun J.

Cosí, se è possibile solo la diffusione elastica, la condizione di unitarietà assume la forma

$$\sum_{\lambda''} \langle \lambda' \,|\, S^J \,|\, \lambda'' \rangle \langle \lambda \,|\, S^J \,|\, \lambda'' \rangle^* = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{72,11}$$

In virtú dell'invarianza T la matrice di diffusione elastica è simmetrica (cfr. (70,10)) e quindi può essere diagonalizzata. Dopo questa operazione la condizione di unitarietà richiede che gli elementi diagonali siano in modulo uguali a 1; si conviene di scriverli in

---

[1]) Sottolineiamo che si parla proprio degli elementi della matrice T, e non S, cioè l'elemento diagonale viene trovato dopo che dalla matrice S è stata eliminata la matrice unità.

questo caso nella forma

$$S_n^J = \exp(2i\delta_{Jn}), \tag{72,12}$$

dove δ_{Jn} sono costanti reali, funzioni dell'energia (l'indice n numera gli elementi diagonali per un dato J). Nel caso generale, quando il numero di ampiezze indipendenti N è maggiore del rango della matrice (quadrata) S^J, i coefficienti di trasformazione, che realizzano la diagonalizzazione di S^J, dipendono da J e E (questi coefficienti, oltre ai valori principali della matrice, contengono allora delle quantità indipendenti, equivalenti alle N quantità iniziali). Se, però, il numero N coincide con il rango della matrice S^J (e quindi con il numero dei suoi valori principali), allora i coefficienti di diagonalizzazione sono universali. Gli stati che diagonalizzano S^J sono stati di parità definita (ma, beninteso, non di elicità definita).

La condizione (72,11), espressa attraverso le ampiezze parziali $\langle\lambda' \mid f^J \mid \lambda\rangle$, ha la forma

$$\begin{aligned}\langle\lambda' \mid f^J \mid \lambda\rangle - \langle\lambda \mid f^J \mid \lambda'\rangle^* &= \\ = 2i \mid \boldsymbol{p} \mid \sum_{\lambda''} \langle\lambda' \mid f^J \mid \lambda''\rangle \langle\lambda \mid f^J \mid \lambda''\rangle^*,\end{aligned} \tag{72,13}$$

come è facile verificare sostituendo lo sviluppo (69,13) nella (72,7) e tenendo conto della ortonormalità delle funzioni D. Se c'è anche l'invarianza T la matrice $\langle\lambda' \mid f^J \mid \lambda\rangle$ è simmetrica, e la (72,13) assume la forma

$$\operatorname{Im}\langle\lambda' \mid f^J \mid \lambda\rangle = \mid \boldsymbol{p} \mid \langle\lambda' \mid f^J f^{J+} \mid \lambda\rangle. \tag{72,14}$$

Se la matrice è diagonalizzata, i suoi elementi diagonali sono

$$f_n^J = \frac{1}{2i \mid \boldsymbol{p} \mid}(e^{2i\delta_{Jn}} - 1) = \frac{1}{\mid \boldsymbol{p} \mid} e^{i\delta_{Jn}} \operatorname{sen} \delta_{Jn}. \tag{72,15}$$

Indichiamo infine alcune conseguenze che discendono congiuntamente dalla condizione di unitarietà e dalla richiesta di invarianza CPT. In virtú di quest ultima abbiamo

$$T_{fi} = T_{\bar{i}\bar{f}}, \tag{72,16}$$

dove $\bar{i}$ e $\bar{f}$ sono stati che differiscono da i e f per la sostituzione di tutte le particelle con antiparticelle (e anche per il cambiamento di segno dei momenti angolari, mentre restano invariati gli impulsi). In particolare, per gli elementi diagonali risulta

$$T_{ii} = T_{\bar{i}\bar{i}}.$$

Dalla (72,8), o dalla (72,9), discende quindi che la sezione d'urto totale di tutti i processi possibili (per un dato stato iniziale) è uguale per reazioni tra particelle e antiparticelle.

In particolare, sono uguali le probabilità totali di decadimento (cioè la vita media) di una particella e della rispettiva antiparticella. Questi risultati (insieme con l'uguaglianza delle masse di particella e antiparticella (§ 11)) sono le conseguenze piú importanti dell'invarianza CPT delle interazioni. Ricordiamo (vedi fine § 70) che, perché un'affermazione analoga sia valida per ciascuno dei possibili canali di decadimento separatamente, si deve richiedere anche l'osservanza dell'invarianza CP.

PROBLEMA

Usando la condizione di unitarietà, trovare la connessione tra le fasi delle ampiezze parziali di fotoproduzione di pioni in reazione con nucleoni ($\gamma + N \to \pi + N$) e le fasi di diffusione elastica di pioni su nucleoni ($\pi + N \to \pi + N$); nella soluzione occorre tener conto del fatto che la diffusione πN è regolata dalle interazioni forti, mentre la fotogenerazione e la diffusione γN sono regolate dalla interazione elettromagnetica.

Soluzione. Introduciamo per le ampiezze parziali le seguenti notazioni:

$$\langle \pi N \mid S \mid \gamma N \rangle = S_{\pi\gamma},$$
$$\langle \gamma N \mid S \mid \gamma N \rangle = S_{\gamma\gamma},$$
$$\langle \pi N \mid S \mid \pi N \rangle = S_{\pi\pi}$$

(sono stati omessi gli indici J e i simboli delle elicità). La fotoproduzione è un processo del primo ordine rispetto alla carica elettrica e, mentre la diffusione γN è del secondo; perciò $S_{\pi\gamma} \sim e$, $S_{\gamma\gamma} - 1 \sim e^2$. L'ampiezza $S_{\pi\pi}$ non contiene invece alcun fattore « piccolo ». Limitandoci a considerare i termini $\sim e$, le condizioni (72,1) danno le relazioni

$$S_{\pi\gamma} S^*_{\gamma\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\gamma\pi} \approx S_{\pi\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\gamma\pi} = 0, \tag{1}$$

$$S_{\pi\gamma} S^*_{\pi\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\pi\pi} \approx S_{\pi\pi} S^*_{\pi\pi} = 1 \tag{2}$$

(nella parte destra dell'uguaglianza (2) per 1 occorre intendere una matrice unità rispetto alle variabili di spin). In virtú dell'invarianza T la matrice $S_{\pi\pi}$ è simmetrica, e $S_{\gamma\pi} = S_{\pi\gamma}$. Prendiamo la matrice $S_{\pi\pi}$ in forma diagonale, cioè rispetto agli stati d 1 pione di parità definita; allora dalla (2) discende che gli elementi diagonali hanno la forma $e^{2i\delta_\pi}$ con diverse costanti δ_π. Quindi, dalla (1), per ciascuno degli elementi della matrice $S_{\pi\gamma}$ troviamo

$$\frac{S_{\pi\gamma}}{S^*_{\pi\gamma}} = -e^{2i\delta_\pi},$$

da cui

$$S_{\pi\gamma} = \pm \mid S_{\pi\gamma} \mid ie^{i\delta_\pi}.$$

In tal modo, la fase dell'ampiezza parziale di fotoproduzione (in uno stato di parità definita) è determinata dalla fase di diffusione elastica πN.

Capitolo VIII

TEORIA INVARIANTE DELLE PERTURBAZIONI

§ 73. *Prodotto cronologico*

Le probabilità dei diversi processi che hanno luogo nelle collisioni fra particelle, la cui interazione reciproca può essere considerata piccola, vengono calcolate mediante la teoria delle perturbazioni. Il formalismo che caratterizza d'ordinario (per la meccanica quantistica non relativistica) questa teoria ha, tuttavia, il difetto che non sono in esso evidenti le condizioni di invarianza relativistica. Anche se nell'applicazione di tale formalismo a problemi relativistici il risultato finale soddisfa queste condizioni, la forma non invariante delle formule intermedie complica notevolmente i calcoli. Il presente capitolo è dedicato allo sviluppo di una teoria relativistica coerente delle perturbazioni libera da questo difetto; essa venne costruita da *R. Feynman* (1948-49).

Poiché la descrizione del sistema viene fatta col metodo della seconda quantizzazione, indicheremo con Φ la funzione d'onda nello « spazio » dei numeri di occupazione dei diversi stati delle particelle libere. L'hamiltoniano del sistema è $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \mathrm{V}$, dove V è l'operatore di interazione. Siano Φ_n le autofunzioni dell'hamiltoniano imperturbato; ciascuna di esse corrisponde a valori definiti di tutti i numeri di occupazione. Una funzione generica Φ è rappresentabile in forma di sviluppo $\Phi = \sum C_n \Phi_n$. Allora l'equazione d'onda esatta

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathrm{H}_0 + \mathrm{V})\, \Phi \tag{73,1}$$

si rappresenta sotto forma di un sistema di equazioni nei coefficienti C_n:

$$i\dot{C}_n = \sum_m V_{nm} e^{i(E_n - E_m)t} C_m, \tag{73,2}$$

dove V_{nm} sono gli elementi di matrice, indipendenti dal tempo, dell'operatore V, e E_n sono i livelli energetici del sistema imperturbato (cfr. III, § 40).

Per definizione, l'operatore V non dipende esplicitamente dal tempo. Invece le quantità

$$V_{nm}(t) = V_{nm} e^{i(E_n - E_m)t} \tag{73,3}$$

si possono considerare come elementi di matrice dell'operatore dipendente dal tempo

$$V(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}. \tag{73,4}$$

Si dice che $V(t)$ è l'operatore nella *rappresentazione di interazione* (mentre V, indipendente dal tempo, è l'operatore nella rappresentazione di Schrödinger[1])). Denotando ora con la stessa lettera di prima Φ la funzione d'onda in questa nuova rappresentazione, scriviamo le equazioni (73,2) nella forma simbolica

$$i\dot{\Phi} = V(t)\,\Phi. \tag{73,5}$$

Tutta la variazione della funzione d'onda, in questa rappresentazione, è dovuta unicamente all'effetto della perturbazione, corrisponde cioè a processi che avvengono per effetto dell'interazione delle particelle.

Se $\Phi(t)$ e $\Phi(t+\delta t)$ sono i valori di Φ in due istanti infinitamente vicini, allora in virtú della (73,5) essi sono legati dalla relazione

$$\Phi(t+\delta t) = [1 - i\delta t \cdot V(t)]\,\Phi(t) = e^{-i\delta t \cdot V(t)}\Phi(t).$$

Corrispondentemente, il valore di Φ in un istante qualsiasi t_f può essere espresso mediante il suo valore in un certo istante iniziale t_i ($t_f > t_i$) in base alla relazione

$$\Phi(t_f) = \Big(\prod_i^f e^{-i\delta t_\alpha V(t_\alpha)}\Big)\,\Phi(t_i), \tag{73,6}$$

dove il simbolo $\prod$ indica il limite del prodotto su tutti gli interval li infinitamente piccoli δt_α compresi tra t_i e t_f. Se $V(t)$ fosse una funzione ordinaria, allora questo limite si ridurrebbe semplicemente a

$$\exp\Big(-i\int_{t_i}^{t_f} V(t)\,dt\Big).$$

Questa operazione si basa sulla commutatività dei fattori, considerati ad istanti diversi, della quale si fa uso nel passaggio dal prodotto degli esponenziali nella (73,6) all'esponenziale della somma. Ma per l'operatore $V(t)$ questa commutatività non esiste e la riduzione ad un integrale non è possibile.

---

[1]) Sottolineiamo che nella definizione (73,4) figura l'operatore imperturbato H_0, a differenza di quanto avviene nella cosiddetta *rappresentazione di Heisenberg*, in cui

$$V^H(t) = e^{iHt} V e^{-iHt}$$

(vedi III, § 13).

Riscriviamo la (73,6) nella forma simbolica

$$\Phi(t_f) = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{V}(t)\,dt\right\}\Phi(t_i), \tag{73,7}$$

dove T è l'*operatore cronologico*[1]), che sta a significare una determinata successione (« cronologica ») degli istanti nei fattori successivi del prodotto (73,6). In particolare, ponendo $t_i \to -\infty$, $t_f \to +\infty$ abbiamo

$$\Phi(+\infty) = \mathrm{S}\Phi(-\infty), \tag{73,8}$$

dove

$$\mathrm{S} = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{V}(t)\,dt\right\}. \tag{73,9}$$

Il senso della scrittura simbolica della soluzione formalmente esatta (73,7-9) dell'equazione d'onda consiste nel fatto che questa scrittura permette di scrivere facilmente lo sviluppo in serie di potenze della perturbazione:

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_k \cdot \mathrm{T}\{\mathrm{V}(t_1)\,\mathrm{V}(t_2)\ldots\mathrm{V}(t_k)\}. \tag{73,10}$$

Qui, in ciascuno dei termini, la k-esima potenza dell'integrale è scritta sotto forma di un integrale di molteplicità k, e l'operatore T sta a indicare che per ogni insieme di valori delle variabili $t_1, t_2, \ldots, t_k$ occorre disporre i corrispondenti operatori in ordine cronologico: da destra a sinistra in ordine crescente dei valori di t[2]).

Dalla definizione (73,8) è evidente che, se prima dell'urto il sistema si trovava nello stato Φ_i (una certa collezione di particelle libere), allora l'ampiezza di probabilità di transizione allo stato Φ_f (altra collezione di particelle libere) è l'elemento di matrice S_{fi}. In altre parole, questi elementi formano la matrice S.

L'operatore di interazione elettromagnetica è già stato scritto nel § 43:

$$\mathrm{V} = e\int(\mathrm{jA})\,d^3x. \tag{73,11}$$

Sostituendolo nella (73,9), otteniamo

$$\mathrm{S} = \mathrm{T}\exp\{-ie\int(\mathrm{jA})\,d^4x\}. \tag{73,12}$$

---

[1]) Non confondere con l'operatore di inversione temporale!

[2]) La deduzione delle regole della teoria invariante delle perturbazioni mediante lo sviluppo (73,10) appartiene a *F. Dyson* (1949).

Il fatto importante è che l'operatore (73,12) è relativisticamente invariante. Questo è chiaro dalla natura scalare dell'espressione integranda (jA), dal carattere invariante sia dell'integrazione rispetto a d^4x che dell'operazione di ordinamento cronologico. Quest'ultimo fatto richiede, tuttavia, un chiarimento.

Come è noto, la successione di due istanti t_1 e t_2 (cioè il segno della differenza $t_2 - t_1$) non dipende dalla scelta del sistema di riferimento, se questi istanti si riferiscono a punti dello spazio-tempo x_1 e x_2, separati da una « distanza » del genere tempo: $(x_2 - x_1)^2 > 0$. In questo caso l'invarianza dell'ordinamento cronologico è evidente. Se invece $(x_2 - x_1)^2 < 0$ (« distanza » del genere spazio), allora in sistemi di riferimento differenti si può avere sia $t_2 > t_1$, sia $t_2 < t_1$[1]). Questi due punti corrispondono, però, a eventi, tra i quali non può sussistere una relazione di causalità. È evidente perciò che gli operatori di due grandezze fisiche, relative a questi punti, non possono non commutare tra loro; infatti, la non commutatività di due operatori significa, da un punto di vista fisico, che le grandezze in questione non possono essere misurate simultaneamente, il che presuppone l'esistenza di una relazione fisica tra i due processi di misura. Di conseguenza, l'ordinamento cronologico del prodotto rimane invariante anche in questo caso: anche se una trasformazione di Lorentz può cambiare la successione degli istanti, grazie alla commutatività dei fattori si può sempre ristabilire l'ordine cronologico[2]).

È facile vedere che la definizione, data in questo paragrafo, della matrice S soddisfa automaticamente la condizione di unitarietà. Rappresentando S in forma di prodotto cronologico, che figura nella (73,6), e tenendo conto del fatto che V è hermitiano, troviamo che S^+ si esprime come il prodotto degli stessi fattori $\exp(i\delta t_\alpha \cdot V(t_\alpha))$ (col segno opposto all'esponente) disposti in ordine cronologico inverso. Di conseguenza moltiplicando S con S^+, tutti i fattori si semplificano a due a due.

---

[1]) Invece di « distanze » del genere tempo e del genere spazio, si parla spesso, per brevità, di regioni rispettivamente all'interno e all'esterno del cono di luce: tutti i punti x, separati dal punto x' da una distanza $(x - x')^2 > 0$, si trovano all'interno del cono a due falde con il vertice nel punto x', mentre i punti, separati da x' da una distanza $(x - x')^2 < 0$, si trovano all'esterno di questo cono.

[2]) Per evitare malintesi, questa affermazione, per l'applicazione al prodotto $V(t_1)\,V(t_2)\,\ldots$, richiede una precisazione. Poiché l'operatore V non gode dell'invarianza di gauge (esso varia insieme con A), allora i fattori $V(t_1)$, $V(t_2)$, . . ., che per un gauge del potenziale sono commutativi, possono non esserlo per un altro gauge. Le affermazioni fatte devono essere intese nel senso che è sempre possibile una scelta del gauge del potenziale, per il quale $V(t_1)$, $V(t_2)$ siano commutativi all'esterno del cono di luce. Questa precisazione non ha, evidentemente, alcuna conseguenza sull'invarianza della matrice S: le ampiezze di diffusione, in quanto quantità fisiche reali, non possono dipendere dal gauge del potenziale (formalmente questa indipendenza discende dall'invarianza di gauge, notata nel § 43, dell'integrale d'azione).

Notiamo che l'unitarietà dell'operatore S è garantita, in questo caso, dal fatto che l'hamiltoniano è hermitiano. La richiesta di unitarietà ha, in realtà, un carattere piú generale delle ipotesi che stanno alla base della teoria che andiamo esponendo. Essa dovrebbe venire soddisfatta anche per una descrizione quantomeccanica, in cui non si usassero i concetti di hamiltoniano e di funzione d'onda.

§ 74. *Diagrammi di Feynman per la diffusione di elettroni*

Mostriamo ora sulla base di esempi concreti come viene eseguito il calcolo degli elementi di matrice. Questi esempi renderanno piú facile la successiva formulazione delle regole generali della teoria invariante delle perturbazioni.

L'operatore di corrente j contiene il prodotto di due operatori elettronici ψ. Perciò al primo ordine nella teoria perturbativa potrebbero avere luogo processi, nei quali intervengono in tutto (negli stati iniziale e finale) tre particelle: due elettroni (operatore j) e un fotone (operatore A). È facile, tuttavia, vedere che questi processi tra particelle libere sono impossibili: essi sono vietati dalla legge di conservazione dell'energia e dell'impulso. Se p_1 e p_2 sono i 4-impulsi degli elettroni, e k il 4-impulso del fotone, allora la conservazione del 4-impulso è descritta dall'uguaglianza $k = p_2 - p_1$ oppure $k = p_2 + p_1$. Queste uguaglianze sono, tuttavia, impossibili, poiché per il fotone $k^2 = 0$, mentre il quadrato $(p_2 \pm p_1)^2$ è diverso da zero. Infatti, calcolando il valore del quadrato $(p_2 \pm p_1)^2$ nel sistema di quiete di uno degli elettroni otteniamo

$$(p_2 \pm p_1)^2 = 2(m^2 \pm p_1 p_2) = 2(m^2 \pm \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mp \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) = 2m(m \pm \varepsilon_2).$$

Poiché $\varepsilon_2 > m$ abbiamo

$$(p_2 + p_1)^2 > 0, \quad (p_2 - p_1)^2 < 0. \tag{74,1}$$

In tal modo, i primi elementi (non diagonali) non nulli della matrice S possono comparire soltanto al secondo ordine nella teoria delle perturbazioni. Tutti i relativi processi sono contenuti nell'operatore del secondo ordine, che si ottiene sviluppando l'espressione (73,12):

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int\int d^4x\, d^4x' \cdot \mathrm{T}\left(j^\mu(x) A_\mu(x)\, j^\nu(x') A_\nu(x')\right).$$

Poiché gli operatori elettronici e fotonici commutano tra loro, allora il prodotto T, che compare qui, può essere scomposto in due prodotti T:

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int\int d^4x d^4x' \cdot \mathrm{T}\left(j^\mu(x)\, j^\nu(x')\right) \mathrm{T}\left(A_\mu(x) A_\nu(x')\right). \tag{74,2}$$

Come primo esempio esaminiamo la diffusione elastica di due elettroni; nello stato iniziale abbiamo due elettroni di energia-impulso p_1 e p_2, e nello stato finale due elettroni di energia-impulso p_3 e p_4.

È inoltre sottinteso che tutti gli elettroni si trovano in determinati stati di spin; per brevità, gli indici delle variabili di spin sono ovunque omessi.

Poiché in ambedue gli stati i fotoni mancano, è chiaro che il necessario elemento di matrice del prodotto T degli operatori fotonici è l'elemento diagonale $\langle 0 \mid \ldots \mid 0\rangle$, dove il simbolo $\mid 0\rangle$ indica lo stato di vuoto fotonico. Questo valor medio nel vuoto del prodotto T rappresenta (per ogni coppia di indici $\mu\nu$) una determinata funzione delle coordinate dei punti x e x'. In virtú della omogeneità dello spazio-tempo le coordinate possono figurare solo attraverso la differenza $x - x'$. Il tensore

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0 \mid \mathrm{T}\mathrm{A}_\mu(x)\,\mathrm{A}_\nu(x') \mid 0\rangle \tag{74,3}$$

è chiamato *funzione di propagazione dei fotoni* (o *propagatore fotonico*). Il calcolo di questa funzione verrà eseguito nel § 77.

Per il prodotto T degli operatori elettronici è necessario calcolare l'elemento di matrice

$$\langle 34 \mid \mathrm{T}\mathrm{j}^\mu(x)\,\mathrm{j}^\nu(x') \mid 12\rangle, \tag{74,4}$$

dove i simboli $\mid 12\rangle$, $\mid 34\rangle$ indicano gli stati in cui sono presenti coppie di elettroni di impulsi corrispondenti. Anche questo elemento può essere rappresentato sotto forma di valor medio nel vuoto mediante l'evidente uguaglianza

$$\langle 2 \mid \mathrm{F} \mid 1\rangle = \langle 0 \mid \mathrm{a}_2\mathrm{F}\mathrm{a}_1^+ \mid 0\rangle,$$

dove F è un operatore qualsiasi, a_1^+ e a_2 sono rispettivamente gli operatori di creazione del primo elettrone e di distruzione del secondo. Perciò, invece della (74,4), possiamo calcolare la quantità

$$\langle 0 \mid \mathrm{a}_3\mathrm{a}_4\mathrm{T}\,(\mathrm{j}^\mu(x)\,\mathrm{j}^\nu(x'))\,\mathrm{a}_2^+\mathrm{a}_1^+ \mid 0\rangle \tag{74,5}$$

(gli indici 1, 2, . . . sostituiscono, per brevità, p_1, p_2, . . .).

Ciascuno dei due operatori di corrente rappresenta il prodotto $\mathrm{j} = \bar{\psi}\gamma\psi$, e ciascuno degli operatori ψ è rappresentato dalla somma

$$\psi = \sum_p (\mathrm{a}_p\psi_p + \mathrm{b}_p^+\psi_{-p}),$$

$$\bar{\psi} = \sum_p (\mathrm{a}_p^+\bar{\psi}_p + \mathrm{b}_p\bar{\psi}_{-p}) \tag{74,6}$$

(i secondi termini contengono operatori positronici, che nel nostro caso non « lavorano »). Quindi il prodotto $\mathrm{j}^\mu(x)\,\mathrm{j}^\nu(x')$ si rappresenta sotto forma di una somma di termini, ciascuno dei quali contiene il prodotto di due operatori a_p e di due a_p^+. Questi operatori devono assicurare la distruzione degli elettroni 1 e 2 e la generazione degli elettroni 3, 4. In altre parole, si tratta degli operatori a_1, a_2, a_3^+, a_4^+, i quali, come si dice, *si contraggono* con gli operatori « esterni » a_1^+,

a_2^+, a_3, a_4 nella (74,5) e si semplificano in accordo con le uguaglianze

$$\langle 0 \mid a_p a_p^+ \mid 0 \rangle = 1. \tag{74,7}$$

In corrispondenza alle possibili scelte degli operatori ψ, da cui vengono presi nella (74,5) gli operatori a_1, a_2, a_3^+, a_4^+, compaiono i seguenti quattro termini:

$$\begin{aligned}(74,5) = {} & a_3 a_4 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi') a_2^+ a_1^+ + \\ & + a_3 a_4 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi') a_2^+ a_1^+ + a_3 a_4 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi') a_2^+ a_1^+ + \\ & + a_3 a_4 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi') a_2^+ a_1^+,\end{aligned} \tag{74,8}$$

dove $\psi = \psi(x)$, $\psi' = \psi(x')$, e mediante archi sono uniti quegli operatori tra i quali avviene la contrazione, cioè quelli dai quali viene presa la coppia di operatori a, a^+ che si semplificano poi secondo la (74,7). In ciascuno di questi termini, mediante successive trasposizioni degli operatori a_1, a_2, . . ., si possono disporre in posizioni contigue gli operatori coniugati (a_1 a_1^+, ecc.); a questo punto il valor medio del loro prodotto si riduce al prodotto dei valori medi (74,7). Tenendo conto del fatto che tutti gli operatori anticommutano (1, 2, 3, 4 sono stati differenti !)[1]), troviamo che l'elemento di matrice (74,4) è uguale a

$$\begin{aligned}\langle 34 \mid T j^\mu(x)\, j^\nu(x') \mid 12 \rangle = {} & (\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_2) \times \\ & \times (\bar{\psi}_3'\gamma^\nu\psi_1') + (\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}_4'\gamma^\nu\psi_2') - \\ & - (\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_2)(\bar{\psi}_4'\gamma^\nu\psi_1') - (\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}_3'\gamma^\nu\psi_2').\end{aligned} \tag{74,9}$$

Notiamo che il segno complessivo di questa somma è convenzionale e dipende dall'ordine in cui sono disposti nella (74,5) gli operatori elettronici « esterni ». Questa circostanza corrisponde al fatto che il segno complessivo dell'elemento di matrice per la diffusione di fermioni identici è, generalmente, arbitrario. Il segno relativo, invece, dei diversi termini nella (74,9) non dipende, ovviamente, dal particolare ordine di disposizione degli operatori esterni.

I due termini nella prima e nella seconda riga della (74,9) differiscono solo per la simultanea trasposizione degli indici μ, ν e degli argomenti x, x'. Tale trasposizione non cambia, evidentemente, nem-

[1]) Grazie a questa anticommutatività, gli operatori j (x) e j (x') si possono, in questo caso, considerare commutativi (nel calcolo dell'elemento di matrice) e quindi si può omettere il segno del prodotto cronologico T.

meno l'elemento di matrice (74,3) (nel quale l'ordine dei fattori è stabilito sempre dal simbolo T). Perciò, dopo la moltiplicazione della (74,3) con la (74,9) e l'integrazione rispetto a $d^4x\, d^4x'$, i quattro termini nella (74,9) danno risultati a due a due uguali, e quindi l'elemento di matrice ha la forma

$$S_{fi} = ie^2 \int\int d^4x\, d^4x' \cdot D_{\mu\nu}(x-x') \{(\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_2)(\bar{\psi}_3'\gamma^\nu\psi_1') - (\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}_3'\gamma^\nu\psi_2')\} \qquad (74,10)$$

(si noti la scomparsa del fattore 1/2).

Le funzioni d'onda elettroniche sono le onde piane (65,8). Perciò l'espressione tra parentesi graffa ha la forma

$$\begin{aligned}\{\ldots\} &= (\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)\, e^{-i(p_2-p_4)x-i(p_1-p_3)x'} - \\ &\quad - (\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2)\, e^{-i(p_1-p_4)x-i(p_2-p_3)x'} = \\ &= \{(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)\, e^{-i[(p_2-p_4)+(p_3-p_1)]\xi/2} - \\ &\quad - (\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2)\, e^{-i[(p_1-p_4)+(p_3-p_2)]\xi/2}\} \times \\ &\quad \times e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)X},\end{aligned}$$

dove $X = (x + x')/2$, $\xi = x - x'$. L'integrazione in $d^4x\, d^4x'$ viene sostituita con l'integrazione in $d^4\xi\, d^4X$. L'integrale in d^4X dà una funzione δ (in virtú della quale $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$). Passando quindi dalla matrice S alla matrice M (§ 65), per l'ampiezza di diffusione otteniamo

$$M_{fi} = e^2 \{(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2) D_{\mu\nu}(p_4-p_2)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1) - (\bar{u}_4\gamma^\mu u_1) D_{\mu\nu} \times (p_4-p_1)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2)\}. \qquad (74,11)$$

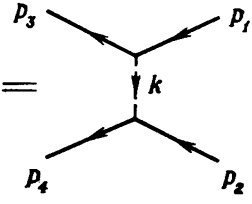
Qui è stata introdotta la funzione di propagazione nella rappresentazione degli impulsi

$$D_{\mu\nu}(k) = \int D_{\mu\nu}(\xi)\, e^{ik\xi}\, d^4\xi. \qquad (74,12)$$

Ciascuno dei due termini dell'ampiezza (74,11) può essere simbolicamente rappresentato mediante i cosiddetti *diagrammi di Feynman.*

Il primo termine è rappresentato dal diagramma

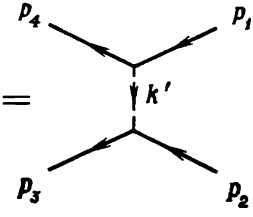
$$e^2(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2) D_{\mu\nu}(k)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1) =$$



(74,13)

A ciascuno dei punti di intersezione delle linee (*vertici* del diagramma) si mette in relazione un fattore γ. Le linee continue « entranti », dirette verso un vertice, corrispondono agli elettroni iniziali; ad esse si mettono in relazione i fattori u, cioè le ampiezze bispinoriali dei corrispondenti stati elettronici. Le linee continue « uscenti », dirette a partire dai vertici, sono gli elettroni finali; a queste linee si mettono in relazione i fattori $\bar{u}$. Nella « lettura » del diagramma i fattori citati si scrivono da sinistra a destra nell'ordine corrispondente allo spostamento secondo le linee continue nel senso opposto alla direzione delle frecce. I due vertici sono uniti da una linea tratteggiata, che corrisponde ad un fotone *virtuale* (intermedio), « emesso » in un vertice e « assorbito » nell'altro; a questa linea si mette in relazione il fattore $-iD_{\mu\nu}(k)$. Il 4-impulso k del fotone virtuale è determinato dalla « conservazione del 4-impulso nel vertice », cioè dall'uguaglianza della somma degli impulsi delle linee entranti e delle linee uscenti; nel caso in esame $k = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$[1]. Oltre a tutti i fattori citati, al diagramma viene assegnato globalmente ancora il fattore $(-ie)^2$ (l'esponente è uguale al numero dei vertici nel diagramma), e in questa forma esso entra come fattore in iM_{fi}. Analogamente il secondo termine nella (74,11) si rappresenta mediante il diagramma (ora $k' = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$)[2])

$$e^2(\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)D_{\mu\nu}(k')(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2) =$$



(74,14)

Le linee relative alle particelle iniziali e finali sono chiamate *linee esterne* o *terminali liberi* del diagramma. I diagrammi (74,13) e (74,14) differiscono l'uno dall'altro per lo scambio dei due termi-

---

[1]) La lettura del diagramma si può iniziare indifferentemente da p_3 o da p_4: le espressioni che si ottengono coincidono tra loro in virtú del carattere simmetrico del tensore $D_{\mu\nu}$. È indifferente anche la scelta della direzione della linea del fotone virtuale: un cambiamento di questa direzione porta solo ad un cambiamento del segno di k, che è inessenziale in forza della parità delle funzioni $D_{\mu\nu}(k)$ (vedi § 77).

[2]) I diagrammi di Feynman possono essere messi in relazione con i termini dell'ampiezza di diffusione non solo nella rappresentazione degli impulsi, ma anche nella rappresentazione delle coordinate originaria (integrali (74,10)). Il ruolo delle ampiezze elettroniche è svolto ora dalle corrispondenti funzioni delle coordinate, e i propagatori vengono presi nello spazio delle coordinate. Ad ogni vertice corrisponde una delle variabili di integrazione (x oppure x' nella (74,10); i fattori, assegnati alle linee intersecantisi in un vertice, vengono presi come funzione di questa variabile.

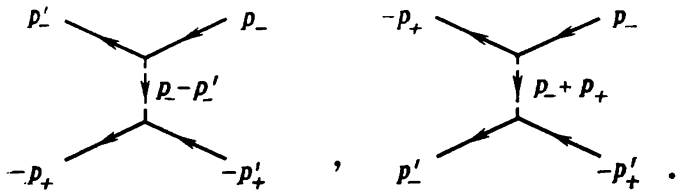
nali elettronici liberi (p_3 e p_4). Tale scambio di due fermioni cambia il segno del diagramma; questa regola corrisponde al fatto che nell'ampiezza (74,11) i due termini entrano con segni diversi.

Esaminiamo ora la diffusione elettrone-positrone; indichiamo i loro impulsi iniziali rispettivamente con p_- e p_+, e gli impulsi finali con p'_- e p'_+.

Gli operatori di creazione e di distruzione dei positroni entrano negli operatori ψ (74,6) insieme con i rispettivi operatori di creazione e di distruzione degli elettroni. Mentre nel caso precedente la distruzione delle due particelle iniziali era garantita dall'operatore ψ e la creazione delle due particelle finali dall'operatore $\bar{\psi}$, qui il ruolo di questi operatori nei confronti degli elettroni e dei positroni è opposto. Perciò la funzione coniugata $\bar{\psi}(-p_+)$ descriverà ora il positrone iniziale, e la funzione $\psi(-p'_+)$ il positrone finale (ambedue prese col segno opposto del 4-impulso). Tenendo conto di questa differenza otteniamo l'espressione dell'ampiezza di diffusione[1])

$$M_{fi} = -e^2 (\bar{u}(p'_-)\gamma^\mu u(p_-)) D_{\mu\nu}(p_- - p'_-) (\bar{u}(-p_+)\gamma^\nu u(-p'_+)) + \\ + e^2 (\bar{u}(-p_+)\gamma^\mu u(p_-)) D_{\mu\nu}(p_- + p_+) (\bar{u}(p'_-)\gamma^\nu u(-p'_+)). \quad (74,15)$$

Il primo e il secondo termine in questa espressione sono rappresentati dai seguenti diagrammi:



(74,16)

Le regole di composizione dei diagrammi cambiano solo per quanto riguarda i positroni. Come prima, alle linee continue entranti si mette in relazione il fattore u, e a quelle uscenti il fattore $\bar{u}$. Ora, però, le linee entranti corrispondono ai positroni finali, e quelle

---

[1]) Per la diffusione di particelle non identiche il segno generale dell'ampiezza è univoco. Esso è determinato dal fatto che nella (74,5) i due operatori « esterni » devono essere disposti in modo che i due operatori elettronici si trovino ad occupare le posizioni esterne estreme:

$$\langle 0 \mid a'b' \ldots b^+a^+ \mid 0 \rangle$$

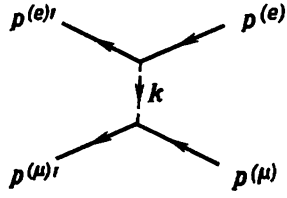
(oppure ambedue in mezzo); con questa condizione si garantisce un « segno uguale » agli stati iniziale e finale di vuoto. Il segno generale dell'ampiezza si può verificare anche nel limite non relativistico: piú avanti (§ 82) vedremo che in questo limite il secondo termine nella (74,15) tende a zero, e il primo tende all'ampiezza di Born della diffusione Rutherford.

uscenti ai positroni iniziali, e gli impulsi di tutti i positroni vengono presi col segno opposto.

Notiamo il carattere differente dei due diagrammi (74,16). Nel primo diagramma in uno dei vertici si intersecano le linee dell'elettrone iniziale e finale, nell'altro avviene lo stesso per il positrone. Nel secondo diagramma, invece, in ciascuno dei vertici si intersecano le linee di elettroni e positroni iniziali e finali; in uno avviene, per cosí dire, l'annichilazione della coppia con emissione di un fotone virtuale, nell'altro dal fotone si genera una coppia.

Questa differenza si riflette anche nelle proprietà dei fotoni virtuali nei due diagrammi. Nel primo diagramma (del tipo diagramma « di diffusione ») il 4-impulso del fotone virtuale è uguale alla differenza dei 4-impulsi dei due elettroni (o positroni); quindi $k^2 < 0$ (cfr. (74,1)). Nel secondo diagramma, invece, (del tipo diagramma « di annichilazione ») $k' = p_- + p_+$, e quindi $k'^2 > 0$. Notiamo a questo proposito che per il fotone virtuale si ha sempre $k^2 \neq 0$, a differenza del fotone reale, per il quale $k^2 = 0$.

Se le particelle in reazione non sono identiche e non sono una coppia particella-antiparticella (poniamo un elettrone e un muone), allora l'ampiezza di diffusione è rappresentata da un solo diagramma



(74,17)

Un diagramma del tipo « annichilazione » o « di scambio » in questo caso è impossibile. Questo risultato si ottiene analiticamente scrivendo l'operatore di corrente come somma delle correnti elettronica e muonica

$$\mathrm{j} = \mathrm{j}^{(e)} + \mathrm{j}^{(\mu)} = (\bar{\psi}^{(e)}\gamma\psi^{(e)}) + (\bar{\psi}^{(\mu)}\gamma\psi^{(\mu)})$$

e calcolando nel prodotto $\mathrm{j}^{(\mu)}(x)\,\mathrm{j}^{(\nu)}(x')$ gli elementi di matrice dei termini che realizzano la distruzione e la creazione richieste di particelle.

Torniamo ai processi del primo ordine nella serie perturbativa, vietati, come si è mostrato all'inizio del paragrafo, dalla legge di conservazione dell'energia-impulso. Gli elementi di matrice dell'operatore

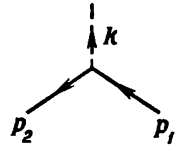
$$\mathrm{S}^{(1)} = -ie \int \mathrm{j}(x)\,\mathrm{A}(x)\,d^4x \qquad (74,18)$$

per queste transizioni corrispondono alla creazione o alla distruzione « in uno stesso punto x » di tre particelle reali: due elettroni e un fotone. Tali elementi compaiono in seguito alla contrazione degli

operatori $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ in uno stesso punto x e corrispondono (ad esempio, per l'emissione di un fotone) a integrali del tipo

$$S_{fi} = -ie \int \bar{\psi}_2(x)\, \psi_1(x)\, \hat{A}^*(x)\, d^4x,$$

che si annullano grazie alla presenza nell'espressione integranda del fattore $\exp[-i(p_1 - p_2 - k)x]$ con esponente diverso da zero. In termini di diagrammi questo significa che sono nulli i diagrammi con tre terminali liberi



(74,19)

Per questa stessa ragione sono impossibili, al secondo ordine, processi nei quali intervengano (nello stato iniziale e finale) sei particelle. Nell'elemento di matrice S_{fi} delle corrispondenti transizioni l'integrale in $d^4x d^4x'$ si scinderebbe nel prodotto di due integrali in d^4x e d^4x' di prodotti di tre funzioni d'onda, prese in uno stesso punto; tali integrali si annullano. In altre parole, i corrispondenti diagrammi si separerebbero in due diagrammi indipendenti del tipo (74,19).

§ 75. *Diagrammi di Feynman per la diffusione di un fotone*

Esaminiamo un altro effetto del secondo ordine: la diffusione di un fotone su un elettrone (*effetto Compton*). Supponiamo che nello stato inziale il fotone e l'elettrone abbiano 4-impulso k_1 e p_1, e in quello finale k_2 e p_2 (e anche polarizzazioni determinate, che noi, per brevità, non indicheremo).

L'elemento di matrice fotonico è

$$\langle 2 \,|\, \mathrm{T}(\mathrm{A}_\mu(x)\, \mathrm{A}_\nu(x')) \,|\, 1 \rangle = \langle 0 \,|\, \mathrm{c}_2 \mathrm{T}(\mathrm{A}_\mu(x)\, \mathrm{A}_\nu(x'))\, \mathrm{c}_1^+ \,|\, 0 \rangle, \qquad (75,1)$$

dove

$$\mathrm{A} = \sum_k (\mathrm{c}_k A_k + \mathrm{c}_k^+ A_k^*).$$

Contraendo gli operatori interni ed esterni otteniamo

$$(75,1) = \mathrm{c}_2 \mathrm{A}_\mu \mathrm{A}'_\nu \mathrm{c}_1^+ + \mathrm{c}_2 \mathrm{A}_\mu \mathrm{A}'_\nu \mathrm{c}_1^+ = A_{2\mu}^* A'_{1\nu} + A_{1\mu} A_{2\nu}^{*\prime} \qquad (75,2)$$

(qui si è tenuto conto della commutatività degli operatori c_1, c_2^+; per questa ragione il segno T può essere, in questo caso, omesso).

L'elemento di matrice elettronico è

$$\langle 2 \,|\, \mathrm{T}(\mathrm{j}^\mu(x)\, \mathrm{j}^\nu(x')) \,|\, 1 \rangle = \langle 0 \,|\, \mathrm{a}_2 \mathrm{T}[(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')]\, \mathrm{a}_1^+ \,|\, 0 \rangle. \qquad (75,3)$$

In esso compaiono quattro operatori ψ. Soltanto due di essi saranno utilizzati per la distruzione dell'elettrone 1 e la creazione dell'elettrone 2, verranno cioè contratti con gli operatori a_1^+ e a_2. Questi possono essere gli operatori $\bar{\psi}'$, ψ oppure ψ', $\bar{\psi}$ (ma non ψ, $\bar{\psi}$ oppure ψ', $\bar{\psi}'$; la creazione e la distruzione in uno stesso punto x o x' di elettroni reali insieme con un fotone reale annulla l'espressione). Eseguendo la contrazione nei due modi possibili, otteniamo nell'elemento di matrice (75,3) due termini; scriviamoli supponendo $t > t'$:

$$(75,3) = a_2 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi') a_1^+ + a_2 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi') a_1^+. \quad (75,4)$$

Nel primo termine si contraggono gli operatori

$$a_2\bar{\psi} \to a_2 a_2^+ \psi_2,$$
$$\psi' a_1^+ \to a_1 a_1^+ \psi_1'.$$

Poiché gli operatori $a_2 a_2^+$ e $a_1 a_1^+$ sono diagonali e si trovano agli estremi del prodotto, essi possono venire sostituiti dai loro valori medi nel vuoto, cioè dall'unità. Per trasformare analogamente il secondo termine nella (75,4) occorre in primo luogo « trasportare » l'operatore a_2^+ a sinistra e l'operatore a_1 a destra. Questo si può fare ricorrendo alle regole di commutazione degli operatori a_p, a_p^+ in virtú delle quali abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \{a_p, \psi\}_+ = \{a_p^+, \bar{\psi}\}_+ = 0, \\ \{a_p, \bar{\psi}\}_+ = \bar{\psi}_p, \quad \{a_p^+, \psi\}_+ = \psi_p. \end{aligned}\right\} \quad (75,5)$$

L'espressione (75,4) assume allora la forma

$$\langle 0 | (\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi_1') - (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}_2'\gamma^\nu\psi') | 0\rangle, \quad t > t' \quad (75,6)$$

(ovviamente vengono mediati solo i fattori operatoriali). Analogamente, per $t < t'$, otteniamo un'espressione che differisce dalla (75,6) per lo scambio degli apici e degli indici μ, ν:

$$\langle 0 | -(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi_1')(\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi) + (\bar{\psi}_2'\gamma^\nu\psi')(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_1) | 0\rangle, \quad t < t'. \quad (75,7)$$

Le due espressioni (75,6) e (75,7) possono essere scritte in un'unica forma, introducendo il prodotto cronologico degli operatori ψ secondo la definizione

$$T\psi_i(x)\bar{\psi}_k(x') = \begin{cases} \psi_i(x)\bar{\psi}_k(x'), & t' < t; \\ -\bar{\psi}_k(x')\psi_i(x), & t' > t. \end{cases} \quad (75,8)$$

(i, k sono indici bispinoriali). Allora i primi e i secondi termini nelle (75,6-7) possono essere riuniti in un'unica espressione

$$\bar{\psi}_2\gamma^\mu \langle 0 | T\psi\cdot\bar{\psi}' | 0\rangle \gamma^\nu\psi_1' + \bar{\psi}_2'\gamma^\nu \langle 0 | T\psi'\cdot\bar{\psi} | 0\rangle \gamma^\mu\psi_1 \quad (75,9)$$

($\psi\cdot\bar{\psi}$ indica simbolicamente la matrice $\psi_i\bar{\psi}_k$).

Notiamo che nella definizione (75,8), a cui siamo arrivati in modo del tutto naturale, i prodotti degli operatori per $t < t'$ e per $t > t'$ vengono presi con segni diversi. Per questo la (75,8) differisce dalla definizione di prodotto cronologico T, che noi abbiamo usato per gli operatori A e j. L'origine di questa differenza è connessa al fatto che gli operatori fermionici ψ, $\bar{\psi}$ anticommutano fuori del cono di luce (a differenza degli operatori bosonici commutativi A, e anche degli operatori bilineari $j = \bar{\psi}\gamma\psi$)[1]. In tal modo si garantisce l'invarianza relativistica della definizione (75,8) (la dimostrazione formale delle regole di commutazione degli operatori ψ verrà data nel § 76)[2].

Introduciamo la *funzione elettronica di propagazione* (o *propagatore elettronico*), il bispinore di rango due $G_{ik}(x - x')$, secondo la definizione

$$G_{ik}(x - x') = -i\langle 0 \,|\, \mathrm{T}\psi_i(x)\bar{\psi}_k(x') \,|\, 0\rangle. \qquad (75,10)$$

Allora l'elemento di matrice elettronico si scrive nella forma

$$\langle 2 \,|\, \mathrm{T}j^{\mu}(x)\, j^{\nu}(x') \,|\, 1\rangle = i\bar{\psi}_2\gamma^{\mu}G\gamma^{\nu}\psi_1' + i\bar{\psi}_2'\gamma^{\nu}G\gamma^{\mu}\psi_1. \qquad (75,11)$$

Moltiplicando per l'elemento di matrice fotonico (75,1) e integrando in $d^4x d^4x'$, i due termini nella (75,11) danno lo stesso risultato e quindi si ottiene

$$S_{fi} = -ie^2 \int\int d^4x\, d^4x' \bar{\psi}_2(x)\,\gamma^{\mu}G(x - x')\,\gamma^{\nu}\psi_1(x') \times$$
$$\times \{A^*_{2\mu}(x)\,A_{1\nu}(x') + A^*_{2\nu}(x')\,A_{1\mu}(x)\}. \qquad (75,12)$$

Sostituendo per le funzioni d'onda elettroniche e fotoniche le onde piane (65,8-9) e esplicitando la funzione δ, come abbiamo fatto per la (74,10), otteniamo l'espressione definitiva dell'ampiezza di diffusione

$$M_{fi} = -4\pi e^2\bar{u}_2\{\hat{e}_2^* G(p_1 + k_1)\,\hat{e}_1 + \hat{e}_1 G(p_1 - k_2)\,\hat{e}_2^*\}\,u_1, \qquad (75,13)$$

dove e_1, e_2 sono i 4-vettori polarizzazione del fotone, e $G(p)$ è il propagatore fotonico nella rappresentazione degli impulsi.

---

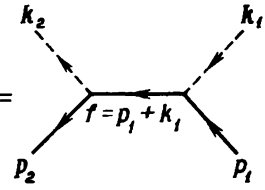
[1]) Ricordiamo che di per se stessi gli operatori ψ non si riferiscono a grandezze fisiche misurabili e quindi non sono obbligatoriamente commutativi fuori dal cono di luce.

[2]) Il prodotto T di un numero qualsiasi di operatori si può definire in modo analogo. Esso è uguale al prodotto di tutti questi operatori, disposti da destra a sinistra in ordine crescente di tempo, e il segno è determinato dalla parità della permutazione che è necessaria per ottenere questa disposizione partendo dalla disposizione indicata sotto il segno di prodotto T. Secondo questa definizione il segno del prodotto T cambia per la permutazione di due operatori ψ qualsiasi, ad esempio

$$\mathrm{T}\psi_i(x)\,\bar{\psi}_k(x') = -\mathrm{T}\bar{\psi}_k(x')\,\psi_i(x).$$

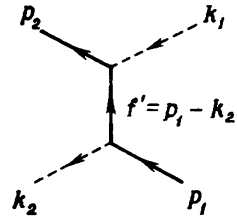
I due termini di questa espressione si rappresentano mediante i seguenti diagrammi di Feynman:

$$4\pi e^2 \bar{u}_2 \hat{e}_2^* G(f) \hat{e}_1 u_1 =$$



(75,14)

$$4\pi e^2 \bar{u}_2 \hat{e}_1 G(f') \hat{e}_2^* u_1 =$$



I terminali liberi tratteggiati dei diagrammi corrispondono ai fotoni reali; alle linee entranti (fotone iniziale) è messo in relazione il fattore $\sqrt{4\pi}\, e$, alle linee uscenti (fotone finale) il fattore $\sqrt{4\pi}\, e^*$, dove e è il quadrivettore polarizzazione. Nel primo diagramma il fotone iniziale è assorbito insieme con l'elettrone iniziale, e il fotone finale è emesso insieme con l'elettrone finale. Nel secondo diagramma l'emissione del fotone finale avviene simultaneamente alla distruzione dell'elettrone iniziale, e l'assorbimento del fotone iniziale simultaneamente con la creazione dell'elettrone finale.

La linea interna continua (che unisce i due vertici) corrisponde ad un elettrone virtuale, il cui 4-impulso è determinato dalla conservazione del 4-impulso ai vertici. A questa linea si pone in relazione il fattore $iG(f)$. A differenza del 4-impulso di una particella reale, il quadrato del 4-impulso di una particella virtuale non è uguale a m^2. Esaminando l'invariante f^2, ad esempio, nel sistema di quiete dell'elettrone, è facile trovare che

$$f^2 = (p_1 + k_1)^2 > m^2, \quad f'^2 = (p_1 - k_2)^2 < m^2. \qquad (75,15)$$

§ 76. *Propagatore elettronico*

Il concetto, introdotto nei paragrafi precedenti, di funzioni di propagazione (propagatori) svolge un ruolo fondamentale nel formalismo dell'elettrodinamica quantistica. Il propagatore fotonico $D_{\mu\nu}$ è la quantità fondamentale, che caratterizza l'interazione tra due elettroni. Questo suo ruolo si manifesta chiaramente nella posizione che esso occupa nell'ampiezza di diffusione, nella quale $D_{\mu\nu}$ figura moltiplicato per le correnti di transizione di due particel-

le. Un ruolo analogo è svolto dal propagatore elettronico nelle interazioni elettrone-fotone.

Passiamo ora a calcolare concretamente i propagatori, iniziando dal caso elettronico.

Applichiamo alla funzione

$$G_{ik}(x-x') = -i\langle 0 \,|\, \mathrm{T}\psi_i(x)\bar{\psi}_k(x') \,|\, 0\rangle \qquad (76,1)$$

(i, k sono indici bispinoriali) l'operatore $\hat{\mathrm{p}} - m$, dove $\mathrm{p}_\mu = i\partial_\mu$. Poiché $\psi(x)$ soddisfa l'equazione di Dirac $(\hat{\mathrm{p}} - m)\psi(x) = 0$, noi otteniamo zero in tutti i punti x, ad eccezione di quelli in cui $t = t'$. Questo perché $G(x - x')$ tende per $t \to t' + 0$ e $t \to t' - 0$ a limiti differenti: secondo la definizione (75,8) questi limiti sono rispettivamente

$$-i\langle 0 \,|\, \psi_i(\boldsymbol{r}, t)\bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}', t) \,|\, 0\rangle \quad \text{e} \quad +i\langle 0 \,|\, \bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}', t)\psi_i(\boldsymbol{r}, t) \,|\, 0\rangle$$

che, come vedremo, sul cono di luce non coincidono. Questo fatto porta alla comparsa nella derivata $\partial G/\partial t$ di un termine supplementare che contiene la funzione δ:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -i\langle 0 \,|\, \mathrm{T}\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial t}\bar{\psi}_k(x') \,|\, 0\rangle + \delta(t-t')\,(G|_{t\to t'+0} - G|_{t\to t'-0}). \qquad (76,2)$$

Notando che nell'operatore $\hat{\mathrm{p}} - m$ la derivata rispetto a t entra nella forma $i\gamma^0\partial/\partial t$, abbiamo

$$(\hat{\mathrm{p}} - m)_{ik}G_{kl}(x-x') = \delta(t-t')\,\gamma^0_{ik} \times$$
$$\times \langle 0 \,|\, \{\psi_k(\boldsymbol{r}, t), \bar{\psi}_l(\boldsymbol{r}', t)\}_+ \,|\, 0\rangle. \qquad (76,3)$$

Calcoliamo l'anticommutatore che compare qui. Moltiplicando gli operatori $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ e $\bar{\psi}(\boldsymbol{r}', t)$ (vedi la (74,6)) e tenendo conto delle regole di commutazione per gli operatori fermionici a_p, b_p, troviamo

$$\{\psi_i(\boldsymbol{r}, t), \bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}', t)\}_+ = \sum_p [\psi_{pi}(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_{pk}(\boldsymbol{r}') +$$
$$+ \psi_{-pi}(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_{-pk}(\boldsymbol{r}')], \qquad (76,4)$$

dove $\psi_{\pm p}(\boldsymbol{r})$ sono le funzioni d'onda senza il fattore temporale (come nei §§ 74, 75, per brevità, non scriveremo gli indici di polarizzazione). L'insieme di tutte le funzioni $\psi_{\pm p}(\boldsymbol{r})$, autofunzioni dell'hamiltoniano dell'elettrone, forma un sistema completo di funzioni normalizzate, e secondo le regole generali di tali sistemi (cfr. III (5,12)) abbiamo

$$\sum_p [\psi_{pi}(\boldsymbol{r})\psi^*_{pk}(\boldsymbol{r}') + \psi_{-pi}(\boldsymbol{r})\psi^*_{-pk}(\boldsymbol{r}')] = \delta_{ik}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \qquad (76,5)$$

La somma a secondo membro dell'uguaglianza (76,4) differisce da quella scritta nella (76,5) per la sostituzione di ψ^*_k con $(\psi^*\gamma^0)_k$ ed è

quindi uguale a $\gamma^0_{ik}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$. In tal modo, otteniamo

$$\{\psi_i(\boldsymbol{r}, t), \overline{\psi}_k(\boldsymbol{r}', t)\}_+ = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\gamma^0_{ik}. \tag{76,6}$$

Notiamo che da questa formula discende, in particolare, l'affermazione, già citata nel § 75, circa l'anticommutatività degli operatori ψ e $\overline{\psi}$ fuori del cono di luce. Per $(x-x')^2 < 0$ esiste sempre un sistema di riferimento nel quale $t = t'$; se inoltre $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$, allora l'anticommutatore (76,6) è effettivamente nullo.

Sostituendo la (76,6) nella (76,3) (e omettendo gli indici bispinoriali), troviamo[1])

$$(\hat{p}-m)\,G(x-x') = \delta^{(4)}(x-x'). \tag{76,7}$$

In tal modo, il propagatore elettronico soddisfa l'equazione di Dirac con la funzione δ a secondo membro. In altre parole, da un punto di vista matematico, questa è la *funzione di Green* per l'equazione di Dirac.

Nel seguito noi avremo bisogno non della funzione $G(\xi)$ ($\xi = x - x'$), ma della sua trasformata di Fourier

$$G(p) = \int G(\xi)\, e^{ip\xi} d^4\xi \tag{76,8}$$

(propagatore nella rappresentazione degli impulsi). Calcolando la trasformata di Fourier di ambedue i membri della (76,7), troviamo che $G(p)$ soddisfa un sistema di equazioni algebriche

$$(\hat{p} - m)\,G(p) = 1. \tag{76,9}$$

La soluzione di questo sistema è

$$G(p) = \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}. \tag{76,10}$$

Le quattro componenti del 4-vettore p in $G(p)$ sono variabili indipendenti (non legate dalla relazione $p^2 \equiv p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$). Scrivendo il denominatore della (76,10) nella forma $p_0^2 - (\boldsymbol{p}^2 + m^2)$, noi vediamo che $G(p)$, come funzione di p_0 per un dato $\boldsymbol{p}^2$, ha due punti singolari: $p_0 = \pm\varepsilon$, dove $\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. Integrando in dp_0, nell'integrale

$$G(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip\xi} G(p)\, d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3p \cdot e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}} \int dp_0 \cdot e^{-ip_0\tau} G(p) \tag{76,11}$$

($\tau = t - t'$) sorge quindi il problema di come aggirare le singolarità; senza prescrizioni a questo riguardo l'espressione (76,10) rimane, sostanzialmente, indeterminata.

---

[1]) In forma esplicita con gli indici bispinoriali abbiamo

$$(\hat{p}-m)_{il}\, G_{lk}(x-x') = \delta^{(4)}(x-x')\,\delta_{ik}. \tag{76,7a}$$

Per chiarire il problema ritorniamo alla definizione originaria (76,1). Sostituiamo in essa gli operatori ψ sotto forma di somme (74,6), notando che gli unici valori medi nel vuoto diversi da zero sono quelli dei seguenti prodotti di operatori di creazione e di distruzione:

$$\langle 0 \,|\, a_p a_p^+ \,|\, 0 \rangle = 1, \quad \langle 0 \,|\, b_p b_p^+ \,|\, 0 \rangle = 1.$$

(Poiché nello stato di vuoto non ci sono particelle, prima di « distruggere » una particella con l'operatore a_p o b_p, è necessario « creare » questa particella mediante l'operatore a_p^+ o b_p^+.) In tal modo otteniamo

$$G_{ik}(x-x') = -i \sum_p \psi_{pi}(\boldsymbol{r}, t)\, \overline{\psi}_{pk}(\boldsymbol{r}', t') =$$

$$= -i \sum_p e^{-i\varepsilon(t-t')} \psi_{pi}(\boldsymbol{r})\, \overline{\psi}_{pk}(\boldsymbol{r}') \quad \text{per } t-t' > 0; \qquad (76,12)$$

$$G_{ik}(x-x') = i \sum_p \overline{\psi}_{-pk}(\boldsymbol{r}', t')\, \psi_{-pi}(\boldsymbol{r}, t) =$$

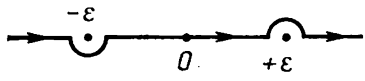
$$= i \sum_p e^{i\varepsilon(t-t')} \psi_{-pi}(\boldsymbol{r})\, \overline{\psi}_{-pk}(\boldsymbol{r}') \quad \text{per } t-t' < 0$$

(per $t > t'$ in G danno un contributo solo i termini elettronici, e per $t < t'$ solo quelli positronici).

Immaginando di sostituire la sommatoria su $\boldsymbol{p}$ con l'integrazione in d^3p e confrontando la (76,12) con la (76,11), vediamo che l'integrale

$$\int e^{-ip_0\tau} G(p)\, dp_0 \qquad (76,13)$$

deve avere il fattore di fase $e^{-i\varepsilon\tau}$ per $\tau > 0$ e $e^{i\varepsilon\tau}$ per $\tau < 0$. Questa condizione verrà soddisfatta se converremo di aggirare i punti singolari $p_0 = \varepsilon$ e $p_0 = -\varepsilon$ rispettivamente dall'alto e dal basso (nel piano della variabile complessa p_0):



(76,14)

Allora infatti, per $\tau > 0$ il cammino d'integrazione è chiuso da un semicerchio all'infinito nel semipiano inferiore, cosí che il valore dell'integrale (76,13) è dato dal residuo nel polo $p_0 = +\varepsilon$; per $\tau < 0$ il cammino di integrazione è chiuso nel semipiano superiore, e l'integrale è determinato dal residuo nel polo $p_0 = -\varepsilon$. In ambedue i casi si ottiene il risultato richiesto.

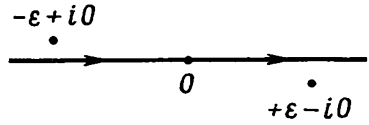
Questa regola di aggiramento (*regola di Feynman*) può essere formulata anche in un altro modo: l'integrazione viene eseguita sull'asse reale, ma alla massa m della particella viene assegnata una parte immaginaria negativa infinitamente piccola

$$m \to m - i0; \qquad (76,15)$$

avremo allora

$$\varepsilon \to \sqrt{p^2+(m-i0)^2} = \sqrt{p^2+m^2-i0} = \varepsilon - i0.$$

In altre parole, le singolarità $p_0 = \pm\varepsilon$ vengono spostate al di sopra e al di sotto dell'asse reale



(76,16)

e quindi l'integrazione su quest'asse diventa equivalente all'integrazione sul cammino (76,14)[1]. Tenendo conto della regola (76,15) il propagatore (76,10) si può scrivere nella forma

$$G(p) = \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i0}. \tag{76,17}$$

La regola di integrazione per uno spostamento della singolarità si dimostra utilizzando la seguente relazione:

$$\frac{1}{x+i0} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{76,18}$$

Questa relazione va intesa nel senso che in una integrazione con una funzione qualsiasi $f(x)$ si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x+i0}\,dx = \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx - i\pi f(0) \tag{76,19}$$

(dove il segno sbarrato di integrale, oppure il simbolo P, stanno a significare che si considera il valore principale).

La funzione di Green (76,10) consta del prodotto del fattore bispinoriale $\hat{p}+m$ con lo scalare

$$G^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2-m^2}. \tag{76,20}$$

La corrispondente funzione delle coordinate $G^{(0)}(\xi)$ è, evidentemente, la soluzione dell'equazione

$$(\mathrm{p}^2-m^2)\,G^{(0)}(x-x') = \delta^{(4)}(x-x'), \tag{76,21}$$

è cioè la funzione di Green dell'equazione $(\mathrm{p}^2-m^2)\,\psi = 0$. In questo senso si può dire che $G^{(0)}(x-x')$ è il propagatore di particelle scalari. È facile convincersi con un calcolo (simile a quello fatto prima) che la funzione di propagazione del campo scalare si esprime attra-

[1]) È utile notare che la regola di spostamento delle singolarità corrisponde al fatto che $G(x-x')$ acquista uno smorzamento infinitamente piccolo in $|t-t'|$.

verso gli operatori ψ mediante la formula

$$G^{(0)}(x-x') = -i\langle 0 \,|\, \mathrm{T}\psi(x)\,\psi^{+}(x') \,|\, 0\rangle, \tag{76,22}$$

analoga alla definizione (76,1). Il prodotto cronologico si definisce (come anche per tutti gli operatori bosonici) come segue:

$$\mathrm{T}\psi(x)\,\psi^{+}(x') = \begin{cases} \psi(x)\,\psi^{+}(x'), & t > t' \\ \psi^{+}(x')\,\psi(x), & t < t' \end{cases}$$

(con segni uguali per $t > t'$ e $t < t'$).

§ 77. *Propagatore fotonico*

Finora noi abbiamo dovuto ricorrere (nei §§ 43, 75) alla forma esplicita degli operatori del campo elettromagnetico A solo per il calcolo di elementi di matrice relativi ad una variazione del numero dei fotoni reali. Per questo scopo ci è stata sufficiente la rappresentazione, scritta nel § 2, dei potenziali del campo libero in forma di sviluppo in onde trasversali piane.

Questa rappresentazione, tuttavia, non fornisce, di per se stessa, una descrizione completa di un campo arbitrario. Questo risulta chiaro già dall'analoga situazione nell'elettrodinamica classica: un campo arbitrario (in presenza di cariche) non può venire scomposto in onde trasversali; accanto alla parte trasversale del campo (descritta dal potenziale vettore, sottoposto alla condizione div $\boldsymbol{A} = 0$), esiste anche una interazione coulombiana statica, descritta dal potenziale scalare Φ[1]).

In tal modo, noi non abbiamo ancora, in sostanza, una definizione completa degli operatori A, e senza di essa è impossibile un calcolo diretto del propagatore fotonico in base alla formula

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0 \,|\, \mathrm{T}\mathrm{A}_{\mu}(x)\,\mathrm{A}_{\nu}(x') \,|\, 0\rangle. \tag{77,1}$$

D'altra parte, la non univocità dei potenziali connessa alla trasformazione di gauge, priva, in una certa misura, di senso fisico quegli operatori che sarebbe stato necessario introdurre per una quantizzazione completa del campo elettromagnetico.

Queste difficoltà, tuttavia, hanno solo carattere formale e non fisico, e possono essere superate usando alcune proprietà generali del propagatore, evidenti a priori dalle richieste di invarianza relativistica e di gauge.

---

[1]) Con la condizione div $\boldsymbol{A} = 0$ le equazioni di Maxwell portano alle seguenti equazioni per $\boldsymbol{A}$ e Φ:

$$\Box\boldsymbol{A} = -4\pi\boldsymbol{j} + \nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad \Delta\Phi = -4\pi\rho.$$

Qui $\boldsymbol{A}$ può essere scomposto in onde trasversali (soluzioni dell'equazione omogenea $\Box\boldsymbol{A} = 0$). Il potenziale Φ soddisfa l'equazione statica di Poisson.

La forma piú generale di un quadritensore di rango 2, dipendente solo dal 4-vettore $\xi = x - x'$, è

$$D_{\mu\nu}(\xi) = g_{\mu\nu} D(\xi^2) - \partial_\mu \partial_\nu D^{(l)}(\xi^2), \tag{77,2}$$

dove D, $D^{(l)}$ sono funzioni scalari dell'invariante ξ^2 [1]). Notiamo che il tensore risulta automaticamente simmetrico.

Corrispondentemente, nella rappresentazione degli impulsi avremo

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2)\, g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu D^{(l)}(k^2), \tag{77,3}$$

dove $D(k^2)$, $D^{(l)}(k^2)$ sono le trasformate di Fourier delle funzioni $D(\xi^2)$, $D^{(l)}(\xi^2)$.

Nelle quantità fisiche, come le ampiezze di diffusione, la funzione fotonica di propagazione figura moltiplicata per le correnti di transizione di due elettroni, cioè in combinazioni del tipo $j^\mu_{21} D_{\mu\nu} j^\nu_{43}$ (vedi, ad esempio, la (74,13)). In virtú della conservazione della corrente ($\partial_\mu j^\mu = 0$) i suoi elementi di matrice $j_{21} = \bar{\psi}_2 \gamma \psi_1$ soddisfano la condizione di trasversalità quadridimensionale

$$k_\mu (j^\mu)_{21} = 0, \tag{77,4}$$

dove $k = p_2 - p_1$ (cfr. (43,13)). È quindi chiaro che nessun risultato fisico cambierà per la sostituzione

$$D_{\mu\nu} \to D_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu, \tag{77,5}$$

dove χ_μ sono funzioni qualsiasi di $\boldsymbol{k}$ e k_0. Questo arbitrio nella scelta di $D_{\mu\nu}$ corrisponde all'arbitrio nel gauge dei potenziali del campo.

Una qualsiasi trasformazione di gauge (77,5) può violare l'invarianza relativistica della forma di $D_{\mu\nu}$, presupposta nella (77,3) (se le grandezze χ_μ non formano un quadrivettore). Ma anche restando nell'ambito di forme relativisticamente invarianti del propagatore, la scelta della funzione $D^{(l)}(k^2)$ nella (77,3) appare completamente arbitraria; essa non si rifletterà sui risultati fisici e può essere stabilita in base a ragioni di convenienza (*L. D. Landau*, 1954).

La ricerca della funzione di propagazione si riduce, in tal modo, alla determinazione della sola funzione gauge invariante $D(k^2)$. Per un dato valore k^2 e dirigendo l'asse z lungo la direzione di $\boldsymbol{k}$, la trasformazione (77,5) non interesserà le componenti $D_{xx} = D_{yy} = -D(k^2)$. È quindi sufficiente calcolare la sola componente D_{xx}, usando un qualsiasi gauge dei potenziali.

---

[1]) Queste funzioni sono differenti nei tre domini di variazione dell'argomento, che non si riflettono l'uno nell'altro per trasformazioni di Lorentz: fuori del cono di luce ($\xi^2 < 0$), nel semicono superiore ($\xi^2 > 0$, $\xi_0 > 0$), nel semicono inferiore ($\xi^2 > 0$, $\xi_0 < 0$).

Usiamo il gauge in cui div $\mathbf{A} = 0$, e l'operatore $\mathbf{A}$ è dato dallo sviluppo (2,17-18):

$$\mathbf{A} = \sum_{k\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} (c_{k\alpha} e^{(\alpha)} e^{-ikx} + c^{+}_{k\alpha} e^{(\alpha)*} e^{ikx}), \quad \omega = |k| \tag{77,6}$$

(l'indice $\alpha = 1,2$ numera le polarizzazioni). Di tutti i valori medi nel vuoto dei prodotti degli operatori c, c^{+}, sono differenti da zero solo $\langle 0 \mid c_{k\alpha} c^{+}_{k\alpha} \mid 0 \rangle = 1$. In accordo con la definizione (77,1) otteniamo quindi

$$D_{ik}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{2\pi i d^3k}{\omega} \Big(\sum_{\alpha} e_i^{(\alpha)} e_k^{(\alpha)*} \Big) e^{-i\omega|\tau| + ik\xi} \tag{77,7}$$

(i, $k = x, y, z$ sono indici vettoriali tridimensionali; dalla sommatoria su k siamo passati all'integrazione in $d^3k/(2\pi)^3$).

Dalla (77,7) è evidente che l'espressione integranda senza il fattore $e^{ik\xi}$ è una componente della trasformata tridimensionale di Fourier della funzione $D_{ik}(r, t)$. Per $D_{xx} = -D$ essa è uguale a

$$\frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|}$$

(la somma sulle polarizzazioni $\sum \mid e_x^{(\alpha)} \mid^2 = 1$). Per determinare $D_{xx}(k^2)$ rimane ora da sviluppare questa funzione in integrale di Fourier rispetto al tempo. Questo sviluppo è dato dalla formula

$$\frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{k_0^2 - k^2 + i0} e^{-ik_0\tau} dk_0.$$

Come abbiamo spiegato nel paragrafo precedente, in questa integrazione si sottintende l'aggiramento dei poli $k_0 = \pm \mid k \mid = \pm\omega$ rispettivamente dal basso e dall'alto; per $\tau > 0$ l'integrale è determinato dal residuo nel polo $k_0 = +\omega$, e per $\tau < 0$ dal residuo nel polo $k_0 = -\omega$.

In tal modo troviamo in definitiva

$$D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0}. \tag{77,8}$$

La comparsa al denominatore del termine $+i0$, al quale noi siamo arrivati automaticamente, coincide con la regola (76,15): dalla massa (nulla) del fotone si sottrae $i0$. Dalla (77,8) è evidente che la corrispondente funzione delle coordinate $D(\xi^2)$ soddisfa l'equazione

$$-\partial_\mu \partial^\mu D(x - x') = 4\pi\delta^{(4)}(x - x'), \tag{77,9}$$

è cioè la funzione di Green dell'equazione d'onda.

Di solito noi porremo $D^{(l)} = 0$, useremo cioè la funzione di propagazione nella forma

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0} g_{\mu\nu}. \tag{77,10}$$

Indichiamo ora altri tipi di gauge, che possono presentare determinati vantaggi in alcune applicazioni.

Ponendo $D^{(l)} = -D/k^2$, otteniamo il propagatore nella forma

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{77,11}$$

(*gauge di Landau*). In questo caso abbiamo $D_{\mu\nu}k^\nu = 0$. Tale scelta è analoga al gauge di Lorentz per i potenziali ($A_\mu k^\mu = 0$)[1].

Analogo al gauge dei potenziali, determinato dalla condizione div $\boldsymbol{A} = 0$, è per il propagatore il gauge determinato dalle condizioni $D_{il}k^l = 0$, $D_{0l}k^l = 0$. Insieme con l'uguaglianza $D_{xx} = -D = -4\pi/k^2$, queste condizioni danno

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\boldsymbol{k}^2}\right). \tag{77,12}$$

Al fine di ottenere questo D_{il}, occorre sottoporre il propagatore (77,10) alla trasformazione (77,5), ponendo

$$\chi_0 = -\frac{4\pi\omega}{(\omega^2 - \boldsymbol{k}^2)\,\boldsymbol{k}^2}, \quad \chi_i = \frac{4\pi k_i}{(\omega^2 - \boldsymbol{k}^2)\,\boldsymbol{k}^2}.$$

In questo modo per le altre componenti $D_{\mu\nu}$ si ottiene

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{\boldsymbol{k}^2}, \quad D_{0i} = 0. \tag{77,13}$$

Questo gauge è detto gauge di Coulomb (*E. Salpeter*, 1952); notiamo che D_{00} qui è la trasformata di Fourier del potenziale coulombiano.

Infine, analogo al gauge dei potenziali che corrisponde alla condizione $\Phi = 0$, è per il propagatore il gauge in cui

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\omega^2}\right), \quad D_{0i} = D_{00} = 0. \tag{77,14}$$

Questa forma risulta conveniente nell'applicazione a problemi non relativistici (*I. E. Dzjaloškinskij*, *L. P. Pitaevskij*, 1959).

---

[1]) Il propagatore per particelle a spin 1, di massa non nulla, è dato dall'analoga formula

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 - m^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right). \tag{77,11a}$$

In questo caso l'arbitrio, connesso al gauge, manca e la scelta del propagatore è univoca.

§ 78. *Regole generali della tecnica dei diagrammi*

Il calcolo degli elementi di matrice, eseguito nei §§ 74, 75 per alcuni casi semplici, contiene tutti i princípi del metodo generale. Non presenta ora alcuna difficoltà stabilire, mediante opportune generalizzazioni, le regole di calcolo degli elementi di matrice di qualsiasi ordine nella teoria delle perturbazioni.

Come abbiamo già indicato, l'elemento di matrice dell'operatore di diffusione S per transizione tra stati iniziali e finali qualsiasi, coincide con il valore medio nel vuoto dell'operatore che si ottiene moltiplicando S a destra per gli operatori di creazione di tutte le particelle iniziali e a sinistra per gli operatori di tutte le particelle finali.

In conseguenza di questa operazione l'elemento di matrice S di ordine n-esimo nella teoria delle perturbazioni assume la forma

$$\langle f | S^{(n)} | i \rangle = \frac{(-ie)^n}{n!} \langle 0 | \ldots b_{2f} b_{1f} \ldots a_{1f} \ldots c_{1f} \int d^4x_1 \ldots$$
$$\ldots d^4x_n \mathrm{T} \{ (\bar{\psi}_1 \hat{A}_1 \psi_1) \ldots (\bar{\psi}_n \hat{A}_n \psi_n) \} c^+_{1i} \ldots a^+_{1i} \ldots b^+_{1i} \ldots | 0 \rangle \qquad (78,1)$$

(gli indici $1i$, $2i$, ... numerano le particelle inziali (positroni, elettroni e fotoni separatamente), gli indici $1f$, $2f$, ... numerano le particelle finali; gli indici 1, 2, ... apposti agli operatori ψ e A stanno a significare: $\psi_1 = \psi(x_1)$, ...). Gli operatori, che figurano in questa espressione, sono delle combinazioni lineari degli operatori di creazione e di distruzione delle corrispondenti particelle nei diversi stati. In tal modo, le espressioni degli elementi di matrice sono costruite mediante i valori medi nel vuoto di prodotti degli operatori di creazione e di distruzione delle particelle e di loro combinazioni lineari. Il calcolo dei valori medi nel vuoto viene eseguito basandosi sulle seguenti proposizioni, che costituiscono il contenuto del *teorema di Wick* (G. C. Wick, 1950).

1) Il valore medio nel vuoto del prodotto di un numero qualsiasi di operatori bosonici c^+, c è uguale alla somma dei prodotti dei valori medi di tutte le possibili coppie di questi operatori (cioè di tutte le possibili contrazioni). In ciascuna delle coppie i fattori devono figurare nello stesso ordine in cui si trovano nel prodotto di partenza.

2) Per gli operatori fermionici a^+, a, b^+, b (delle stesse particelle o di particelle differenti) la regola cambia solo per il fatto che ciascun termine entra nella somma col segno + o — a seconda della parità del numero di permutazioni degli operatori fermionici, necessarie per formare tutte le coppie, delle quali poi si calcolano le medie nel vuoto.

È chiaro che il valore medio può essere diverso da zero se accanto ad ogni fattore a, b, c nel prodotto compare anche il corrispondente fattore a^+, b^+, c^+. Si possono contrarre soltanto operatori (a, a^+), ...

relativi a stati uguali, e inoltre disposti in modo che a^+, ... si trovi a destra e a, ... a sinistra: la particella deve venire prima creata e poi distrutta (i valori medi $\langle 0| a^+ a | 0 \rangle = 0, \ldots$).

Se ciascuna coppia (a, a^+), ... figura nel prodotto una volta sola, allora il teorema di Wick è evidente (il valore medio si riduce in questo caso al solo prodotto dei valori medi di tutte le coppie). Il teorema è evidente anche nel caso in cui tutti gli operatori di distruzione a, b, c si trovano nel prodotto a destra degli operatori di creazione a^+, b^+, c^+ (tale prodotto è detto *normale*); il valore medio in questo caso è nullo. Da qui è facile dimostrare col metodo induttivo il teorema di Wick per il caso generale, quando una stessa coppia di operatori entra nel prodotto piú volte (k volte).

Esaminiamo il valore medio $\langle 0 | \ldots cc^+ \ldots | 0 \rangle$, nel quale una coppia di operatori bosonici entra k volte (per gli operatori fermionici si possono fare ragionamenti del tutto analoghi a quelli che seguono). Scambiando in una delle coppie i fattori c, c^+, in base alle regole di commutazione otteniamo

$$\langle 0 | \ldots cc^+ \ldots | 0 \rangle = \langle 0 | \ldots c^+c \ldots | 0 \rangle + \langle 0 | \ldots 1 \ldots | 0 \rangle. \qquad (78,2)$$

Il valore medio $\langle 0 | \ldots 1 \ldots | 0 \rangle$ contiene $k - 1$ coppie, e per esso il teorema di Wick si suppone valido. D'altra parte, se si sviluppa il valore medio $\langle 0 | \ldots cc^+ \ldots | 0 \rangle$ secondo il teorema di Wick, esso differirà dal valore medio $\langle 0 | \ldots c^+c \ldots | 0 \rangle$ esattamente per il termine

$$\langle 0 | \ldots 1 \ldots | 0 \rangle \qquad \langle 0 | cc^+ | 0 \rangle = \langle 0 | \ldots 1 \ldots | 0 \rangle$$

(sviluppando $\langle 0 | \ldots c^+c \ldots | 0 \rangle$ il termine analogo $\langle 0 | \ldots 1 \ldots | 0 \rangle \times \langle 0 | c^+c | 0 \rangle = 0$). Perciò dalla (78,2) discende che se il teorema di Wick vale per l'elemento di matrice $\langle 0 | \ldots c^+c \ldots | 0 \rangle$, allora esso rimane valido anche dopo lo scambio di c e c^+. Poiché per una determinata disposizione dei fattori (ordine normale) il teorema di Wick è chiaramente valido, esso rimane quindi valido anche in qualsiasi altro caso[1]).

---

[1]) Come esempio scriviamo i valori medi nel vuoto dei prodotti di quattro operatori (due coppie uguali). Per operatori bosonici abbiamo

$$\langle 0 | cc^+cc^+ | 0 \rangle = \overbrace{cc^+}\ \overbrace{cc^+} = 1,$$

$$\langle 0 | ccc^+c^+ | 0 \rangle = \underbrace{c\ \overbrace{c\ c^+}c^+} + \underbrace{\overbrace{c\ c\ c^+}c^+} = 2,$$

dove gli archetti indicano le contrazioni. È facile verificare che questo stesso risultato si sarebbe ottenuto con un calcolo diretto degli elementi di matrice, cioè

$$\langle 0 | ccc^+c^+ | 0 \rangle = \langle 0 | c | 1 \rangle \qquad \langle 1 | cc^+ | 1 \rangle \langle 1 | c^+ | 0 \rangle = 1 \cdot 2 \cdot 1.$$

Per gli operatori fermionici questa stessa contrazione dà

$$\langle 0 | aa^+aa^+ | 0 \rangle = 1,$$

$$\langle 0 | aaa^+a^+ | 0 \rangle = 1 - 1 = 0$$

(l'ultima uguaglianza è ovvia a priori sulla base del principio di Pauli: la creazione di due fermioni in uno stesso stato non è possibile).

Essendo valido per prodotti di operatori a, b, ..., il teorema di Wick è vero anche per qualsiasi prodotto che contiene, oltre agli operatori a, b, ... anche le loro combinazioni lineari ψ, $\overline{\psi}$, A. Se si applica questo teorema all'elemento di matrice (78,1), esso verrà ad assumere la forma di una somma di termini, ciascuno dei quali sarà un prodotto di valori medi di alcune coppie. Tra questi valori medi figureranno contrazioni tra gli operatori ψ, $\overline{\psi}$, A e gli operatori «esterni», gli operatori di creazione delle particelle iniziali o di distruzione di quelle finali. Queste contrazioni si esprimono attraverso le funzioni d'onda delle particelle iniziali e finali secondo le formule

$$\begin{aligned} &\langle 0 \mid \mathrm{A}\mathrm{c}_p^+ \mid 0\rangle = A_p, \quad &&\langle 0 \mid \mathrm{c}_p\mathrm{A} \mid 0\rangle = A_p^*, \\ &\langle 0 \mid \psi\mathrm{a}_p^+ \mid 0\rangle = \psi_p, \quad &&\langle 0 \mid \mathrm{a}_p\overline{\psi} \mid 0\rangle = \overline{\psi}_p, \\ &\langle 0 \mid \mathrm{b}_p\psi \mid 0\rangle = \psi_{-p}, \quad &&\langle 0 \mid \overline{\psi}\mathrm{b}_p^+ \mid 0\rangle = \overline{\psi}_{-p}, \end{aligned} \tag{78,3}$$

dove A_p, ψ_p sono funzioni d'onda fotoniche ed elettroniche con impulso p (gli indici di polarizzazione, come anche nei §§ 74, 75, sono, per brevità, omessi). Si incontreranno anche contrazioni tra operatori «interni», che stanno sotto il segno di prodotto cronologico T. Poiché per il teorema di Wick l'ordine dei fattori in ogni coppia che subisce la contrazione si mantiene, in queste contrazioni si conserverà anche l'ordine cronologico degli operatori, e quindi essi verranno sostituiti dai corrispondenti propagatori[1]).

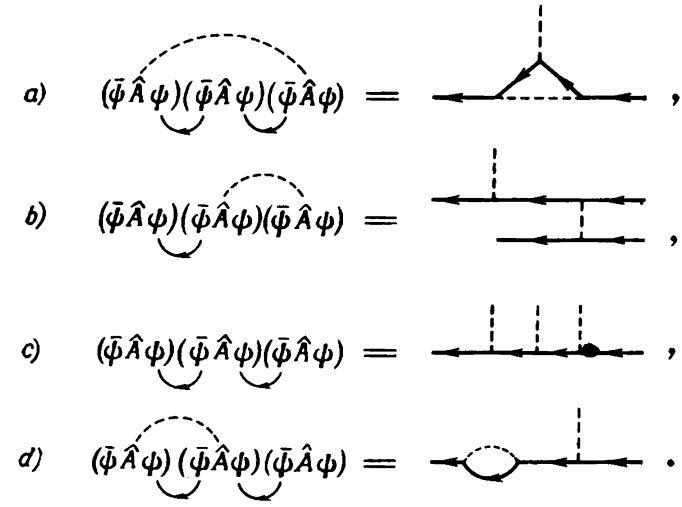
Ciascuno dei termini della somma, in cui si scinde l'elemento di matrice per effetto dello sviluppo secondo il teorema di Wick, è rappresentato da un determinato diagramma di Feynman. Nel diagramma di ordine n sono contenuti n vertici, a ciascuno dei quali si associa una delle variabili di integrazione, cioè uno dei vettori x_1, x_2, ... In ogni vertice si intersecano tre raggi: due continui (elettronici) e uno tratteggiato (fotonico), ai quali corrispondono gli operatori elettronici (ψ, e $\overline{\psi}$) e l'operatore fotonico (A), come funzioni di una stessa variabile x. All'operatore ψ corrisponde la linea entrante nel vertice, e a $\overline{\psi}$ la linea uscente.

A scopo illustrativo riportiamo alcuni esempi di corrispondenza tra i termini dell'elemento di matrice del terzo ordine e i diagrammi.

---

[1]) A proposito dell'ultima affermazione è necessario fare la seguente osservazione. Nella dimostrazione del teorema di Wick noi abbiamo usato le regole di commutazione degli operatori c, c$^+$, che hanno senso solo per fotoni reali (« trasversali »). Gli operatori « esterni » c_i^+, c_f corrispondono, ovviamente, proprio a tali fotoni (iniziali e finali). Gli operatori A, invece, (che entrano sotto il segno di prodotto T) descrivono, come abbiamo detto nel § 77, non soltanto i campi elettromagnetici trasversali. La situazione qui è uguale a quella incontrata nel calcolo di $D_{\mu\nu}$ nel § 77. In virtú dell'invarianza relativistica e dell'invarianza di gauge è sufficiente dimostrare il teorema per quei prodotti (cioè per quelle componenti dei tensori $\langle 0 \mid \mathrm{T}\mathrm{A}_\mu\mathrm{A}_\nu \ldots \mid 0\rangle$), che sono determinati dalle parti trasversali dei potenziali.

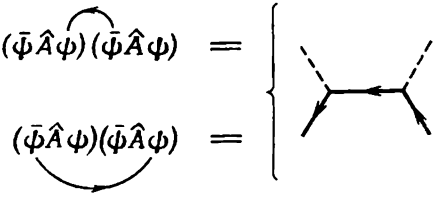
Omettendo il segno di integrale e il segno T, e non scrivendo gli argomenti agli operatori, scriviamo questi termini nella forma simbolica



(78,4)

Per visualizzare la corrispondenza, le contrazioni elettroniche e fotoniche sono disegnate, come anche nel diagramma, rispettivamente con linee continue e linee tratteggiate. La direzione delle frecce nelle contrazioni elettroniche (da $\bar{\psi}$ verso ψ) corrisponde alla loro direzione nei diagrammi. Per le contrazioni fotoniche interne la direzione è indifferente (fatto che trova corrispondenza nella parità del propagatore fotonico come funzione di $x - x'$).

Tra i termini, ottenuti in questo modo, ce ne sono di equivalenti, che differiscono solo per lo scambio degli indici dei vertici, cioè per la corrispondenza tra i vertici e gli indici delle variabili x_1, x_2, . . ., oppure, semplicemente, per la notazione delle variabili d'integrazione. Il numero di tali permutazioni è $n!$. Esso si semplifica con il fattore $1/n!$ nella (78,1), dopo di che non è piú necessario tenere conto dei diagrammi con i vertici scambiati di posto. Abbiamo già incontrato questa situazione nei §§ 74, 75. Cosí, al secondo ordine sono equivalenti i due diagrammi



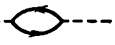
(78,5)

Nelle (78,4) e (78,5) sono riportate solo le contrazioni interne, alle quali corrispondono le linee interne dei diagrammi (elettroni e fotoni virtuali). Gli operatori rimasti liberi si contraggono con operatori esterni, e si stabilisce quindi una corrispondenza tra i terminali liberi dei diagrammi e queste o quelle particelle iniziali e finali. L'operatore $\bar{\psi}$ (nella contrazione con gli operatori a_f o b^+_i) dà la linea dell'elettrone finale o del positrone iniziale, e ψ (nella contrazione con a_i^+ o b_f) dà la linea dell'elettrone iniziale o del positrone finale. L'operatore libero A (nella contrazione con c_i^+ o c_f) può corrispondere sia al fotone iniziale che a quello finale. In tal modo, si hanno gruppi di piú diagrammi topologicamente uguali (formati cioè da uno stesso numero di linee, disposte allo stesso modo), che differiscono tra loro solo per scambi delle particelle iniziali e finali nei terminali liberi in entrata o in uscita.

Ciascuno di tali scambi è equivalente, ovviamente, ad un determinato scambio degli operatori esterni a, b, ... nella (78,1). È chiaro perciò che se tra le particelle iniziali o finali ci sono fermioni identici, allora i segni relativi di quei diagrammi, che differiscono per un numero dispari di permutazioni di terminali liberi, dovranno essere opposti.

Una successione ininterrotta di linee continue sui diagrammi forma una linea elettronica, lungo la quale si conserva il verso di percorrenza. Questa linea può avere due terminali liberi, o formare un cappio chiuso. Cosí, il diagramma

$$(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi) =$$



ha un cappio con due vertici. La conservazione del verso lungo la linea elettronica è l'espressione grafica della conservazione della carica: la carica «entrante» in ogni vertice è uguale alla carica «uscente» da esso.

La disposizione degli indici bispinoriali lungo una linea elettronica continua corrisponde alla scrittura delle matrici da sinistra verso destra muovendosi in verso opposto a quello indicato dalle frecce. Gli indici bispinoriali di linee elettroniche differenti non si confondono mai. Lungo una linea aperta la successione degli indici finisce ai terminali con funzioni d'onda elettroniche (o positroniche). Su un cappio chiuso la successione degli indici si chiude, cioè al cappio corrisponde la traccia del prodotto delle matrici disposte su di esso. È facile vedere che questa traccia deve essere presa col segno negativo.

In effetti, ad un cappio con k vertici corrisponde l'insieme di k contrazioni

$$(\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi) \quad (\bar{\psi}A\psi)$$

(o un altro insieme che differisce per lo scambio dei vertici). Nella $(k-1)$-esima contrazione gli operatori ψ e $\overline{\psi}$ si trovano già in quell'ordine, in cui essi si devono trovare nel propagatore elettronico ($\overline{\psi}$ a destra di ψ). Gli operatori che si trovano ai lati si portano in posizione contigua mediante un numero pari di scambi con altri operatori ψ, dopo di che essi risulteranno disposti nell'ordine $\overline{\psi}\psi$.

Poiché

$$\langle 0 \mid T\overline{\psi}'\psi \mid 0\rangle = -\langle 0 \mid T\psi\overline{\psi}' \mid 0\rangle$$

(vedi nota a pag. 350), la sostituzione di questa contrazione con il corrispondente propagatore è connessa al cambiamento del segno generale di tutta l'espressione.

Il passaggio alla rappresentazione degli impulsi nel caso generale si esegue analogamente a come è stato fatto nei §§ 74, 75. Oltre alla legge generale di conservazione dell'energia-impulso devono essere osservate anche le «leggi di conservazione» in ciascuno dei vertici. Tuttavia tutte queste leggi possono risultare insufficienti per la determinazione univoca degli impulsi di tutte le linee interne di un diagramma. In questi casi rispetto a tutti gli impulsi interni rimasti indeterminati si eseguono le integrazioni (in $d^4p/(2\pi)^4$) su tutto lo spazio p (ivi compresa anche l'integrazione in dp_0 da $-\infty$ a $+\infty$).

Nei ragionamenti esposti era sottinteso che il ruolo di perturbazione era svolto dall'interazione tra le particelle stesse, «attivamente» partecipanti alla reazione (cioè tra quelle particelle il cui stato varia per effetto del processo). Si può trattare in modo analogo anche il caso in cui nel problema figura un campo elettromagnetico esterno, cioè un campo creato da particelle «passive» il cui stato non varia nel processo considerato.

Sia $A^{(e)}(x)$ il quadripotenziale del campo esterno. Esso entra nel lagrangiano di interazione insieme con l'operatore fotonico A sotto forma di somma $A + A^{(e)}$ (la quale poi viene moltiplicata per l'operatore di corrente j). Poiché $A^{(e)}$ non contiene nessun operatore, esso non può contrarsi con altri operatori. In altre parole, al campo esterno corrispondono, nei diagrammi di Feynman, soltanto linee esterne.

Rappresentiamo $A^{(e)}$ in forma di integrale di Fourier:

$$\begin{aligned} A^{(e)}(x) &= \int A^{(e)}(q)\, e^{-iqx}\, \frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \\ A^{(e)}(q) &= \int A^{(e)}(x)\, e^{iqx} d^4x. \end{aligned} \tag{78,6}$$

Nelle espressioni degli elementi di matrice nella rappresentazione degli impulsi il quadrivettore q figurerà accanto ai 4-impulsi delle altre linee esterne, relative a particelle reali. A ciascuna di queste linee del campo esterno viene associato il fattore $A^{(e)}(q)$, ed inoltre la linea va considerata come «entrante» in virtú del segno dell'espo-

nente nel fattore e^{-iqx}, col quale $A^{(e)}(q)$ figura nell'integrale di Fourier (ad una linea «uscente» occorrerebbe associare il fattore $A^{(e)*}(q)$). Se la legge di conservazione dell'energia-impulso (per un dato 4-impulso di tutte le particelle reali) non basta a fissare in modo univoco i 4-impulsi di tutte le linee del campo esterno, allora si effettua l'integrazione (in $d^4q/(2\pi)^4$) rispetto a tutti i q rimasti «liberi», come anche rispetto a tutti i 4-impulsi non determinati delle linee del diagramma.

Diamo qui una tabella riassuntiva delle regole definitive della tecnica dei diagrammi, secondo le quali si costruisce l'espressione dell'ampiezza di diffusione nella rappresentazione degli impulsi.

1) All'n-esimo ordine della teoria delle perturbazioni corrispondono diagrammi con n vertici, in ciascuno dei quali si intersecano una linea elettronica entrante, una linea elettronica uscente (linee continue) e una linea fotonica (tratteggiata). Nell'ampiezza del processo di diffusione entrano tutti i diagrammi aventi terminali liberi (linee esterne) in numero uguale al numero di particelle iniziali e finali.

2) Ad ogni linea esterna continua in entrata si associa l'ampiezza dell'elettrone iniziale $u(p)$ o del positrone finale $u(-p)$ (p è il 4-impulso della particella). Ad ogni linea continua in uscita si associa l'ampiezza dell'elettrone finale $\bar{u}(p)$ o del positrone iniziale $\bar{u}(-p)$.

3) Ad ogni vertice si associa il quadrivettore γ^μ.

4) Ad ogni linea esterna tratteggiata in entrata si associa l'ampiezza del fotone iniziale $\sqrt{4\pi}e_\mu$, e in uscita l'ampiezza $\sqrt{4\pi}\,e^*_\mu$ del fotone finale (e è il 4-vettore polarizzazione). L'indice vettoriale μ coincide con l'indice della matrice γ^μ al vertice corrispondente (in modo che appare il prodotto scalare $\hat{e} \equiv e\gamma$ oppure $\hat{e}^*$).

5) Ad ogni linea interna continua si associa il fattore $iG(p)$, e ad ogni linea interna tratteggiata il fattore $-iD_{\mu\nu}(p)$. Gli indici tensoriali $\mu\nu$ coincidono con gli indici delle matrici γ^μ, γ^ν ai vertici uniti da una linea tratteggiata.

6) Lungo ogni successione ininterrotta di linee elettroniche le frecce mantengono lo stesso verso, e la disposizione degli indici bispinoriali lungo queste linee corrisponde alla scrittura delle matrici da sinistra verso destra muovendosi nella direzione opposta alla direzione delle frecce. Ad un cappio elettronico chiuso corrisponde la traccia del prodotto delle matrici disposte su di esso.

7) In ogni vertice i 4-impulsi delle linee, che vi si intersecano, soddisfano la legge di conservazione, cioè la somma degli impulsi delle linee entranti è uguale alla somma degli impulsi delle linee uscenti. Gli impulsi dei terminali liberi sono quantità date (nei limiti della legge generale di conservazione), e alla linea positronica viene assegnato l'impulso $-p$. Rispetto agli impulsi delle linee interne, che restano indeterminati dopo l'applicazione della legge di conservazione a tutti i vertici, si effettua l'integrazione (in $d^4p/(2\pi)^4$).

8) Al terminale libero in entrata, relativo ad un campo esterno, si mette in relazione il fattore $A^{(e)}(q)$; il quadrivettore q è legato ai 4-impulsi delle altre linee dalla legge di conservazione ai vertici [1]).

9) Il moltiplicatore generale del diagramma, con il quale esso entra in iM_{fi}, è $(-ie)^n$. Inoltre, un fattore supplementare (-1) è apportato da ogni cappio elettronico chiuso e da ogni coppia di terminali positronici esterni, se questi terminali sono l'inizio e la fine di una successione di linee continue. Se tra le particelle iniziali o finali ci sono piú elettroni o positroni, allora il segno relativo dei diagrammi, che differiscono per un numero dispari di permutazioni di coppie di particelle identiche (cioè dei corrispondenti terminali esterni), deve essere opposto [2]).

§ 79. *Invarianza di crossing*

La rappresentazione delle ampiezze di diffusione M_{fi} mediante gli integrali di Feynman permette di vedere la loro meravigliosa simmetria, che consiste in quanto segue.

Ciascuna delle linee esterne in entrata di un diagramma di Feynman si può considerare (senza cambiare la direzione delle frecce) come una particella nello stato iniziale o come una antiparticella nello stato finale, e ciascuna delle linee in uscita come una particella finale o una antiparticella iniziale. Simultaneamente al passaggio da particella ad antiparticella cambia anche il senso del 4-impulso p assegnato alla linea: $p = p_e$ per una particella (per esempio, un elettrone) e $p = -p_p$ per un positrone. Per il fotone, in quanto particella realmente neutra, ciò significa semplicemente il passaggio dall'emissione del fotone al suo assorbimento e viceversa: una linea fotonica esterna di impulso k corrisponde o all'assorbimento di un fotone di impulso $k_{ass} = k$, o all'emissione di un fotone di impulso $k_{emis} = -k$.

Tale cambiamento del senso delle linee esterne è equivalente al passaggio da uno dei canali incrociati ad altri. Da qui discende che una stessa ampiezza, come funzione degli impulsi dei terminali liberi dei diagrammi, descrive tutti i canali di una reazione. Passando da un canale all'altro cambia solo il senso degli argomenti della funzione: nel passaggio da particella ad antiparticella viene fatta la sostituzione $p_i \to -p_f$, dove p_i è il 4-impulso della particella iniziale (in un canale), e p_f è il 4-impulso della particella finale (in un

---

[1]) La precisazione di questa regola per il caso di un campo esterno costante (nel tempo) vedi nella nota a pag. 594.

[2]) Per precisare l'ultima regola aggiungeremo che in ogni caso devono avere segni uguali i diagrammi con le stesse linee continue, cioè i diagrammi che risultano identici dopo la cancellazione di tutte le linee fotoniche.

Ricordiamo anche che in presenza di fermioni identici il segno generale dell'ampiezza è convenzionale.

altro canale). Questa proprietà dell'ampiezza di diffusione è chiamata *simmetria di crossing* o *invarianza di crossing*.

In termini delle ampiezze invarianti, introdotte nel § 71, come funzioni degli invarianti cinematici, si può dire che queste funzioni saranno le stesse per tutti i canali, ma per ciascuno dei canali i loro argomenti assumeranno valori del proprio dominio fisico. In altre parole, gli integrali di Feynman determinano le ampiezze invarianti come funzioni analitiche; i loro valori nei diversi domini fisici sono un prolungamento analitico della funzione, data in uno dei domini. Poiché le espressioni integrande degli integrali di Feynman contengono singolarità, anche le ampiezze invarianti hanno singolarità, determinabili dalle espressioni di questi integrali (tenendo conto della regola di aggiramento delle singolarità).

Sottolineiamo che l'invarianza di crossing è qualcosa di piú che non le proprietà della matrice di diffusione, derivanti dalle richieste generali di simmetria spazio-temporale. Queste ultime portano all'uguaglianza delle ampiezze di processi che si ricavano l'uno dall'altro scambiando di posto gli stati iniziale e finale o con la sostituzione di tutte le particelle con antiparticelle (restando invariati gli impulsi $\boldsymbol{p}$ di tutte le particelle e il segno delle proiezioni dei loro momenti angolari). Questa è la richiesta di invarianza CPT[1]). L'invarianza di crossing permette di fare questa trasformazione non solo per tutte le particelle simultaneamente, ma anche per ciascuna particella separatamente.

§ 80. *Particelle virtuali*

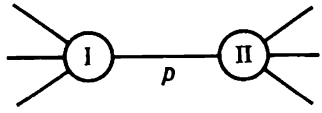
Le linee interne dei diagrammi di Feynman svolgono nella teoria invariante delle perturbazioni un ruolo analogo al ruolo degli stati intermedi nella teoria «ordinaria». Il carattere di questi stati, tuttavia, è diverso nelle due teorie. Nella teoria ordinaria negli stati intermedi si conserva l'impulso (tridimensionale), ma non si conserva l'energia; in questo senso essi sono chiamati *stati virtuali*. Nella teoria invariante, invece, l'impulso e l'energia entrano alla pari: negli stati intermedi si conserva tutto il 4-impulso (conseguenza del fatto che negli elementi di matrice S l'integrazione è fatta sia rispetto alle coordinate che rispetto al tempo; questo garantisce l'invarianza della teoria). Tuttavia, negli stati intermedi viene meno il legame tra energia e impulso proprio delle particelle reali (espresso dall'uguaglianza $p^2 = m^2$). In questo senso si parla di *particelle virtuali* intermedie. La relazione tra impulso ed energia per una

---

[1]) Notiamo che la descrizione formale del passaggio da una delle reazioni indicate ad un'altra mediante il cambiamento di segno di tutti i 4-impulsi nei diagrammi di Feynman corrisponde al senso dell'operazione CPT come inversione quadridimensionale.

particella virtuale è arbitraria: essa è quella richiesta dalla conservazione del 4-impulso ai vertici.

Esaminiamo un diagramma costituito da due parti (I e II), unite da una linea. Senza interessarci della struttura interna di queste parti, rappresentiamo il diagramma schematicamente nella forma



(80,1)

(le linee disegnate possono essere sia continue che tratteggiate). In virtú della legge generale di conservazione le somme dei 4-impulsi delle linee esterne delle parti I e II sono uguali. Poiché la conservazione vale in ciascuno dei vertici sarà uguale ad esse anche il 4-impulso p della linea interna, che unisce le parti I e II. In altre parole, questo impulso è univocamente determinato, e perciò rispetto ad esso nell'elemento di matrice non si esegue l'integrazione.

A seconda del canale di reazione il quadrato p^2 può essere sia positivo che negativo. Esiste sempre un canale nel quale $p^2 > 0$ [1]. Allora la particella virtuale diventa per le sue proprietà formali del tutto analoga ad una particella reale di massa reale $M = \sqrt{p^2}$. Per tale particella si può introdurre il sistema di riferimento a riposo, si può determinare il suo spin, ecc.

Il propagatore fotonico (77,11) coincide, per la sua struttura tensoriale, con la matrice densità di una particella non polarizzata a spin 1 e di massa diversa da zero:

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right)$$

(4-tensore ortogonale al 4-impulso). D'altra parte, il propagatore (in quanto quantità quadratica rispetto agli operatori del campo) svolge per una particella virtuale un ruolo analogo al ruolo della matrice densità di una particella reale. Perciò ad un fotone virtuale occorre assegnare, come ad un fotone reale, spin 1. Tuttavia, a differenza del fotone reale che ha due polarizzazioni indipendenti, il fotone virtuale, in quanto «particella» di massa finita, può avere tre polarizzazioni.

La funzione di propagazione dell'elettrone è

$$G \backsim \hat{p} + m.$$

---

[1]) Tale, ad esempio, è il canale (sempre che esso sia energeticamente possibile), nel quale tutti i terminali liberi della parte I sono relativi a particelle iniziali e quelli della parte II a particelle finali. Allora $p = P_i$ (è uguale alla somma dei 4-impulsi di tutte le particelle iniziali) e nel sistema del baricentro $p = (P_i^0, 0)$, e quindi $p^2 > 0$.

Qui m è la massa dell'elettrone reale, mentre la «massa» della particella virtuale è $M = \sqrt{p^2}$. Scrivendo

$$\hat{p} + m = \frac{M+m}{2M}(\hat{p} + M) + \frac{M-m}{2M}(\hat{p} - M), \qquad (80,2)$$

noi vediamo che il primo termine corrisponde alla matrice densità di una particella di massa M e spin 1/2, e il secondo alla matrice densità di una «antiparticella» dello stesso tipo (cfr. con la (29,10) e la (29,17)). Ricordando che particella e antiparticella hanno parità intrinseche diverse (§ 27), arriviamo alla conclusione che ad un elettrone virtuale occorre assegnare spin 1/2 ma non gli si può assegnare una parità determinata.

La peculiarità del diagramma (80,1) consiste nel fatto che lo si può dividere in due parti non legate tra loro rompendo, per fare questo, la sola linea interna [1]). Questa linea corrisponde allora ad uno stato intermedio *ad una particella*, ad uno stato cioè che ha in tutto una sola particella virtuale. L'ampiezza di diffusione, relativa a questo diagramma, contiene il fattore caratteristico (che non è sottoposto ad integrazione)

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0}$$

originato dalla linea interna (dove m è la massa dell'elettrone se la linea è elettronica oppure $m = 0$ se la linea è fotonica). In altre parole, l'ampiezza di diffusione ha una singolarità per quei valori di p, per i quali la particella virtuale diventa particella fisica ($p^2 = m^2$). Questa situazione è analoga a quella che si ha nella meccanica quantistica non relativistica, dove l'ampiezza di diffusione ha singolarità per quei valori dell'energia, che corrispondono a stati legati del sistema delle particelle collidenti (III, § 128).

Esaminiamo il diagramma (80,1) per quel canale di reazione, nel quale tutti i terminali liberi a destra sono relativi a particelle iniziali e tutti i terminali a sinistra sono relativi a particelle finali; si ha inoltre che $p^2 > 0$. Allora possiamo dire che nello stato intermedio il sistema delle particelle iniziali si trasforma in una particella virtuale. Questo è possibile alla sola condizione che tale trasformazione non contraddica alle necessarie leggi di conservazione (senza tener conto della conservazione del 4-impulso): conservazione del momento angolare, della carica, della parità di carica, ecc. In questo consiste la condizione necessaria per la comparsa, come si dice, dei *diagrammi singolari*. Se sono presenti in uno dei canali, tali diagrammi saranno presenti, in virtú dell'invarianza di crossing, anche negli altri canali di reazione.

---

[1]) Di questa proprietà godono i diagrammi di quasi tutti i processi al primo ordine di approssimazione non nullo.

Ad esempio, le leggi di conservazione citate non impediscono la produzione di un elettrone virtuale secondo lo schema $e + \gamma \to e$. Questa possibilità corrisponde ad una singolarità dell'ampiezza dell'effetto Compton (e quindi anche di un altro canale di questa reazione, l'annichilazione in due fotoni della coppia e^-e^+). La produzione di un fotone virtuale secondo lo schema $e^- + e^+ \to \gamma$ corrisponde ad una singolarità nell'ampiezza di diffusione elettrone-positrone, e quindi anche nell'ampiezza di diffusione elettrone-elettrone. Da due fotoni non si può ottenere né un elettrone virtuale né un fotone virtuale (la trasformazione $\gamma + \gamma \to e$ è vietata dalla conservazione della carica e del momento angolare, e la trasformazione $\gamma + \gamma \to \gamma$ è vietata dalla conservazione della parità di carica). In accordo con quanto detto l'ampiezza di diffusione fotone-fotone non può contenere diagrammi singolari.

L'origine delle singolarità delle ampiezze di diffusione, che noi abbiamo esaminato partendo dagli integrali di Feynman, ha, in realtà, carattere piú generale, non legato alla teoria delle perturbazioni; si può mostrare che queste singolarità sorgono come conseguenza della condizione di unitarietà (72,2).

Supponiamo infatti che tra gli n stati intermedi, che figurano nella (72,2), ci sia uno stato ad una particella. Il contributo di questo stato vale

$$(T_{fi} - T^*_{if})^{(1\ \mathrm{part})} = i\,(2\pi)^4 \sum_{\lambda} \int \delta^{(4)}(P_f - p)\, T_{fn} T^*_{in} \frac{V d^3p}{(2\pi)^3},$$

dove p e λ sono rispettivamente 4-impulso ed elicità della particella virtuale. Sostituiamo l'integrazione in d^3p con l'integrazione in d^4p (nella regione $p^0 \equiv \varepsilon > 0$)

$$d^3p \to 2\varepsilon\delta(p^2 - M^2)\, d^4p$$

(M è la massa della particella intermedia). L'integrazione elimina la funzione $\delta^{(4)}(P_f - p)$; passando quindi dalle ampiezze T_{fi} alle ampiezze M_{fi} secondo la (65,10), otteniamo

$$(M_{fi} - M^*_{if})^{(1\ \mathrm{part})} = 2\pi i\delta(p^2 - M^2) \sum_{\lambda} M_{fn} M^*_{in}. \qquad (80,3)$$

Supponendo soddisfatte le invarianze T e P avremo (a meno di un fattore di fase) $M_{if} = M_{f'i'}$, dove gli stati i', f' differiscono da i, f solo per il segno delle elicità delle particelle (a parità d'impulso). Sommando l'uguaglianza (80,3) e la stessa per $M_{f'i'} - M^*_{i'f'}$ otteniamo

$$\mathrm{Im}\, \overline{M}^{(1\ \mathrm{part})}_{fi} = -\pi\delta(p^2 - M^2)\, R, \qquad (80,4)$$

dove sono state introdotte le notazioni

$$\overline{M}_{fi} = M_{fi} + M_{f'i'},$$

$$R = -\sum_{\lambda} (M_{fn} M^*_{in} + M_{f'n} M^*_{i'n}).$$

È da qui che discende che $\overline{M}_{fi}$, come funzione analitica di $p^2 = P_i^2 = P_f^2$, ha una singolarità per $p^2 = M^2$. In accordo con la (76,18), per la parte singolare, abbiamo

$$\overline{M}_{fi}^{(1\ \text{part})} = \frac{R}{p^2 - M^2 + i0}. \tag{80,5}$$

Le transizioni reali allo stato ad una particella sono possibili solo per $P_i^2 = P_f^2 = M^2$. In tal modo, noi abbiamo effettivamente ottenuto la struttura dell'ampiezza di diffusione corrispondente ad un diagramma del tipo (80,1).

Soffermiamoci, infine, su una importante proprietà dei diagrammi che contengono cappi elettronici chiusi, proprietà che si può facilmente stabilire applicando al fotone virtuale il concetto di parità di carica: al fotone virtuale, come a quello reale, occorre assegnare una parità di carica determinata (negativa)[1].

Se un diagramma contiene un cappio (con un numero di vertici $N > 2$) allora accanto a questo diagramma nell'ampiezza del processo considerato deve figurare anche un altro diagramma, che differisce dal primo solo per il verso di aggiramento del cappio (per $N = 2$ questo concetto non ha, evidentemente, senso). «Isoliamo» questi cappi spezzando le linee tratteggiate che terminano su di essi. Otterremo allora i due cappi C_I e C_{II}

(80,6)

che si possono considerare come diagrammi, che determinano l'ampiezza del processo di trasformazione di una collezione di fotoni (reali o virtuali) in un altro; il numero N è la somma dei numeri dei fotoni iniziali e finali. La conservazione della parità di carica vieta la trasformazione di un numero pari di fotoni in un numero dispari. Quindi per N dispari la somma delle espressioni, relative ai cappi (80,6), deve annullarsi. Di conseguenza, si annulla anche il contributo totale all'ampiezza di diffusione dei due diagrammi contenenti

[1]) Questo discende da quelle stesse considerazioni sull'operatore di interazione elettromagnetica, agente in ciascun vertice, che vennero fatte alla fine del § 13 per i fotoni reali.

questi cappi come parti costitutive (*teorema di Furry*, W. H. Furry, 1937.)

Di conseguenza, formando l'ampiezza di un certo processo si può tralasciare di considerare i diagrammi, contenenti cappi con un numero dispari di vertici.

Esaminiamo piú da vicino l'origine della mutua eliminazione dei diagrammi. Ad un cappio elettronico chiuso corrisponde l'espressione (per certi impulsi, delle linee fotoniche $k_1, k_2, \ldots, k_N$)

$$\int d^4p \cdot \mathrm{Tr}\,[\hat{e}_1 G(p)\,\hat{e}_2 G(p+k_1)\ \ldots], \tag{80,7}$$

dove $p, p+k_1, \ldots$ sono gli impulsi delle linee elettroniche (che non rimangono completamente determinate dalle leggi di conservazione ai vertici). Sottoponiamo ora tutte le matrici γ^μ e G all'operazione di coniugazione di carica, sostituiamole cioè rispettivamente con $U_C^{-1}\gamma^\mu U_C$ e $U_C^{-1} G U_C$. L'espressione (80,7) non varia per questo, poiché la traccia del prodotto di matrici è invariante per questa trasformazione. D'altra parte, secondo la (26,3) abbiamo

$$U_C^{-1}\gamma^\mu U_C = -\tilde{\gamma}^\mu, \tag{80,8}$$

e quindi

$$U_C^{-1} G(p)\, U_C = \frac{-p\tilde{\gamma}+m}{p^2-m^2} = \tilde{G}(-p). \tag{80,9}$$

Sostituire a $G(p)$ la matrice trasposta con il segno di p cambiato, significa, evidentemente, cambiare il verso di percorrenza del cappio, in cui il verso di tutte le frecce cambia nel verso opposto. In altre parole, la trasformazione eseguita trasforma un cappio in un altro, e simultaneamente compare il fattore $(-1)^N$, originato dalla sostituzione (80,8) in ciascun vertice. In tal modo

$$C_{\mathrm{I}} = (-1)^N C_{\mathrm{II}}, \tag{80,10}$$

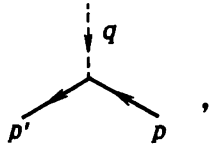
cioè i contributi dei due cappi sono uguali per un numero pari di vertici e opposti per un numero di vertici dispari.

Capitolo IX

INTERAZIONE DI ELETTRONI

§ 81. *Diffusione di un elettrone in un campo esterno*

La diffusione elastica di un elettrone in un campo esterno costante costituisce il processo piú semplice esistente già al primo ordine della teoria delle perturbazioni (prima approssimazione di Born). A questo processo corrisponde il diagramma ad un vertice



(81,1)

dove p, p' sono i 4-impulsi iniziale e finale dell'elettrone, e $q = p' - p$. Poiché l'energia dell'elettrone nella diffusione in un campo costante si conserva ($\varepsilon = \varepsilon'$), allora $q = (0, \boldsymbol{q})$[1].

La corrispondente ampiezza di diffusione è

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p')\,\hat{A}^{(e)}(q)\,u(p), \tag{81,2}$$

dove $A^{(e)}(q)$ è una componente dello sviluppo spaziale di Fourier del campo esterno. In accordo con la (65,26) la sezione d'urto di diffusione è

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}\,|M_{fi}|^2\,do'. \tag{81,3}$$

Per un campo elettrostatico $A^{(e)} = (A_0^{(e)}, 0)$, e quindi

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p')\,\gamma^0 u(p)\,A_0^{(e)}(q) = -eu^*(p')\,u(p)\,A_0^{(e)}(q). \tag{81,4}$$

Nel caso non relativistico le ampiezze bispinoriali delle onde piane $u(p)$ si riducono alle ampiezze non relativistiche (a due componenti). Per una diffusione senza cambiamento di polarizzazione si tratta

---

[1]) Nel caso di un campo esterno questo diagramma non è vietato dalla legge di conservazione del 4-impulso (come avveniva per il diagramma (74,19) con un fotone reale): il quadrato q^2, a differenza del quadrato del 4-impulso di un fotone reale, non deve essere nullo; dall'integrale di Fourier, che rappresenta il campo esterno, viene automaticamente scelta la componente avente il necessario q.

di quantità indipendenti da p, e in virtú della condizione di normalizzazione da noi assunta $u^*u = 2m$. Tenendo conto di questo otteniamo

$$d\sigma = \left| -\frac{m}{2\pi} U(q) \right|^2 do',$$

dove $U(q) = eA_0^{(e)}(q)$ è la trasformata di Fourier dell'energia potenziale dell'elettrone nel campo; questa espressione coincide con la nota formula di Born (III, 126,4).

Nel caso generale relativistico la sezione d'urto di diffusione di elettroni non polarizzati si ottiene mediando il quadrato $|M_{fi}|^2$ sulle polarizzazioni iniziali e sommando su quelle finali, cioè formando la quantità

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2,$$

dove la sommatoria si esegue sulle direzioni dello spin degli elettroni iniziale e finale; il fattore 1/2 trasforma una delle sommatorie in un valore medio. In base alle regole esposte nel § 66 otteniamo

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = 2 \operatorname{Tr} \rho \hat{A}^{(e)*} \rho' \hat{A}^{(e)} =$$

$$= \frac{1}{2} |A_0^{(e)}(q)|^2 \operatorname{Tr} (m + \hat{p}) \gamma^0 (m + \hat{p}') \gamma^0.$$

Per calcolare la traccia, notiamo che $\gamma^0 \hat{p}' \gamma^0 = \hat{\bar{p}}'$, dove $\bar{p}' = (\varepsilon', -\boldsymbol{p}')$ e quindi

$$\frac{1}{4} \operatorname{Tr} (m + \hat{p}) \gamma^0 (m + \hat{p}') \gamma^0 = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} (m + \hat{p}) (m + \hat{\bar{p}}') =$$

$$= m^2 + p\bar{p}' = \varepsilon^2 + m^2 + \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}' = 2\varepsilon^2 - \frac{q^2}{2}.$$

Da qui troviamo la sezione d'urto

$$d\sigma = \frac{e^2 |A_0^{(e)}(q)|^2}{4\pi^2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{q^2}{4\varepsilon^2}\right) do'. \tag{81,5}$$

Per un campo, creato da una distribuzione statica di cariche di densità $\rho(\boldsymbol{r})$, abbiamo

$$A_0^{(e)}(q) = \frac{4\pi\rho(q)}{q^2}, \tag{81,6}$$

dove $\rho(q)$ è la trasformata di Fourier della distribuzione $\rho(\boldsymbol{r})$ (fattore di forma). In particolare, per il campo coulombiano di una carica puntiforme Ze abbiamo $\rho(q) = Ze$. Allora la sezione d'urto di diffusione diventa

$$d\sigma = do' \frac{4(Ze^2)^2 \varepsilon^2}{q^4} \left(1 - \frac{q^2}{4\varepsilon^2}\right) \tag{81,7}$$

(*N. F. Mott*, 1929). Abbiamo $q^2 = 4p^2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$, dove θ è l'angolo di diffusione. Quindi l'espressione a fattore della parentesi può, per la sua dipendenza angolare, essere chiamata sezione d'urto di Rutherford:

$$d\sigma_R = do \frac{4(Ze^2)^2 \varepsilon^2}{q^4} = do \frac{(Ze^2)^2 \varepsilon^2}{4p^4} \operatorname{sen}^{-4}\frac{\theta}{2} \tag{81,8}$$

(nel limite non relativistico il coefficiente $\varepsilon^2/p^4 \to 1/m^2v^4$). In tal modo si ottiene [1])

$$d\sigma = d\sigma_R^{\cdot}\left(1 - v^2 \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{81,9}$$

Notiamo che nel caso ultrarelativistico la distribuzione angolare differisce da quella non relativistica per una forte soppressione della diffusione all'indietro (per $\theta \to \pi$: $d\sigma/d\sigma_R \to m^2/\varepsilon^2$).

Nel caso ultrarelativistico, per la diffusione a piccoli angoli la (81,7) dà

$$d\sigma = \frac{4(Ze^2)^2}{\varepsilon^2\theta^4} do'. \tag{81,10}$$

Sebbene questa formula sia stata da noi ottenuta nell'approssimazione di Born (cioè supponendo $Ze^2 \ll 1$), essa rimane valida (per angoli $\theta \lesssim m/\varepsilon$) anche per $Ze^2 \sim 1$. Di questo ci si può convincere mediante la funzione d'onda ultrarelativistica esatta (in Ze^2) $\psi^+_{\varepsilon p}$ (39,10). Questa soluzione, valida nella regione (39,2), rimane, ovviamente, valida anche nella regione asintotica, corrispondente a r arbitrariamente grandi. In questa regione

$$F \sim 1 + \text{costante} \cdot e^{i(pr - pr)}, \quad \frac{\alpha \nabla F}{\varepsilon} \sim 1 - \cos\theta \sim \theta^2 \ll 1,$$

e quindi il termine correttivo rimane piccolo, come deve essere. La funzione d'onda del tipo $e^{ipr}\, F$, invece, coincidendo formalmente con la funzione non relativistica (con un evidente cambiamento dei parametri), ha il suo stesso andamento asintotico, e quindi anche per la sezione d'urto si ottiene l'espressione di Rutherford.

Per calcolare la sezione d'urto di diffusione di elettroni arbitrariamente polarizzati si potrebbe fare uso, seguendo le regole generali, della matrice densità (29,13). Nel nostro caso, tuttavia, si può

---

[1]) La differenza, espressa da questa formula, tra $d\sigma$ e $d\sigma_R$, è peculiare per le particelle di spin 1/2. Per la diffusione di particelle di spin 0 (se il loro moto in un campo elettromagnetico fosse descritto da un'equazione d'onda) si otterrebbe $d\sigma = d\sigma_R$. A prima vista può nascere una certa perplessità in quanto il fattore, che esprime questo effetto puramente quantistico, non contiene $\hbar$. Occorre tuttavia ricordare che la condizione di applicabilità dell'approssimazione di Born ($e^2/\hbar v \ll 1$) è l'opposto della condizione di quasi-classicità per il moto in un campo coulombiano e quindi il passaggio al caso classico nella formula (81,9) non è possibile.

ottenere il risultato in un modo meno complicato, rappresentando le ampiezze bispinoriali $u(p)$ e $u(p')$ nella forma (23,9); moltiplicandole, otteniamo

$$u^*(p')\,u(p) = w'^*\{\varepsilon + m + (\varepsilon - m)(\boldsymbol{n}'\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\}\,w,$$

oppure, usando la formula (33,5),

$$u^*(p')\,u(p) = w'^*\mathrm{f}w, \tag{81,11}$$

dove[1])

$$\mathrm{f} = A + B\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma},$$

$$A = (\varepsilon + m) + (\varepsilon - m)\cos\theta, \quad B = -i(\varepsilon - m)\operatorname{sen}\theta, \tag{81,12}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']}{\operatorname{sen}\theta}.$$

La quantità a due componenti w (uno spinore tridimensionale) rappresenta la funzione d'onda di spin non relativistica dell'elettrone. Il passaggio a stati parzialmente polarizzati si esegue quindi mediante la sostituzione dei prodotti $w_\alpha\, w_\beta^*$ (α, β, sono indici spinoriali) con la matrice densità a due righe non relativistica $\rho_{\alpha\beta}$. Occorre quindi fare la sostituzione

$$|M_{fi}|^2 \to e^2\,|A_0^{(e)}(q)|^2\,\mathrm{Tr}\,\rho\,(A - B\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma})\,\rho'\,(A + B\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma}),$$

dove

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}), \qquad \rho' = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}'),$$

$\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\zeta}'$ sono i vettori che corrispondono alla polarizzazione iniziale e finale rivelata dal «detector». Calcolando la traccia si arriva al risultato

$$d\sigma = d\sigma_0\left\{1 + \frac{(A^2 - |B|^2)\,\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}' + 2|B|^2(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\zeta})(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\zeta}') + 2A|B|\,\boldsymbol{\nu}\,[\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}']}{A^2 + |B|^2}\right\}, \tag{81,13}$$

dove $d\sigma_0$ è la sezione d'urto di diffusione di elettroni non polarizzati.

Rappresentando la parentesi graffa nella (81,13) nella forma $\{1 + \boldsymbol{\zeta}^{(f)}\,\boldsymbol{\zeta}'\}$, troveremo la polarizzazione propria $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$ dell'elettrone finale (diversa dalla polarizzazione $\boldsymbol{\zeta}'$ rivelata dal detector; vedi § 66)[2]):

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{(A^2 - |B|^2)\,\boldsymbol{\zeta} + 2|B|^2(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\zeta})\,\boldsymbol{\nu} + 2A|B|\,[\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\zeta}]}{A^2 + |B|^2}. \tag{81,14}$$

Vediamo cosí che gli elettroni emergenti sono polarizzati solo se sono polarizzati gli elettroni incidenti. Questo fatto è una proprietà generale della prima approssimazione di Born (cfr. III, § 140).

---

[1]) Le definizioni di f date qui e nel § 38 differiscono per il fattore generale.

[2]) La formula (81,14) corrisponde alla formula ottenuta nel problema 1, III, § 140 e si ricava da essa ponendo A reale e B complesso.

Nel caso non relativistico ($\varepsilon \to m$) dalla (81,14) si ottiene $\zeta^{(f)} = \zeta$, cioè l'elettrone mantiene nella diffusione la sua polarizzazione (come naturale conseguenza del fatto che si trascura l'interazione spin-orbita).

Nel caso opposto, ultrarelativistico, abbiamo

$$A = \varepsilon\,(1 + \cos\theta), \quad B = -\,i\varepsilon \operatorname{sen}\theta$$

(in accordo con la formula generale (38,2)).

Se l'elettrone incidente ha una data elicità ($\zeta = 2\lambda \boldsymbol{n}$, $\lambda = \pm\,1/2$), allora dalla (81,14), dopo calcoli semplici, si ottiene

$$\zeta^{(f)} = 2\lambda \boldsymbol{n}^{\ell}.$$

In altre parole, dopo la diffusione l'elettrone mantiene il valore primitivo dell'elicità (λ).

Questa proprietà, come è stato già spiegato nel § 38, è connessa al fatto che, se si trascura la massa, l'equazione di Dirac in rappresentazione spinoriale si scinde in due equazioni indipendenti per le funzioni ξ e η. Questo risultato ha anche un significato piú generale, poiché la corrente

$$\mathrm{j} = (\xi^*\xi + \eta^*\eta, \quad \xi^*\sigma\xi - \eta^*\sigma\eta),$$

e con essa anche l'operatore perturbazione elettromagnetica $V = e\mathrm{j}A$, non contiene termini misti in ξ e η, e quindi non ha elementi di matrice relativi a transizioni tra gli stati ξ e η. Da qui discende che se un elettrone ultrarelativistico ha una determinata elicità (cioè se ξ o η è diverso da zero), allora nei processi di interazione questa elicità si conserverà nell'approssimazione in cui si trascura completamente la massa dell'elettrone.

§ 82. Diffusione di elettroni e di positroni su un elettrone

Consideriamo la diffusione di un elettrone su un altro elettrone: due elettroni con 4-impulsi p_1, p_2 entrano in collisione e assumono i 4-impulsi p_1', p_2'. La conservazione del 4-impulso è espressa dall'uguaglianza

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'. \tag{82,1}$$

Piú avanti si useranno gli invarianti cinematici introdotti nel § 67, definiti come segue:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2\,(m^2 + p_1 p_2), \\ t &= (p_1 - p_1')^2 = 2\,(m^2 - p_1 p_1'), \\ u &= (p_1 - p_2')^2 = 2\,(m^2 - p_1 p_2'), \\ s + t + u &= 4m^2. \end{aligned} \tag{82,2}$$

Il processo considerato è rappresentato dai due diagrammi di Feynman (74,13-14) e l'ampiezza corrispondente è[1])

$$M_{fi} = 4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{t} (\bar{u}_2' \gamma^\mu u_2)(\bar{u}_1' \gamma_\mu u_1) - \frac{1}{u} (\bar{u}_1' \gamma^\nu u_2)(\bar{u}_2' \gamma_\nu u_1) \right\}. \quad (82,3)$$

In base alle regole indicate al § 66 per gli stati delle particelle iniziali e finali, descritti dalle matrici densità di polarizzazione ρ_1, ρ_1', . . ., operiamo la sostituzione

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4 \left\{ \frac{1}{t^2} \operatorname{Tr}(\rho_2' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu) \operatorname{Tr}(\rho_1' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) + \right.$$
$$+ \frac{1}{u^2} \operatorname{Tr}(\rho_1' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu) \operatorname{Tr}(\rho_2' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) - \frac{1}{tu} \operatorname{Tr}(\rho_2' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho_1' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) -$$
$$\left. - \frac{1}{tu} \operatorname{Tr}(\rho_1' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho_2' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) \right\}. \quad (82,4)$$

Se studiamo la diffusione di elettroni non polarizzati (e non ci interessiamo inoltre nemmeno delle loro polarizzazioni dopo la diffusione) per tutte le matrici densità noi dobbiamo porre $\rho = {}^1/_2 (\hat{p} + m)$, e moltiplicare il risultato per $2 \cdot 2 = 4$ (media sulle polarizzazioni dei due elettroni iniziali e somma sulle polarizzazioni dei due elettroni finali). La sezione d'urto di diffusione è determinata dalla formula (65,23), nella quale occorre porre, in accordo con la (65,15a), $I^2 = 1/4\, s\, (s - 4m^2)$. Rappresentiamo la sezione d'urto nella forma

$$d\sigma = dt \frac{4\pi e^4}{s(s-4m^2)} \{ f(t, u) + g(t, u) + f(u, t) + g(u, t) \},$$

$$f(t, u) = \frac{1}{16t^2} \operatorname{Tr}[(\hat{p}_2' + m) \gamma^\mu (\hat{p}_2 + m) \gamma^\nu] \operatorname{Tr}[(\hat{p}_1' + m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma_\nu],$$

$$g(t, u) = -\frac{1}{16tu} \operatorname{Tr}[(\hat{p}_2' + m) \gamma^\mu (\hat{p}_2 + m) \gamma^\nu (\hat{p}_1' + m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma_\nu]. \quad (82,5)$$

Nella funzione $f(t, u)$ si calcolano dapprima le tracce (usando le relazioni (22,9-10)), e quindi si esegue la somma su μ e ν [2]); in $g(t, u)$ dapprima si esegue la somma su μ e ν (usando le formule (22,6)). Come risultato si ottiene

$$f(t, u) = \frac{2}{t^2} [(p_1 p_2)^2 + (p_1 p_2')^2 + 2m^2 (m^2 - p_1 p_1')],$$

$$g(t, u) = \frac{2}{tu} (p_1 p_2 - 2m^2)(p_1 p_2),$$

---

[1]) Questa forma di M_{fi} corrisponde all'espressione generale (71,5). Nella prima approssimazione non nulla della teoria delle perturbazioni, delle cinque ampiezze invarianti ne risulta diversa da zero solo una: $f_3(t, u) = 4\pi e^2/t$.

[2]) Per futuri riferimenti riportiamo la formula

$$\frac{1}{4} \operatorname{Tr}(\hat{p}_1 + m) \gamma^\mu (\hat{p}_2 + m) \gamma^\nu = g^{\mu\nu} (m^2 - p_1 p_2) + p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu.$$

oppure, esprimendo queste funzioni attraverso gli invarianti (82,2),

$$f(t, u) = \frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2)\right],$$
$$g(t, u) = g(u, t) = \frac{2}{tu}\left(\frac{s}{2} - m^2\right)\left(\frac{s}{2} - 3m^2\right). \tag{82,6}$$

In tal modo, per la sezione d'urto otteniamo

$$d\sigma = r_e^2 \frac{4\pi m^2\, dt}{s(s-4m^2)}\left\{\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2} + 4m^2(u-m^2)\right] + \frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2} - m^2\right)\left(\frac{s}{2} - 3m^2\right)\right\} \tag{82,7}$$

(dove $r_e = e^2/m$).

Applichiamo questa formula nel sistema del baricentro. Qui si ha

$$s = 4\varepsilon^2, \quad t = -4p^2 \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}, \quad u = -4p^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$
$$-dt = -2p^2 d\cos\theta = \frac{p^2}{\pi}\, do \tag{82,8}$$

($|p|$, ε sono rispettivamente impulso ed energia degli elettroni, che nella diffusione non variano e θ è l'angolo di diffusione). Nel caso non relativistico ($\varepsilon \approx m$)[1]) otteniamo

$$d\sigma = r_e^2 \frac{\pi m^4\, dt}{p^2}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{tu}\right) =$$
$$= \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right) do =$$
$$= \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{4(1+3\cos^2\theta)}{\operatorname{sen}^4\theta}\, do \quad \text{(non rel.)} \tag{82,9}$$

(dove $v = 2p/m$ è la velocità relativa degli elettroni), in accordo con la teoria non relativistica (vedi III, § 137). Nel caso generale di velocità qualsiasi la formula (82,7), dopo la sostituzione in essa della (82,8) e semplici trasformazioni, può essere ridotta alla forma

$$d\sigma = r_e^2 \frac{m^2(\varepsilon^2+p^2)^2}{4p^4\varepsilon^2}\left[\frac{4}{\operatorname{sen}^4\theta} - \frac{3}{\operatorname{sen}^2\theta} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{p^2}{\varepsilon^2+p^2}\right)^2\left(1 + \frac{4}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\right] do \tag{82,10}$$

(*Ch. Möller*, 1932). Nel caso ultrarelativistico ($p^2 \approx \varepsilon^2$) otteniamo

$$d\sigma = r_e^2 \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{(3+\cos^2\theta)^2}{4\operatorname{sen}^4\theta}\, do \quad \text{(ultrarel.)}. \tag{82,11}$$

---

[1]) La velocità v è supposta piccola ($v \ll 1$), ma sempre tale che sia soddisfatta la condizione di applicabilità della teoria delle perturbazioni: e^2/v ($= e^2/\hbar v$) $\ll$ $\ll 1$.

Nel sistema di riferimento del laboratorio, nel quale uno degli elettroni (per esempio il secondo) prima dell'urto si trova in quiete, esprimiamo la sezione d'urto attraverso la quantità

$$\Delta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1'}{m} = \frac{\varepsilon_2' - m}{m}, \tag{82,12}$$

che rappresenta l'energia (in unità m) trasferita dall'elettrone incidente (il primo) al secondo[1]). Gli invarianti sono

$$\begin{aligned} s &= 2m(m+\varepsilon_1), \quad t = -2m^2\Delta, \\ u &= -2m(\varepsilon_1 - m - m\Delta). \end{aligned} \tag{82,13}$$

Sostituendo queste espressioni nella (82,7) arriviamo alla formula che dà la distribuzione in energia degli elettroni secondari (o, come si dice, degli *elettroni* δ), che risultano dalla diffusione di elettroni primari veloci:

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2-1}\left\{\frac{(\gamma-1)^2\gamma^2}{\Delta^2(\gamma-1-\Delta)^2} - \frac{2\gamma^2+2\gamma-1}{\Delta(\gamma-1-\Delta)} + 1\right\}, \tag{82,14}$$

dove $\gamma = \varepsilon_1/m$; $m\Delta$ e $m(\gamma - 1 - \Delta)$ sono le energie cinetiche dei due elettroni dopo l'urto; l'identità delle due particelle si manifesta qui nella simmetria della formula rispetto a queste grandezze. Se si conviene di chiamare elettrone di rinculo quello che ha energia minore, allora Δ assumerà valori compresi da 0 a $(\gamma - 1)/2$. Per Δ piccoli la formula (82,14) assume la forma

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\frac{d\Delta}{\Delta^2} = \frac{2\pi r_e^2}{v_1^2}\frac{d\Delta}{\Delta^2}, \quad \Delta \ll \gamma - 1. \tag{82,15}$$

Notiamo che questa formula, espressa attraverso la velocità dell'elettrone incidente ($v_1 = |\boldsymbol{p}_1|/\varepsilon_1$), conserva la sua forma nel passaggio al caso relativistico. È quindi naturale che nella forma questa espressione coincida con il risultato della teoria non relativistica (cfr. III (148,17)).

Esaminiamo ora la diffusione di un positrone su un elettrone (*H. Bhabha*, 1936). Questo processo è uno dei canali incrociati di quella stessa reazione generalizzata, cui si riferisce la diffusione elettrone-elettrone. Se p_-, p_+ sono gli impulsi iniziali dell'elettrone e del positrone e p_-', p_+' i rispettivi impulsi finali, allora il passaggio da un caso all'altro si realizza mediante la sostituzione

$$p_1 \to -p_+', \quad p_2 \to p_-, \quad p_1' \to -p_+, \quad p_2' \to p_-'.$$

Gli invarianti cinematici (82,2) assumono il seguente significato:

$$s = (p_- - p_+')^2, \quad t = (p_+ - p_+')^2, \quad u = (p_- + p_+)^2. \tag{82,16}$$

---

[1]) Per le relazioni cinematiche nel caso di urti elastici nei diversi sistemi di riferimento vedi II, § 13.

Se la diffusione ee era il canale s, allora la diffusione $\bar{e}e$ sarà il canale u della reazione. Il quadrato dell'ampiezza di diffusione rimane invariato, e al denominatore della formula (82,5) occorre fare la sostituzione $s \to u$. In tal modo, per la sezione d'urto di diffusione di un positrone su un elettrone, invece della (82,7), otteniamo

$$d\sigma = r_e^2 \frac{4\pi m^2\, dt}{u(u-4m^2)} \left\{ \frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2)\right] + \right.$$
$$+ \frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2} + 4m^2(u-m^2)\right] +$$
$$\left. + \frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2} - m^2\right)\left(\frac{s}{2} - 3m^2\right)\right\}. \qquad (82,17)$$

Nel sistema del baricentro i valori degli invarianti s, t, u differiscono dai valori (82,8) per lo scambio di s e u:

$$s = -4p^2\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad t = -4p^2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}, \quad u = 4\varepsilon^2. \qquad (82,18)$$

Nel limite non relativistico la formula (82,17) si riduce alla formula di Rutherford

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{do}{\mathrm{sen}^4\frac{\theta}{2}} \qquad \text{(non rel.)} \qquad (82,19)$$

(dove $v = 2p/m$). Essa si ricava dal primo termine tra parentesi graffa nella (82,17), originato dal diagramma di tipo «diffusione» (vedi § 74). I contributi del diagramma «di annichilazione» (secondo termine nella (82,17)) e della interferenza di questo col diagramma «di diffusione» (terzo termine) nel limite non relativistico si annullano[1]).

Nel caso generale di velocità qualsiasi i contributi di tutti e tre i termini della (82,17) sono dello stesso ordine di grandezza (soltanto per angoli piccoli il primo termine diventa dominante grazie al fattore $t^{-2} \sim \mathrm{sen}^{-4}\,\theta/2$). Dopo la riduzione dei termini simili la

---

[1]) Nel limite non relativistico le ampiezze u diventano grandezze a due componenti (vedi la (23,12)); per il 4-vettore elettronico abbiamo $\bar{u}'_-\gamma^\mu u_- = (2mw'^*_- w_-, 0)$, e lo stesso per quello positronico. Il termine «di diffusione» nell'ampiezza (74,15) assume la forma

$$-(2m)^2 (w'^*_- w_-)(w'^*_+ w_+)\, U_q,$$

dove

$$U_q = \frac{4\pi e^2}{q^2} = -\frac{4\pi e^2}{q^2}$$

(nel sistema del baricentro per un fotone virtuale nel diagramma «di diffusione» $q^0 = 0$); U_q è la trasformata di Fourier dell'energia di interazione coulombiana fra cariche opposte ($-e^2/r$). Per un fotone virtuale nel diagramma «di annichilazione» $q^0 = 2m$ ($= 2mc$), e perciò questo termine al limite si annulla.

sezione d'urto di diffusione di un positrone su un elettrone si può rappresentare (nel sistema del baricentro) nella forma

$$d\sigma = do\,\frac{r_e^2}{16}\,\frac{m^2}{\varepsilon^2}\left\{\frac{(\varepsilon^2+p^2)^2}{p^4}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}} - \frac{8\varepsilon^4-m^4}{p^2\varepsilon^2}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{12\varepsilon^4+m^4}{\varepsilon^4} - \frac{4p^2(\varepsilon^2+p^2)}{\varepsilon^4}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + \frac{4p^4}{\varepsilon^4}\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}\right\}. \qquad (82,20)$$

La simmetria rispetto alla sostituzione $\theta \to \pi - \theta$, caratteristica della diffusione di particelle identiche, nella diffusione positrone-elettrone, ovviamente, viene a mancare. Nel limite ultrarelativistico l'espressione (82,20) differisce dalla sezione d'urto di diffusione elettrone-elettrone solo per il fattore $\cos^4 \theta/2$:

$$d\sigma_{e^-e} = \cos^4\frac{\theta}{2}\,d\sigma_{ee} \quad \text{(ultrarel.)}. \qquad (82,21)$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio, dove una delle particelle (per esempio, l'elettrone) prima dell'urto era in quiete, introduciamo nuovamente la quantità

$$\Delta = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon'_+}{m} = \frac{\varepsilon'_- - m}{m}, \qquad (82,22)$$

cioè l'energia trasferita dal positrone. Analogamente alla (82,13), abbiamo ora

$$s = -2m(\varepsilon_+ - m - m\Delta), \quad t = -2m^2\Delta, \quad u = 2m(m+\varepsilon_+).$$

Sostituendo queste espressioni nella (82,17), dopo semplici trasformazioni, otteniamo la seguente formula per la distribuzione in energia degli elettroni secondari:

$$d\sigma = 2\pi r_e^2\,\frac{d\Delta}{\gamma^2-1}\left\{\frac{\gamma^2}{\Delta^2} - \frac{2\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma+1}\,\frac{1}{\Delta} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\gamma^2+6\gamma+4}{(\gamma+1)^2} - \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2}\Delta + \frac{1}{(\gamma+1)^2}\Delta^2\right\}, \qquad (82,23)$$

dove $\gamma = \varepsilon_+/m$; Δ assume valori da 0 a $\gamma - 1$. Per $\Delta \ll \gamma - 1$ dalla (82,23) si ottiene un'espressione uguale alla (82,15), valida per la diffusione di elettroni.

Gli effetti di polarizzazione nella diffusione di elettroni o di positroni si calcolano in base alle regole esposte nel § 66. In casi appena piú generali i calcoli portano a formule molto complesse, per le quali noi rimandiamo ai lavori originali o a speciali articoli di rassegna[1]). Qui noi ci limiteremo ad alcune osservazioni.

---

[1]) A. M. Bincer, Phys. Rev. 107, 1434 (1957); G. W. Ford, C. J. Mullin, Phys. Rev. 108, 477 (1957) (correzione: Phys. Rev. 110, 1485, 1958); W. H. McMaster, Rev. Mod. Phys. 33, 8 (1961).

Nell'approssimazione della teoria delle perturbazioni in cui lavoriamo (la prima non nulla), nella sezione d'urto mancano i termini lineari rispetto ai vettori polarizzazione delle particelle iniziali o finali. Come anche nella teoria non relativistica (III, § 140), questi termini sono vietati dalle condizioni, che discendono dal fatto che la matrice di diffusione è hermitiana. Perciò la sezione d'urto di diffusione non cambia nel caso che sia polarizzata solo una delle particelle collidenti, e la diffusione di particelle non polarizzate non porta ad una loro polarizzazione.

Queste stesse richieste impediscono che nella sezione d'urto siano presenti termini di correlazione, che contengono prodotti delle polarizzazioni di tre fra le particelle (iniziali e finali) partecipanti al processo. La sezione d'urto contiene, tuttavia, termini di correlazione doppi e quadrupli. Nella diffusione di particelle non identiche (elettrone e positrone; elettrone e muone) nel limite non relativistico questi termini si annullano, poiché manca l'interazione spin-orbita. Nell'urto di particelle identiche, invece, i termini di correlazione si hanno già nel limite non relativistico grazie agli effetti di scambio.

PROBLEMI

1. Determinare la sezione d'urto di diffusione di elettroni nel caso non relativistico.

Soluzione. Nel caso non relativistico le ampiezze bispinoriali in rappresentazione standard diventano grandezze a due componenti, e le matrici densità diventano le matrici a due righe (29,20). Nell'ampiezza di diffusione (82,3) diversi da zero rimangono solo i termini con $\mu = \nu = 0$, contenenti le matrici diagonali γ^0 (in rappresentazione standard). Al posto della (82,4) avremo

$$\sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \left\{ \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2}\right) \mathrm{Tr}\,(1+\sigma\zeta_1)\,\mathrm{Tr}\,(1+\sigma\zeta_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{tu}\,\mathrm{Tr}\,(1+\sigma\zeta_1)\,(1+\sigma\zeta_2) \right\} = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \cdot 4 \left[\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{tu}\,(1+\zeta_1\zeta_2) \right]$$

(la somma è effettuata sulle polarizzazioni finali degli elettroni). Da qui per la sezione d'urto di diffusione troviamo

$$d\sigma = d\sigma_0 \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1+3\cos^2\theta}\,\zeta_1\zeta_2\right),$$

dove θ è l'angolo di diffusione nel sistema del baricentro, $d\sigma_0$ è la sezione d'urto per particelle non polarizzate (82,9)[1].

La sezione d'urto di diffusione di positroni su elettroni in questa stessa approssimazione non dipende dalla polarizzazione ($d\sigma = d\sigma_0$); di questo è facile convincersi se si nota che nel limite non relativistico nelle ampiezze elettroniche e positroniche u_p e u_{-p}, sono diverse da zero coppie differenti di componenti.

2. Determinare nel caso non relativistico la polarizzazione degli elettroni emergenti dalla diffusione di un fascio non polarizzato su un bersaglio polarizzato.

---

[1]) Per elettroni totalmente polarizzati questa formula coincide col risultato del problema nel III, § 137 (dove ora $|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$, $\zeta_1\zeta_2 = \cos\alpha$, α è l'angolo tra le direzioni di polarizzazione degli elettroni).

Soluzione. Calcoliamo la sezione d'urto di diffusione per una data polarizzazione iniziale ζ_2 e una data polarizzazione finale rivelata ζ_1' (viene rivelata la polarizzazione di uno solo degli elettroni finali). Con lo stesso metodo usato nel problema 1, otteniamo

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, d\sigma_0 \left[1 - \zeta_1'\zeta_2 \frac{2\cos\theta\,(1-\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta} \right].$$

Da qui, per il vettore polarizzazione dell'elettrone diffuso, troviamo

$$\zeta_1^{(f)} = -\zeta_2 \frac{2\cos\theta\,(1-\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}.$$

3. Determinare nel limite non relativistico la probabilità di spin-flip di un elettrone totalmente polarizzato che diffonde su un elettrone non polarizzato.

Soluzione. Analogamente ai casi precedenti, troviamo la sezione d'urto per polarizzazioni ζ_1, e ζ_1' fissate:

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, d\sigma_0 \left[1 + \zeta_1\zeta_1' \frac{2\cos\theta\,(1+\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta} \right].$$

Ponendo $\zeta_1\zeta_1' = -1$, troviamo la probabilità di inversione della direzione dello spin:

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{2\,(1+3\cos^2\theta)}.$$

4. Determinare il rapporto tra le sezioni d'urto di diffusione di elettroni dotati di elicità rispettivamente con spin paralleli e antiparalleli nel caso ultrarelativistico.

Soluzione. In accordo con la (29,22), nella (82,4) occorre porre

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\,\hat{p}_1(1-2\lambda_1\gamma^5), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}\,\hat{p}_2\,(1-2\lambda_2\gamma^5), \quad \rho_1' = \frac{1}{2}\,\hat{p}_1', \quad \rho_2' = \frac{1}{2}\,\hat{p}_2',$$

dove λ_1, $\lambda_2 = \pm 1/2$. Il calcolo delle tracce viene eseguito secondo le regole riportate al § 22; in particolare,

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma^5\hat{a}\gamma^\mu\hat{b}\gamma^\nu)\,\mathrm{Tr}\,(\gamma^5\hat{c}\gamma_\mu\hat{d}\gamma_\nu) = i^2\,(e^{\rho\mu\lambda\nu}a_\rho b_\lambda)\,(e_{\sigma\mu\tau\nu}c^\sigma d^\tau) =$$
$$= 2\,(\delta^\rho_\sigma\delta^\lambda_\tau - \delta^\rho_\tau\delta^\lambda_\sigma)\,a_\rho b_\lambda c^\sigma d^\tau = 2\,(ac)\,(bd) - 2\,(ad)\,(bc).$$

Come risultato otteniamo

$$\frac{d\sigma}{dt} \backsim \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{s^2+t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right) + 4\lambda_1\lambda_2 \left(\frac{s^2-u^2}{t^2} + \frac{s^2-t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right).$$

Poiché gli impulsi degli elettroni collidenti (nel sistema del baricentro) sono opposti, allora a elicità uguali ($\lambda_1 = \lambda_2$) corrispondono spin antiparalleli, e a elicità differenti ($\lambda_1 = -\lambda_2$) spin paralleli. Sostituendo s, t, u dalla (82,8) (dove ora $p^2 \approx \varepsilon^2$), per la relazione cercata troviamo

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\uparrow\downarrow}} = \frac{1}{8}\,(1 + 6\cos^2\theta + \cos^4\theta). \tag{1}$$

Questo rapporto è minimo (1/8) per $\theta = \pi/2$.

5. Determinare lo stesso rapporto per la diffusione di positroni su elettroni.

Soluzione. In questo caso invece della (82,4) occorre calcolare

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4 \left\{ \frac{1}{t^2}\,\mathrm{Tr}\,(\rho_-'\gamma^\mu\rho_-\gamma^\nu)\,\mathrm{Tr}\,(\rho_+\gamma_\mu\rho_+'\gamma_\nu) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{tu}\,\mathrm{Tr}\,(\rho_-'\gamma^\mu\rho_-\gamma^\nu\rho_+\gamma_\mu\rho_+'\gamma_\nu) + \ldots \right\}$$

(gli altri termini si ricavano da quelli scritti mediante lo scambio di ρ_+ e ρ'_-). Le matrici densità sono

$$\rho_- = \frac{1}{2}\hat{p}_-(1-2\lambda_-\gamma^5), \qquad \rho_+ = \frac{1}{2}\hat{p}_+(1+2\lambda_+\gamma^5), \quad \rho'_- = \frac{1}{2}\hat{p}'_-, \quad \rho'_+ = \frac{1}{2}\hat{p}'_+,$$

dove $\lambda_+, \lambda_- = \pm 1/2$ (sia per il positrone che per l'elettrone $\lambda_+ = 1/2$ significa che lo spin è diretto come l'impulso). Il calcolo dà

$$\frac{d\sigma}{dt} \backsim \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{s^2+t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\right) - 4\lambda_+\lambda_-\left(\frac{s^2-u^2}{t^2} + \frac{s^2-t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\right).$$

Da qui, per il rapporto tra le sezioni d'urto, si ottiene un risultato, che coincide con la formula (1) del problema 4.

6. Determinare la sezione d'urto di diffusione di muoni su elettroni.

Soluzione. Il processo è descritto dal solo diagramma (74,17). Al posto della (82,5) abbiamo

$$d\sigma = \frac{\pi e^4\, dt}{(p_e p_\mu)^2 - m^2\mu^2} f(t, u) = \frac{4\pi e^4\, dt}{[s-(m+\mu)^2][s-(m-\mu)^2]} f(t, u), \tag{1}$$

$$f(t, u) = \frac{1}{16t^2} \operatorname{Tr}[(\hat{p}'_\mu + \mu)\gamma^\lambda(\hat{p}_\mu + \mu)\gamma^\nu] \operatorname{Tr}[(\hat{p}'_e + m)\gamma_\lambda(\hat{p}_e + m)\gamma_\nu]$$

(p_e, p_μ e p'_e, p'_μ sono i 4-impulsi iniziali e finali dell'elettrone e del muone; m, μ sono le loro masse). Gli invarianti sono

$$s = (p_e + p_\mu)^2 = m^2 + \mu^2 + 2p_e p_\mu,$$
$$t = (p_e - p'_e)^2 = 2(m^2 - p_e p'_e) = 2(\mu^2 - p_\mu p'_\mu),$$
$$u = (p_e - p'_\mu)^2 = m^2 + \mu^2 - 2p_e p'_\mu,$$
$$s + t + u = 2(m^2 + \mu^2).$$

Il calcolo porta al risultato

$$f = \frac{2}{t^2}\left\{(p_e p_\mu)^2 + (p_e p'_\mu)^2 + \frac{1}{2}(m^2+\mu^2)t\right\} =$$
$$= \frac{1}{t^2}\left\{\frac{s^2+u^2}{2} + (m^2+\mu^2)(2t - m^2 - \mu^2)\right\}. \tag{2}$$

Le formule (1) e (2) danno la soluzione del problema posto. Nel sistema del baricentro abbiamo

$$d\sigma = \frac{e^4\, do}{8(\varepsilon_e + \varepsilon_\mu)^2 p^4 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \times$$
$$\times \left[(\varepsilon_e\varepsilon_\mu + p^2)^2 + (\varepsilon_e\varepsilon_\mu + p^2\cos\theta)^2 - 2(m^2+\mu^2)p^2 \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right],$$

dove $do = 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta$; ε_e, ε_μ sono le energie dell'elettrone e del muone; $p^2 = \varepsilon_e^2 - m^2 = \varepsilon_\mu^2 - \mu^2$. Per $p^2 \ll \mu^2$ si riottiene la formula (81,9) per la diffusione di un elettrone su un centro coulombiano fisso. Nel caso ultrarelativistico ($p^2 \gg \mu^2$)

$$d\sigma = \frac{e^4}{8p^4} \frac{1+\cos^4\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}}\, do.$$

Nel sistema del laboratorio (in cui prima dell'urto l'elettrone era in quiete)

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \frac{d\Delta}{v_\mu^2 \Delta^2} \left(1 - v_\mu^2 \frac{\Delta}{\Delta_{\max}} + \frac{m^2}{2\varepsilon_\mu^2}\Delta^2\right).$$

Qui ε_μ è l'energia e $v_\mu = p_\mu/\varepsilon_\mu$ la velocità del muone incidente; $m\Delta = \varepsilon_e' - m = \varepsilon_\mu - \varepsilon_\mu'$ è l'energia dell'elettrone di rinculo, e

$$\Delta_{\max} = \frac{2p_\mu^2}{m^2 + \mu^2 + 2m\varepsilon_\mu}$$

è il valore massimo di Δ.

7. Determinare il rapporto tra le sezioni d'urto di diffusione reciproca di elettroni e muoni dotati di elicità con spin paralleli ed antiparalleli nel caso ultrarelativistico ($\varepsilon_\mu \gg \mu$, $\varepsilon_e \gg m$).

Soluzione. Analogamente al problema 4 troviamo

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\uparrow\downarrow}} = \cos^4 \frac{\theta}{2}$$

(θ è l'angolo di diffusione nel sistema del baricentro).

8. Determinare la sezione d'urto di trasformazione di una coppia elettronica in una coppia muonica (*V. B. Berestetskij, I. Ja. Pomerančuk*, 1955).

Soluzione. Questo è uno dei canali incrociati della reazione cui si riferisce la diffusione muone-elettrone. In questo canale abbiamo

$$s = (p_e - \bar{p}_\mu)^2, \quad t = (p_e + \bar{p}_e)^2, \quad u = (p_e - p_\mu)^2,$$

dove p_e, $\bar{p}_e$ sono i 4-impulsi dell'elettrone e del positrone, e p_μ, $\bar{p}_\mu$ i 4-impulsi del muone e dell'antimuone. La soglia di reazione si trova in corrispondenza al valore 2μ dell'energia della coppia elettronica (nel sistema del baricentro), e quindi deve essere $t > 4\mu^2$. Nel sistema del laboratorio, in cui prima dell'urto l'elettrone è in quiete e il positrone possiede l'energia ε_+, abbiamo

$$t = 2m(\varepsilon_+ + m) \approx 2m\varepsilon_+,$$

e quindi deve essere $\varepsilon_+ > \varepsilon_s$, dove l'energia di soglia $\varepsilon_s = 2\mu^2/m$ (qui e nel seguito sono state fatte sostituzioni approssimate, rese possibili dalla disuguaglianza $\mu \gg m$).

La sezione d'urto differenziale (invece della (1) e (2) del problema 6) è

$$d\sigma = \frac{4\pi e^4\, ds}{(t - 4m^2)\, t} f(t, u) \approx 4\pi e^4 \frac{ds}{t^4}\left[\frac{s^2 + u^2}{2} + 2\mu^2 t - \mu^4\right].$$

Per un dato t la quantità s assume i valori compresi tra i limiti determinati dalle equazioni $su \approx \mu^4$, $s + t + u \approx 2\mu^2$, cioè

$$\mu^2 - \frac{}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t(t - 4\mu^2)} \leqslant s \leqslant \mu^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t(t - 4\mu^2)}.$$

Un'integrazione elementare porta al risultato

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} r_e^2 \frac{m^2}{t}\sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{t}}\left(1 + \frac{2\mu^2}{t}\right), \qquad r_e = \frac{e^2}{m}$$

(nel sistema del laboratorio $t = 2m\varepsilon_+$)[1]. Questa formula non è applicabile nel-

[1]) Questa sezione d'urto raggiunge il valore massimo per $\varepsilon_+ = 1{,}7\,\varepsilon_s$. Questo valore è circa 20 volte minore della sezione di annichilazione in due fotoni alla stessa energia.

l'immediata vicinanza della soglia: quando $\varepsilon_+ - \varepsilon_s \sim \mu e^4$, i muoni che si formano non possono venire considerati particelle libere (tenendo conto della loro mutua interazione coulombiana la sezione d'urto non tenderà per $\varepsilon_+ \to \varepsilon_s$ a zero, ma ad una costante; vedi III, § 147).

§ 82a. *Perdite per ionizzazione da parte di particelle veloci*

Consideriamo gli urti di una particella relativistica con un atomo, accompagnati dall'eccitazione o dalla ionizzazione di quest'ultimo. Nel caso non relativistico gli urti anelastici di questo tipo sono stati studiati nel III, §§ 148, 149; qui verrà data la generalizzazione al caso relativistico delle formule là ottenute (*H. A. Bethe*, 1933).

La velocità della particella incidente sull'atomo è supposta grande rispetto alle velocità degli elettroni atomici (in tal modo, si suppone che sia in ogni caso valida la disuguaglianza $Z\alpha \ll 1$, cioè che il numero atomico non sia troppo grande). Con questa condizione viene legittimata l'applicabilità dell'approssimazione di Born al processo considerato. La soluzione del problema può leggermente differire a seconda che la particella veloce sia leggera (elettrone, positrone) o pesante (mesone, protone, particella α e simili). Noi esamineremo qui il secondo caso, che è anche il piú semplice.

Siano $p = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$ e $p' = (\varepsilon', \boldsymbol{p}')$ l'impulso iniziale e finale della particella veloce nel sistema di riferimento del laboratorio, nel quale l'atomo si trova in quiete prima dell'urto; la differenza $q = p' - p$ dà l'energia e l'impulso trasferiti dalla particella all'atomo. Dividiamo l'intero intervallo dei possibili valori dell'impulso trasferito in due parti:

$$\text{I)}\ \frac{q^2}{m} \ll m, \qquad \text{II)}\ \frac{q^2}{m} \gg I, \tag{82a,1}$$

dove m è la massa dell'elettrone, mentre I è una certa energia media dell'atomo (il potenziale di ionizzazione dell'atomo). Le due regioni (82a,1) si sovrappongono per $I \ll q^2/m \ll m$; questa circostanza permetterà di eseguire una precisa saldatura dei risultati che si otterranno per le due regioni. Si parlerà dei valori di q nella prima e nella seconda regione come di piccoli e di grandi trasferimenti di impulso.

Piccoli trasferimenti di impulso

In questa regione gli elettroni atomici si possono supporre non relativistici sia nello stato iniziale che in quello finale dell'atomo. L'ampiezza del processo è data dall'espressione

$$M_{fi}^{(n)} = e^2 J_{n0}^{\mu}(-q)\, J_{p'p}^{\nu}(q)\, D_{\mu\nu}(q), \tag{82a,2}$$

dove J_{n0} è la 4-corrente dell'atomo per la transizione dallo stato iniziale (0) nello stato finale (n), e $J_{p'p}$ è la 4-corrente di transizione della particella veloce; queste correnti sostituiscono qui le espres-

sioni ($\bar{u}'\ \gamma\ u$) che figurerebbero, ad esempio, nell'ampiezza di diffusione di due particelle «elementari»: elettrone e muone (cfr. anche (140,3)). Le correnti di transizione vengono prese nella rappresentazione degli impulsi (vedi (43,11)). La sezione d'urto per il processo nel sistema di riferimento del laboratorio è

$$d\sigma_n = 2\pi\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega_{n0})\,|M_{fi}^{(n)}|^2 \frac{d^3p'}{2\,|\,p\,|\,2\varepsilon'(2\pi)^3}, \qquad (82a,3)$$

dove $\omega_{n0} = E_n - E_0$ è la frequenza di transizione tra i relativi stati dell'atomo. Lo stato finale può appartenere sia allo spettro discreto che a quello continuo; il primo caso corrisponde ad una eccitazione dell'atomo, il secondo alla ionizzazione. Nella legge di conservazione dell'energia (espressa con una funzione δ nella (82a,3)) è stata trascurata l'energia di rinculo dell'atomo, cosa chiaramente legittima per piccoli trasferimenti di impulso.

Nel caso considerato è comodo scegliere il propagatore fotonico nel gauge (77,14), nel quale sono differenti da zero solo le componenti spaziali,

$$D_{ik}(q) = -\frac{4\pi}{\omega^2 - q^2}\left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{\omega^2}\right). \qquad (82a,4)$$

Allora anche per le 4-correnti di transizione nella (82a,2) sono necessarie solo rispettive componenti spaziali.

La corrente di transizione dell'atomo $\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q})$ è, nel dato caso, la trasformata di Fourier della relativa espressione non relativistica

$$\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q}) = \frac{i}{2m}\int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}(\psi_0\nabla\psi_n^* - \psi_n^*\nabla\psi_0)\,d^3x, \qquad (82a,5)$$

dove ψ_0, ψ_n sono le funzioni d'onda atomiche (per semplificare la scrittura noi omettiamo qui e nel seguito il segno di sommatoria sugli elettroni dell'atomo, scriviamo cioè le formule come se nell'atomo ci fosse solo un elettrone). Integrando il primo termine per parti, possiamo riscrivere quest'espressione sotto forma di elemento di matrice

$$\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} + e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\mathbf{v})_{n0}, \qquad (82a,6)$$

dove $\mathbf{v} = -i/m\nabla$ è l'operatore della velocità dell'elettrone.

Per quanto riguarda la corrente di transizione della particella diffusa, in conseguenza del piccolo valore relativo dell'impulso da essa ceduto ($|\,\boldsymbol{q}\,| \ll |\,\boldsymbol{p}\,|$), essa può essere sostituita semplicemente con il suo elemento diagonale

$$\boldsymbol{J}_{pp}(0) = 2\boldsymbol{p}z, \qquad (82a,7)$$

corrispondente al moto rettilineo classico (cfr. (96,5)); qui è stato introdotto anche il fattore z, che tiene conto di una possibile differenza della carica della particella (ze) dalla carica dell'elettrone.

La piccolezza di $\boldsymbol{q}$ comporta anche la piccolezza dell'angolo di deflessione ϑ della particella. In tal caso, le componenti longitudinale e trasversale di $\boldsymbol{q}$ (rispetto a $\boldsymbol{p}$) sono uguali

$$-q_{\parallel} \approx \frac{dp}{d\varepsilon}\,\omega_{n0} = \frac{\omega_{n0}}{v}\,, \quad q_{\perp} \approx |\boldsymbol{p}|\,\vartheta, \tag{82a,8}$$

e quindi $\boldsymbol{qp} \approx -\,\varepsilon\omega_{n0}$.

Portando le (82a,4-8), nella (82a,2), otteniamo

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{4\pi z e^2}{q^2}\langle n|\frac{\varepsilon}{\omega_{n0}}(\boldsymbol{q}\mathbf{v}e^{-i\boldsymbol{qr}} + e^{-i\boldsymbol{qr}}\boldsymbol{q}\mathbf{v}) + \\ + (\boldsymbol{p}\mathbf{v}e^{-i\boldsymbol{qr}} + e^{-i\boldsymbol{qr}}\boldsymbol{p}\mathbf{v})|0\rangle.$$

Notiamo che nel primo termine

$$\boldsymbol{q}\mathbf{v}f + f\boldsymbol{q}\mathbf{v} = 2i\dot{f},$$

dove $f \equiv e^{-i\boldsymbol{qr}}$ (vedi III, § 149); perciò l'elemento di matrice di questo operatore coincide con l'elemento di matrice $2i\,(\dot{f})_{n0} = 2\omega_{n0}f_{n0}$. Nel secondo termine, invece, essendo $\boldsymbol{q}$ piccolo, si può sostituire $e^{-i\boldsymbol{qr}}$ con l'unità. Allora

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{8\pi z e^2}{q^2}\{\varepsilon\,(e^{-i\boldsymbol{qr}})_{n0} - i\boldsymbol{pr}_{n0}\omega_{n0}\}.$$

Il quadrato del modulo di quest'espressione è

$$|M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{64\pi^2\,(ze^2)^2}{(q^2)^2}\{\varepsilon^2|(e^{-i\boldsymbol{qr}})_{n0}|^2 + \\ + 2\,(\boldsymbol{qr}_{n0})\,(\boldsymbol{pr}_{n0})\,\varepsilon\omega_{n0} + (\boldsymbol{pr}_{n0})^2\,\omega_{n0}^2\} \tag{82a,9}$$

(nel secondo termine qui è stato posto $e^{-i\boldsymbol{qr}} \cong 1 - i\boldsymbol{qr}$; nel primo termine ciò non si può fare per una ragione che sarà chiarita piú avanti; vedi nota a pag. 392).

Le perdite di energia da parte della particella veloce per effetto dei suoi urti anelastici con gli atomi[1]) sono determinate dalla formula

$$\varkappa = \sum_n \int \omega_{n0}\,d\sigma_n = \frac{1}{16\pi^2}\sum_n \int \omega_{n0}\,|M_{fi}^{(n)}|^2\,do', \tag{82a,10}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli stati possibili dell'atomo, e l'integrazione viene eseguita sulle direzioni della particella diffusa; chiameremo questa quantità *frenamento efficace* (è chiamata anche *sezione d'urto per la perdita di energia*).

L'integrazione nella (82a,10) può essere eseguita in due tappe: calcolo della media sull'azimut della direzione di $\boldsymbol{p}'$ rispetto a $\boldsymbol{p}$,

---

[1]) Queste perdite di energia sono chiamate spesso perdite per ionizzazione, anche se esse sono dovute non solo alla ionizzazione ma anche all'eccitazione degli atomi.

e quindi integrazione in $do' \cong 2\pi\vartheta\, d\vartheta$, dove ϑ è il piccolo angolo di diffusione. La prima operazione sostituisce $\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_{n0}$ con

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_{n0} \to q_{\|} x_{n0} = -\frac{\omega_{n0}}{v} x_{n0},$$

dove x_{n0} è l'elemento di matrice di una delle coordinate cartesiane degli elettroni atomici[1]). L'integrazione in $d\vartheta$ può essere sostituita con l'integrazione rispetto a q^2 notando che

$$-q^2 = -\omega_{n0}^2 + \boldsymbol{q}^2 \approx -\omega_{n0}^2 + \frac{\omega_{n0}^2}{v^2} + \boldsymbol{p}^2\vartheta^2 = \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{\boldsymbol{p}^2} + \boldsymbol{p}^2\vartheta^2 \quad (82a,11)$$

e perciò $2\vartheta\, d\vartheta = d\,|\,q^2\,|/\boldsymbol{p}^2$ (M è la massa della particella veloce). Per risultato otteniamo

$$\varkappa = 4\pi\,(ze^2)^2 \sum_n \int \left\{ |\,(e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}})_{n0}\,|^2 \frac{\omega_{n0}}{v^2} - \right.$$

$$\left. - \omega_{n0}^3\,|\,x_{n0}\,|^2 \left(\frac{M^2}{\boldsymbol{p}^2} + \frac{1}{v^2}\right)\right\} \frac{d\,|\,q^2\,|}{|\,q^2\,|^2}. \quad (82a,12)$$

Il limite inferiore dell'integrazione rispetto a q^2 è

$$|\,q^2\,|_{\min} = \frac{M^2}{\boldsymbol{p}^2}\,\omega_{n0}^2. \quad (82a,13)$$

Come limite superiore scegliamo, invece, un certo valore $|\,q^2\,|_1$ tale da soddisfare la disuguaglianza

$$I \ll \frac{|\,q^2\,|_1}{m} \ll m, \quad (82a,14)$$

un valore, cioè, che cade nella regione di sovrapposizione delle regioni I e II (82a,1).

L'integrazione e la sommatoria nella (82a,12) vengono eseguite in modo analogo a quello seguito nel III, § 149 per il caso non relativistico. Dividiamo l'intero intervallo d'integrazione ancora in due parti: a) da $|\,q^2\,|_{\min}$ a $|\,q^2\,|_0$ e b) da $|\,q^2\,|_0$ a $|\,q^2\,|_1$, dove il valore $|q^2\,|_0$ è tale da soddisfare la relazione

$$\frac{IM}{|\,\boldsymbol{p}\,|} \ll \sqrt{|\,q^2\,|_0} \ll m\alpha \quad (82a,15)$$

(la quantità $m\alpha$, che figura a destra, è dell'ordine di grandezza degli impulsi degli elettroni atomici). Nella regione a) possiamo sviluppare $e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \cong 1 - i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}$, e il contributo di questa regione in $\varkappa$ assu-

---

[1]) È indifferente di quale coordinata: con la sommatoria, sottintesa, sulle direzioni del momento dell'atomo nello stato finale l'elemento di matrice x_{n0} non dipende già piú dalla direzione dell'asse x.

me la forma

$$4\pi (ze^2)^2 \sum_n \int\limits_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0} \left\{ \frac{1}{v^2} \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|} - \frac{M^2}{p^2} \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|^2} \right\} d|q^2| \approx$$

$$\approx \frac{4\pi (ze^2)^2}{v^2} \sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \left[\ln \frac{|q^2|_0 p^2}{M^2 \omega_{n0}^2} - v^2 \right].$$

(L'integrazione nel secondo termine può essere estesa fino all'infinito.)

La sommatoria si esegue mediante la formula

$$\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 = \frac{1}{2m} Z, \tag{82a,16}$$

dove Z è il numero di elettroni nell'atomo (vedi III, (149,10)). Rappresentiamo il risultato nella forma

$$\frac{2\pi (ze^2)^2 Z}{mv^2} \left[\ln \frac{|q^2|_0 p^2}{M^2 I^2} - v^2 \right], \tag{82a,17}$$

dove I è una certa energia media dell'atomo, determinata dalla formula

$$\ln I = \frac{\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}}{\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2} = \frac{2m}{Z} \sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}. \tag{82a,18}$$

Nella regione b), invece, abbiamo secondo la (82a,11) $|q^2| \approx \approx p^2 \vartheta^2$, cioè $|q^2|$ non dipende dal numero n dello stato finale dell'atomo; non dipendono da n nemmeno i limiti d'integrazione. Perciò la sommatoria su n nella (82a,12) può essere eseguita sotto il segno di integrale. Nel primo termine la sommatoria si esegue mediante la formula

$$\sum_n |(e^{-iqr})_{n0}|^2 \omega_{n0} = \frac{Z}{2m} q^2 \tag{82a,19}$$

(vedi III (149,5)), e l'integrale dell'espressione ottenuta è uguale a[1])

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \ln \frac{|q^2|_1}{|q^2|_0}.$$

L'integrale del secondo termine della (82a,12) su questa regione dà, invece, un contributo trascurabile in $\varkappa$.

Sommando l'ultima formula con (82a,17), troviamo il contributo in $\varkappa$ dato da tutta la regione dei piccoli trasferimenti di impulso:

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \left[\ln \frac{|q^2|_1 p^2}{M^2 I^2} - v^2 \right]. \tag{82a,20}$$

---

[1]) La divergenza logaritmica dell'integrale nel limite superiore è proprio la causa per la quale nel primo termine della (82a,12) non si può sviluppare e^{-iqr} in potenze di q.

Grandi trasferimenti di impulso

Esaminiamo ora gli urti con un trasferimento di impulso grande rispetto all'impulso degli elettroni atomici ($q^2 \gg mI$). In questa regione si può, evidentemente, trascurare il legame degli elettroni nell'atomo, si possono, cioè, considerare gli elettroni come liberi. In relazione a ciò l'urto di una particella veloce con l'atomo costituirà una diffusione elastica su ciascuno dei Z elettroni atomici. In questo caso, per il grande valore della velocità della particella gli elettroni atomici possono considerarsi prima dell'urto come in quiete.

Designiamo con $m\Delta$ l'energia trasferita dalla particella veloce all'elettrone atomico, e sia $d\sigma_\Delta$ la sezione d'urto di diffusione elastica accompagnata da tale trasferimento d'energia. Il frenamento efficace differenziale su tutto l'atomo sarà allora

$$d\varkappa = Zm\Delta\, d\sigma_\Delta. \tag{82a,21}$$

L'energia massima che può essere trasferita ad un elettrone in quiete da una particella di massa $M \gg m$ che viene con esso in collisione, è uguale a

$$m\Delta_{\max} = \frac{2m\boldsymbol{p}^2}{m^2+M^2+2m\varepsilon} \approx \frac{2m\boldsymbol{p}^2}{M^2+2m\varepsilon},$$

dove ε e $\boldsymbol{p}$ sono l'energia e l'impulso della particella incidente (vedi II (13,13)). Supponiamo inoltre che l'energia ε, anche se può essere ultrarelativistica ($\varepsilon \gg M$), debba soddisfare allo stesso tempo la disuguaglianza

$$\varepsilon \ll \frac{M^2}{m}. \tag{82a,22}$$

Allora anche il valore massimo dell'energia trasferita

$$m\Delta_{\max} \approx \frac{2m\boldsymbol{p}^2}{M^2} = 2mv^2\gamma^2 \quad (\gamma = \varepsilon/M = 1/\sqrt{1-v^2}) \tag{82a,23}$$

rimane sempre piccolo rispetto all'energia cinetica originaria della particella incidente ($m\Delta_{\max} \ll \varepsilon - M$). Corrispondentemente, anche l'impuslo trasferito $\boldsymbol{q}$ rimane sempre piccolo rispetto all'impulso originario $\boldsymbol{p}$ della particella. Questa circostanza permette di considerare il moto di quest'ultima come se non variasse per l'urto, permette cioè di considerare la particella incidente come infinitamente pesante. Allora la sezione d'urto di diffusione si ottiene semplicemente trasformando la sezione d'urto di diffusione di un elettrone su un centro fisso (81,7) al sistema di riferimento del laboratorio, in cui l'elettrone è originariamente in quiete. Questo è facile da fare notando che nell'approssimazione indicata

$$-q^2 \approx \boldsymbol{q}^2 = 4\boldsymbol{p}^2 \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}, \quad do' = \frac{\pi d\,|q^2|}{p^2},$$

la velocità relativa è sempre uguale a v in ambedue i sistemi di riferimento. La formula (81,7) assume la forma

$$d\sigma = \frac{4\pi (ze^2)^2}{v^2}\left(1 - \frac{|q^2|}{4m^2\gamma^2}\right)\frac{d|q^2|}{|q^2|^2}.$$

Il trasferimento d'energia Δ si esprime attraverso il medesimo invariante q^2 secondo la formula $-q^2 = 2m^2\Delta$. Abbiamo perciò[1])

$$d\sigma_\Delta = \frac{2\pi (ze^2)^2}{m^2v^2}\left(1 - v^2\frac{\Delta}{\Delta_{\max}}\right)\frac{d\Delta}{\Delta^2}. \qquad (82a,24)$$

Il contributo nel frenamento efficace dovuto alla regione considerata di valori del trasferimento di impulso si ottiene integrando la (82a,21) nei limiti dal valore introdotto prima di $|q^2|_1$ fino a $|q^2|_{\max} = 2m^2\Delta_{\max}$. Si ottiene

$$\frac{2\pi (ze^2)^2 Z}{mv^2}\left(\ln\frac{2\Delta_{\max}m^2}{|q^2|_1} - v^2\right). \qquad (82a,25)$$

Sommando, infine, i contributi (82a,20) e (82a,25) otteniamo il seguente risultato per le perdite per ionizzazione da parte di una particella veloce pesante:

$$\varkappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{mv^2}\left(\ln\frac{2mv^2}{I\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (82a,26)$$

(in unità ordinarie). Nel caso non relativistico da quest'espressione si ricava la formula nota del III (150,10):

$$\varkappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{mv^2}\ln\frac{2mv^2}{I}, \qquad (82a,27)$$

e nel caso ultrarelativistico abbiamo

$$\varkappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{mc^2}\left(\ln\frac{2mc^2}{I\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - 1\right) \qquad (82a,28)$$

Il frenamento dipende solo dalla velocità (ma non dalla massa) della particella veloce. Il decrescere del rallentamento con l'aumentare della velocità secondo la (82a,27) lascia il posto, nel caso relativistico, ad un lento aumento (logaritmico).

PROBLEMI

1. Determinare il rallentamento efficace per un elettrone relativistico

Soluzione. Il contributo della regione dei piccoli trasferimenti di impulso è dato, come prima, dalla (82a,20). Per la regione dei grandi valori del trasferimento di impulso occorre usare, in luogo della (82a,24), la formula (82,14), che

[1]) In questa formula non si tiene, certamente, conto degli effetti peculiari delle interazioni forti, se la particella pesante è un adrone. Questi effetti (fattore di forma adronico), tuttavia, diventano importanti solo per $|q^2| \sim 1/M^2$ e con la condizione (82a,22) tali trasferimenti di impulso sono esclusi.

tiene conto anche degli effetti di scambio. Integrando $\Delta d\sigma_\Delta$ in $d\Delta$ da $|q^2|_1/2m^2$ a $(\gamma-1)/2$ e sommando con la (82a,20), otteniamo

$$\varkappa=\frac{2\pi Ze^4}{mv^2}\left[\ln\frac{m^2(\gamma^2-1)(\gamma-1)c^4}{2I^2}-\left(\frac{2}{\gamma}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\ln 2+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{(\gamma-1)^2}{8\gamma^2}\right], \tag{1}$$

$$\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Nel caso non relativistico otteniamo la formula ricavata nel problema del III, § 149, e nel caso ultrarelativistico ($\gamma \gg 1$)

$$\varkappa=\frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{m^2c^4\gamma^3}{2I^2}+\frac{1}{8}\right). \tag{2}$$

2. Lo stesso per il positrone.

Soluzione. Per $d\sigma_\Delta$ nella regione dei grandi trasferimenti di impulso occorre usare la (82,23), nella quale il limite superiore nell'integrazione in $d\Delta$ è uguale a $\gamma-1$. Nel caso ultrarelativistico la risposta è

$$\varkappa=\frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{2m^2c^4\gamma^3}{I^2}-\frac{23}{12}\right).$$

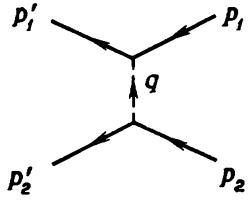
§ 83. *Equazione di Breit*

Come è noto, nell'elettrodinamica classica un sistema di particelle interagenti può essere descritto mediante una funzione di Lagrange, che dipende solo dalle coordinate e dalle velocità delle particelle stesse ed è esatta all'ordine $\sim 1/c^2$ (II, § 65). Questo perché gli effetti connessi all'irraggiamento sono dell'ordine di $1/c^3$.

Nella teoria quantistica a questa situazione corrisponde la possibilità di descrivere un sistema mediante l'equazione di Schrödinger, che tiene conto dei termini del secondo ordine. Per un elettrone, che si muove in un campo elettromagnetico esterno, questa equazione è stata ricavata nel § 33. Ora noi ci occuperemo di ricavare un'equazione analoga, che descriva un sistema di particelle interagenti.

Prenderemo come punto di partenza l'espressione relativistica dell'ampiezza di diffusione di due particelle. Nell'approssimazione non relativistica essa diventa l'ordinaria ampiezza di Born, proporzionale alla trasformata di Fourier del potenziale di interazione elettrostatica di due cariche. Dopo aver calcolato l'ampiezza di diffusione al secondo ordine, noi possiamo stabilire la forma del potenziale corrispondente, che tiene conto dei termini $\sim 1/c^2$.

Supponiamo dapprima che le due particelle siano diverse e abbiano masse m_1 e m_2 (per esempio, un elettrone e un muone). Allora la diffusione è rappresentata dal solo diagramma



L'ampiezza corrispondente è

$$M_{fi} = e^2 (\bar{u}_1' \gamma^\mu u_1) D_{\mu\nu}(q) (\bar{u}_2' \gamma^\nu u_2),$$
$$q = p_1' - p_1 = p_2 - p_2' \tag{83,1}$$

(qui si suppone che le cariche abbiano lo stesso segno; in caso contrario e^2 viene sostituito con $-e^2$).

I calcoli che seguono si semplificano notevolmente se il propagatore fotonico $D_{\mu\nu}$ viene scelto non nel gauge abituale, ma nel gauge di Coulomb (77,12-13) [1]):

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{q^2}, \quad D_{0i} = 0, \quad D_{ik} = \frac{4\pi}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{q^2}\right). \tag{83,2}$$

Allora l'ampiezza di diffusione assume la forma

$$M_{fi} = e^2 \{(\bar{u}_1' \gamma^0 u_1)(\bar{u}_2' \gamma^0 u_2) D_{00} + (\bar{u}_1' \gamma^i u_1)(\bar{u}_2' \gamma^k u_2) D_{ik}\}. \tag{83,3}$$

Trascurando tutti i termini in $1/c$, il secondo termine tra parentesi graffa scompare del tutto, e il primo dà

$$M_{fi} = -2m_1 \cdot 2m_2 (w_1^{(0)\prime *} w_1^{(0)})(w_2^{(0)\prime *} w_2^{(0)}) U(q), \tag{83,4}$$

dove

$$U(q) = \frac{4\pi e^2}{q^2}, \tag{83,5}$$

e con $w_1^{(0)}$, $w_2^{(0)}$, . . . sono state indicate le ampiezze spinoriali (a due componenti), introdotte al § 23, di onde piane non relativistiche. La funzione $U(q)$ rappresenta la trasformata di Fourier dell'energia potenziale di interazione coulombiana: $U(r) = e^2/r$.

Nell'approssimazione successiva (in $1/c$) la funzione d'onda di Schrödinger di una particella libera φ_{Schr} $\left(\text{normalizzata secondo l'integrale } \int |\varphi_{\text{Schr}}|^2 d^3x\right)$ soddisfa l'equazione

$$\mathrm{H}^{(0)} \varphi_{\text{Schr}} = (\varepsilon - mc^2) \varphi_{\text{Schr}}, \tag{83,6}$$
$$\mathrm{H}^{(0)} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}, \quad \mathbf{p} = -i\nabla,$$

nella quale si è tenuto conto dei primi due termini dello sviluppo dell'espressione relativistica dell'energia cinetica. Con w denoteremo l'ampiezza (spinoriale) di tale onda piana (per $1/c \to 0$ essa tende a $w^{(0)}$). È proprio attraverso queste ampiezze che deve essere espressa l'ampiezza di diffusione cercata se si vuole che sia possibile determinare sulla base di essa il potenziale di Schrödinger di interazione nell'approssimazione considerata.

---

[1]) In questo paragrafo in tutte le formule intermedie scriviamo i fattori c, e nelle formule finali anche $\hbar$.

Secondo la formula (33,11) l'ampiezza bispinoriale u di una particella libera si esprime attraverso l'ampiezza di Schrödinger w, con la precisione richiesta, nella forma

$$u = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{p^2}{8m^2c^2}\right) w \\ \frac{\sigma p}{2mc} w \end{pmatrix}. \tag{83,7}$$

Mediante questa formula troviamo

$$\bar{u}_1'\gamma^0 u_1 = u_1'^* u_1 = 2m_1 \left(1 - \frac{p_1'^2 + p_1^2}{8m_1^2c^2}\right) w_1'^* w_1 +$$
$$+ \frac{1}{2m_1c^2} w_1'^* (\sigma p_1') (\sigma p_1) w_1 = 2m_1 w_1'^* \left\{ 1 - \frac{q^2}{8m_1^2c^2} + \frac{i\sigma [q p_1]}{4m_1^2c^2} \right\} w_1,$$
$$\bar{u}_1'\gamma u_1 = u_1'^* \alpha u_1 = \frac{1}{c} w_1'^* \{\sigma (\sigma p_1) + (\sigma p_1') \sigma\} w_1 =$$
$$= \frac{1}{c} w_1'^* \{i [\sigma q] + 2p_1 + q\} w_1$$

(dove $q = p_1' - p_1 = p_2 - p_2'$). Le espressioni analoghe per $(\bar{u}_2'\gamma^0 u_2)$ e $(\bar{u}_2'\gamma u_2)$ differiscono per la sostituzione dell'indice 1 con l'indice 2 e corrispondentemente di q con $-q$.

Sostituiamo queste espressioni nella (83,3). Poiché il prodotto $(\bar{u}_1'\gamma u_1)(\bar{u}_2'\gamma u_2)$ già contiene il fattore $1/c^2$, allora in D_{ik} si può trascurare ω^2/c^2 al denominatore. Come risultato otteniamo l'ampiezza di diffusione nella forma

$$M_{fi} = -2m_1 \cdot 2m_2 (w_1'^* w_2'^* U(p_1, p_2, q) w_1 w_2), \tag{83,8}$$

dove

$$U(p_1, p_2, q) = 4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{q^2} - \frac{1}{8m_1^2c^2} - \frac{1}{8m_2^2c^2} + \right.$$
$$+ \frac{(q p_1)(q p_2)}{m_1 m_2 q^4} - \frac{p_1 p_2}{m_1 m_2 q^2} + \frac{i\sigma_1 [q p_1]}{4m_1^2c^2q^2} -$$
$$- \frac{i\sigma_1 [q p_2]}{2m_1 m_2 c^2 q^2} - \frac{i\sigma_2 [q p_2]}{4m_2^2c^2q^2} + \frac{i\sigma_2 [q p_1]}{2m_1 m_2 c^2 q^2} +$$
$$\left. + \frac{(\sigma_1 q)(\sigma_2 q)}{4m_1 m_2 c^2 q^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4m_1 m_2 c^2} \right\} \tag{83,9}$$

(gli indici 1, 2 delle matrici di Pauli indicano su quali indici spinoriali esse agiscono: σ_1 agisce su w_1, σ_2 su w_2).

La funzione $U(p_1, p_2, q)$ è l'operatore di interazione delle particelle nella rappresentazione degli impulsi. Esso è connesso all'operatore $\mathrm{U}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r})$ nella rappresentazione delle coordinate dalla formula

$$\int e^{-i(p_1'r_1 + p_2'r_2)} \mathrm{U}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r}) e^{i(p_1r_1 + p_2r_2)} d^3x_1 d^3x_2 =$$
$$= (2\pi)^3 \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') U(p_1, p_2, q). \tag{83,10}$$

Se l'operatore U rappresenta solo la funzione $U(\boldsymbol{r})$ ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$), allora $U(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q})$ non dipende da $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ e la formula (83,10) si riduce alla definizione ordinaria della trasformata di Fourier

$$\int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} U(\boldsymbol{r})\, d^3x = U(\boldsymbol{q}).$$

È chiaro allora che per trovare U $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r})$ occorre calcolare l'integrale

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} U(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$

e quindi sostituire $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$, con gli operatori $\mathbf{p}_1 = -i\nabla_1$, $\mathbf{p}_2 = -i\nabla_2$, disponendoli a destra di tutti gli altri fattori.

Gli integrali necessari si calcolano derivando la formula

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \frac{4\pi}{q^2} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r}. \tag{83,11}$$

Calcolando il gradiente troviamo

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \frac{4\pi \boldsymbol{q}}{q^2} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -i\nabla \frac{1}{r} = \frac{i\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{83,12}$$

Quindi ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono vettori costanti)

$$\int \frac{4\pi(\boldsymbol{a}\boldsymbol{q})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{q})}{q^4} e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{i}{2}\left(\boldsymbol{a}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right) \int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \left(\boldsymbol{b}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\right) \frac{1}{q^2} \frac{d^3q}{(2\pi)^3};$$

l'integrale ottenuto, dopo un'integrazione per parti, si riduce alla (83,12) e dà

$$\int \frac{4\pi(\boldsymbol{a}\boldsymbol{q})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{q})}{q^4} e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\nabla)\frac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{r}}{r} = \frac{1}{2r}\left[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})}{r^2}\right]. \tag{83,13}$$

Infine

$$\int \frac{4\pi(\boldsymbol{a}\boldsymbol{q})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{q})}{q^2} e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -(\boldsymbol{a}\nabla)(\boldsymbol{b}\nabla)\frac{1}{r}.$$

Sviluppando le derivazioni occorre tenere presente che questa espressione contiene la funzione $\delta(\boldsymbol{r})$. Per metterla in evidenza notiamo che mediando sulle direzioni $\boldsymbol{r}$ abbiamo

$$\overline{-(\boldsymbol{a}\nabla)(\boldsymbol{b}\nabla)\frac{1}{r}} = -\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\Delta\frac{1}{r} = \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\,\delta(\boldsymbol{r}).$$

Sviluppando ora le derivate nel modo solito, otteniamo

$$\int \frac{4\pi(\boldsymbol{a}\boldsymbol{q})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{q})}{q^2} e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r^3}\left\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} - 3\frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})}{r^2}\right\} + \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\,\delta(\boldsymbol{r}) \tag{83,14}$$

(nella media sulle direzioni $\boldsymbol{r}$ il primo termine si annulla e come doveva essere, sopravvive solo il termine con la funzione delta).

Mediante queste formule otteniamo in definitiva la seguente espressione per l'operatore di interazione delle particelle:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r}) = {} & \frac{e^2}{r} - \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2c^2}\left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}\right)\delta(\boldsymbol{r}) - \\ & - \frac{e^2}{2m_1 m_2 c^2 r}\left[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\mathbf{p}_1)\,\mathbf{p}_2}{r^2}\right] - \\ & - \frac{e^2\hbar}{4m_1^2 c^2 r^3}[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_1]\,\boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{e^2\hbar}{4m_2^2 c^2 r^3}[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_2]\,\boldsymbol{\sigma}_2 - \\ & - \frac{e^2\hbar}{2m_1 m_2 c^2 r^3}\{[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_1]\,\boldsymbol{\sigma}_2 - [\boldsymbol{r}\mathbf{p}_2]\,\boldsymbol{\sigma}_1\} + \\ & + \frac{e^2\hbar^2}{4m_1 m_2 c^2}\left\{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - 3\,\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\delta(\boldsymbol{r})\right\}. \end{aligned} \tag{83,15}$$

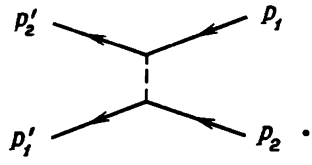
L'hamiltoniano totale di un sistema di due particelle in questa approssimazione è

$$H = H_1^{(0)} + H_2^{(0)} + U, \tag{83,16}$$

dove $H^{(0)}$ è l'hamiltoniano delle particelle libere (83,6).

Due elettroni

Se le due particelle sono identiche (due elettroni), allora nell'ampiezza di diffusione compare un secondo termine, rappresentato dal diagramma «di scambio»



Non è, tuttavia, necessario calcolare il suo contributo nell'operatore di interazione. Infatti, la descrizione di un sistema di particelle identiche mediante l'equazione di Schrödinger può essere fatta mediante lo stesso operatore di interazione impiegato per particelle non identiche, a patto di effettuare l'appropriata simmetrizzazione delle soluzioni dell'equazione. In particolare, nello studio della diffusione di particelle, questa simmetrizzazione tiene automaticamente conto dei contributi all'ampiezza relativi ai due diagrammi di Feynman.

In tal modo, l'hamiltoniano di un sistema di due elettroni si ricava dalle formule (83,15-16) semplicemente ponendo in essi

$m_1 = m_2$ [1]):

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) - \frac{1}{8m^3c^2}(\mathbf{p}_1^4 + \mathbf{p}_2^4) + \mathrm{U}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r}),$$

$$\mathrm{U}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r}) = \frac{e^2}{r} - \pi\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2 \delta(\boldsymbol{r}) - \frac{e^2}{2m^2c^2r} \times$$
$$\times \left(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\mathbf{p}_1)\mathbf{p}_2}{r^2}\right) + \frac{e^2\hbar}{4m^2c^2r^3}\{-(\boldsymbol{\sigma}_1 + 2\boldsymbol{\sigma}_2) \times$$
$$\times [\boldsymbol{r}\mathbf{p}_1] + (\boldsymbol{\sigma}_2 + 2\boldsymbol{\sigma}_1)[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_2]\} + \frac{1}{4}\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2 \times$$
$$\times \left\{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\delta(\boldsymbol{r})\right\}. \qquad (83,17)$$

Notiamo che la presenza di termini contenenti $\delta(\boldsymbol{r})$ non significa affatto che ci si trova in presenza di un'interazione particolarmente forte. Il valor assoluto integrale di tutti i termini correttivi è lo stesso, e in base al significato dello sviluppo effettuato, tutti questi termini devono considerarsi piccoli rispetto al primo: il termine di interazione coulombiana.

I vari gruppi di termini nell'operatore di interazione (83,15) hanno carattere differente. I termini della prima riga in U hanno un'origine puramente orbitale. Nella seconda riga ci sono i termini lineari rispetto agli operatori di spin delle particelle; essi corrispondono all'interazione spin-orbita. Infine, i termini della terza riga, quadratici rispetto agli operatori di spin, descrivono l'interazione spin-spin [2]).

Elettrone e positrone

Un sistema di un elettrone e di un positrone richiede uno studio particolare. L'ampiezza di diffusione, in questo caso, consta di due termini:

$$M_{fi} = -e^2[\bar{u}(p'_-)\gamma^\mu u(p_-)]\, D_{\mu\nu}(p_- - p'_-)\,[\bar{u}(-p_+)\gamma^\nu u(-p'_+)] +$$
$$+ e^2[\bar{u}(-p_+)\gamma^\mu u(p_-)]\, D_{\mu\nu}(p_- + p_+)\,[\bar{u}(p'_-)\gamma^\nu u(-p'_+)] \qquad (83,18)$$

(il primo corrisponde al diagramma « di diffusione », il secondo al diagramma « di annichilazione »). Poiché la funzione d'onda del sistema « elettrone + positrone » non può essere antisimmetrica,

---

[1]) L'equazione d'onda con l'hamiltoniano (83,17) venne stabilita la prima volta da *G. Breit* (1929) e la sua successiva deduzione quantistica venne data da *L. D. Landau* (1932).

[2]) Questa interazione è già stata ricordata nel III, § 72 in relazione alla struttura fina dei livelli atomici, e l'interazione spin-spin degli elettroni con il nucleo è stata studiata nel III, § 121 in relazione alla struttura iperfina dei livelli. In particolare, la formula III (121,9) corrisponde al termine con la funzione delta nell'operatore di interazione spin-spin.

ambedue i termini danno contributi indipendenti all'operatore di interazione.

Il primo termine (la cui struttura coincide con la struttura dell'ampiezza (83,1)) porta, naturalmente, ad un operatore che differisce dal (83,17) soltanto per il segno complessivo. Occupiamoci ora della trasformazione del secondo termine.

Usiamo a questo scopo il propagatore fotonico nel gauge ordinario

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2} g_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\frac{\omega^2}{c^2} - \boldsymbol{k}^2} g_{\mu\nu}.$$

Nel caso considerato $k = p_+ + p_-$, ed essendo le particelle « quasi-non relativistiche », abbiamo

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{c^2} \approx 4m^2c^2 \gg (\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_-)^2 = \boldsymbol{k}^2. \qquad (83,19)$$

Perciò per il propagatore fotonico è sufficiente scrivere

$$D_{\mu\nu} \approx \frac{\pi}{m^2c^2} g_{\mu\nu}.$$

Qui è già contenuto il fattore $1/c^2$. Perciò è sufficiente prendere l'ampiezza $u(p)$ nell'approssimazione di ordine zero

$$u(p_-) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w_-^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(-p_+) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ w^{(0)} \end{pmatrix},$$

dove $w_-^{(0)}$, $w^{(0)}$ sono gli spinori tridimensionali che figurano nella (23,12) (nel seguito ometteremo gli indici (0)). Con queste ampiezze abbiamo

$$\bar{u}(-p_+)\gamma^0 u(p_-) = u^*(-p_+)\, u(p_-) = 0,$$

$$\bar{u}(-p_+)\boldsymbol{\gamma} u(p_-) = u^*(-p_+)\boldsymbol{\alpha} u(p_-) = 2m(w^*\boldsymbol{\sigma} w_-).$$

Dopo la sostituzione di queste espressioni il termine « di annichilazione » dell'ampiezza di diffusione assume la forma

$$M_{fi}^{(\mathrm{an})} = -e^2 \frac{\pi}{m^2c^2} (2m)^2 (w^*\boldsymbol{\sigma} w_-)(w_-'^*\boldsymbol{\sigma} w'). \qquad (83,20)$$

Da qui, tuttavia, non è ancora possibile trarre delle conclusioni circa la forma dell'operatore di interazione. In primo luogo gli spinori w, attraverso i quali si esprimono le ampiezze $u(-p_+)$, non sono ancora, in senso letterale, positronici. Le ampiezze positroniche si ottengono da $u(-p_+)$ mediante la trasformazione di coniugazione di carica; secondo la (26,6) gli spinori corrispondenti (che indicheremo con w_+) sono legati a w della relazione $w_+ = \sigma_y w^*$, dalla quale abbiamo

$$w^* = \sigma_y w_+ = -w_+\sigma_y, \quad w = -\sigma_y w_+^*. \qquad (83,21)$$

In secondo luogo l'ampiezza di diffusione deve essere ridotta ad una forma nella quale si contraggano tra loro gli spinori elettronici (w_- e w'_-) e gli spinori positronici (w_+ e w'_+). Questo si ottiene usando la formula

$$(w^*\sigma w_-)(w'^*_-\sigma w') = \frac{3}{2}(w'^*_- w_-)(w^* w') - \frac{1}{2}(w'^*_- \sigma w_-)(w^*\sigma w'), \qquad (83,22)$$

che discende dalla (28,17).

Infine, esprimendo w e w' attraverso w_+ e w'_+ secondo la (83,21), troviamo, come è facile verificare,

$$\begin{aligned}(w^* w') &= (w'^*_+ w_+),\\ (w^*\sigma w') &= -(w'^*_+ \sigma w_+).\end{aligned} \qquad (83,23)$$

Sostituendo la (83,23) nella (83,22) e quindi nella (83,20), otteniamo l'espressione definitiva per la parte «di annichilazione» dell'ampiezza di diffusione

$$M_{fi}^{(an)} = -4m^2\left(w'^*_- w'^*_+\left[\frac{\pi e^2}{2m^2c^2}(3+\sigma_+\sigma_-)\right]w_- w_+\right)$$

(le matrici σ_- e σ_+ agiscono rispettivamente su w_- e w_+). L'espressione tra parentesi quadra costituisce l'operatore di interazione nella rappresentazione degli impulsi. Il corrispondente operatore nella rappresentazione delle coordinate è

$$U^{(an)}(\boldsymbol{r}) = \frac{\pi\hbar^2 e^2}{2m^2c^2}(3+\sigma_+\sigma_-)\,\delta(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_- - \boldsymbol{r}_+, \qquad (83,24)$$

(*Pirenne*, 1947; *V. B. Berestetskij* e *L. D. Landau*, 1949). L'operatore totale di interazione tra un elettrone e un positrone è

$$-U + U^{(an)},$$

dove U è preso dalla (83,17).

§ 84. *Positronio*

Le formule ottenute nel paragrafo precedente si possono applicare al positronio: un sistema idrogenoide costituito da un elettrone e da un positrone.

Nel sistema di riferimento del baricentro gli operatori degli impulsi dell'elettrone e del positrone nel positronio sono $\mathbf{p}_- = -\mathbf{p}_+ \equiv \mathbf{p}$, dove $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ è l'operatore dell'impulso del moto relativo, corrispondente al raggio vettore relativo $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_- - \boldsymbol{r}_+$.

L'hamiltoniano totale del positronio è [1])

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{e^2}{r} + V_1 + V_2 + V_3,$$

$$V_1 = -\frac{\mathbf{p}^4}{4m^3c^2} + 4\pi\mu_0^2\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{e^2}{2m^2c^2r}\left\{\mathbf{p}^2 + \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\mathbf{p})\mathbf{p}}{r^2}\right\}, \qquad (84,1)$$

$$V_2 = 6\mu_0^2\frac{1}{r^3}\mathbf{lS},$$

$$V_3 = 6\mu_0^2\frac{1}{r^3}\left\{\frac{(\mathbf{S}\boldsymbol{r})(\mathbf{S}\boldsymbol{r})}{r^2} - \frac{1}{3}\mathbf{S}^2\right\} + 4\pi\mu_0^2\left(\frac{7}{3}\mathbf{S}^2 - 2\right)\delta(\boldsymbol{r}).$$

Qui $\mu_0 = e\hbar/2mc$ è il magnetone di Bohr, $\hbar\mathbf{l} = [\boldsymbol{r}\mathbf{p}]$ è l'operatore del momento angolare orbitale; $\mathbf{S} = (\boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_-)/2$ è l'operatore dello spin totale del sistema (il suo quadrato $\mathbf{S}^2 = 1/2\,(3 + \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)$). In V_1 sono inclusi tutti i termini correttivi di natura puramente orbitale; V_2 è l'interazione spin-orbita; V_3 include in sé l'interazione spin-spin e l'interazione « di annichilazione ».

L'hamiltoniano « imperturbato »

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{e^2}{r}$$

differisce dall'hamiltoniano dell'atomo di idrogeno solo per la sostituzione della massa dell'elettrone con la massa ridotta $m/2$. I livelli energetici del positronio sono perciò due volte minori (in valore assoluto) dei livelli dell'atomo di idrogeno

$$E = -\frac{me^4}{4\hbar^2n^2} \qquad (84,2)$$

(n è il numero quantico principale).

Gli altri termini nella (84,1) portano alla separazione dei livelli (84,2), cioè alla struttura fina. I livelli che compaiono si classificano innanzitutto secondo i valori del momento angolare totale j. Si vede inoltre che gli operatori di spin delle particelle entrano nell'hamiltoniano (84,1) solo sotto forma di somma $\mathbf{S}$. Questo significa che l'hamiltoniano commuta con l'operatore del quadrato dello spin totale $\mathbf{S}^2$, e quindi il modulo dello spin totale continua a conservarsi anche nell'approssimazione considerata (del secondo ordine in $1/c$). Perciò i livelli energetici del positronio si possono classificare anche secondo lo spin totale, che assume i valori $S = 0$ e $S = 1$. I livelli a spin 0 sono detti livelli del *parapositronio* mentre i livelli a spin 1 sono detti livelli dell'*ortopositronio*.

Occorre sottolineare che la conservazione dello spin totale nel positronio è effettivamente una legge esatta, non connessa all'approssimazione in $1/c$; essa discende dall'invarianza CP delle interazioni elettromagnetiche. Il positronio è un sistema realmente neutro

[1]) In unità ordinarie.

e perciò i suoi stati sono caratterizzati da una data parità di carica e una data parità combinata. Quest'ultima è uguale a $(-1)^{S+1}$ (vedi problema al § 27); poiché S può avere solo due valori, 0 e 1, la conservazione della parità combinata è equivalente alla conservazione dello spin totale.

Per $S = 0$ il momento angolare totale j coincide con il momento angolare orbitale. Per $S = 1$ e per un dato j il numero l assume i valori j, $j \pm 1$; corrispondentemente ogni livello (n, j) dell'ortopositronio si separa, di norma, in tre livelli. Poiché ai valori $l = j$ e $l = j \pm 1$ corrispondono parità differenti, l'hamiltoniano non ha elementi di matrice che connettano questi stati. Tuttavia, l'operatore di perturbazione (il primo termine in V_3) ha, in generale, elementi non diagonali, che connettono gli stati a $l = j + 1$ e $l = j - 1$; in questo caso il numero l perde, ovviamente, il significato rigoroso di momento angolare orbitale.

Nel positronio aspetti peculiari presenta l'effetto Zeeman (*V. B. Berestetskij, I. Ja. Pomerančuk*, 1949).

Il momento magnetico orbitale del positronio è sempre nullo; poiché nel positronio $[\boldsymbol{r}_+\boldsymbol{p}_+] = [\boldsymbol{r}_-\boldsymbol{p}_-]$, allora

$$\mu_l = \mu_0([\boldsymbol{r}_+\mathbf{p}_+] - [\boldsymbol{r}_-\mathbf{p}_-]) = 0.$$

L'operatore del momento magnetico di spin, invece,

$$\mu_s = \mu_0(\sigma_+ - \sigma_-) \tag{84,3}$$

non è proporzionale all'operatore dello spin totale $\mathbf{S} = 1/2\,(\sigma_+ + \sigma_-)$, e gli operatori $\mathbf{S}^2$ e $\boldsymbol{\mu}^2$ non commutano tra di loro. Perciò gli stati a valori determinati del modulo dello spin totale S e della sua proiezione S_z non sono, in genere, autostati del momento magnetico.

Gli stati di dati S e S_z sono descritti da funzioni di spin χ_{SS_z}, che hanno la forma

$$\begin{aligned} &\chi_{11} = \alpha_+\alpha_-, \quad \chi_{1-1} = \beta_+\beta_-, \\ &\chi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_+\beta_- + \alpha_-\beta_+), \\ &\chi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_+\beta_- - \alpha_-\beta_+), \end{aligned} \tag{84,4}$$

dove α e β sono le funzioni di spin di una singola particella, relative alle proiezioni dello spin $+1/2$ e $-1/2$ (gli indici $+$ o $-$ indicano che la funzione si riferisce al positrone o all'elettrone). Di esse le prime due (χ_{11} e χ_{1-1}) sono contemporaneamente anche autofunzioni dell'operatore μ_z, relative all'autovalore $\mu_z = 0$. Le funzioni χ_{10} e χ_{00}, invece, non sono autofunzioni di μ_z; lo sono però le loro combinazioni

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{10} + \chi_{00}) = \alpha_+\beta_-, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{10} - \chi_{00}) = \alpha_-\beta_+. \tag{84,5}$$

È facile vedere che gli unici elementi non nulli della matrice $\langle S'S'_z \mid \mu_z \mid SS_z \rangle$, calcolati rispetto alle funzioni (84,4), sono gli elementi

$$\langle 00 \mid \mu_z \mid 10 \rangle = \langle 10 \mid \mu_z \mid 00 \rangle = 2\mu_0. \tag{84,6}$$

In campi magnetici deboli (quando $\mu_0 H \ll \Delta$, dove Δ è la differenza tra le energie dei livelli a $S = 0$ e $S = 1$) gli autostati dello spin totale costituiscono l'approssimazione di partenza per il calcolo della separazione Zeeman. In prima approssimazione questa separazione è data dal valore medio dell'operatore dell'energia di perturbazione

$$V_H = -\mu_z H.$$

Ma tutti gli elementi diagonali dell'operatore μ_z (e quindi anche di V_H), calcolati rispetto alle funzioni (84,4), sono nulli. In tal modo, in campi deboli l'effetto Zeeman lineare nel positronio manca.

Nel caso limite opposto di campi intensi ($\mu_0 H \gg \Delta$) si può trascurare l'interazione tra gli spin, che porta a valori S determinati dello spin totale. Le componenti del livello separato corrisponderanno, in questo caso, ad autostati $\mu_z = \pm 2\mu_0$ (descritti dalle funzioni (84,5)), e il valore dello spostamento sarà $\pm 2\ \mu_0 H$.

PROBLEMI

1. Determinare la struttura fina di livelli del parapositronio (*V. B. Berestetskij*, 1949)[1]).

Soluzione. L'energia di separazione del livello in esame è data dai valori medi dei termini correttivi nell'hamiltoniano (84,1), calcolati rispetto alle funzioni d'onda degli stati imperturbati corrispondenti a valori diversi di $j = l$ (uguali a 0, 1, . . ., $n - 1$). Per $S=0$ un contributo non nullo proviene solo da V_1 e dal secondo termine in V_3.

Le funzioni d'onda imperturbate (che denoteremo con ψ) soddisfano l'equazione di Schrödinger[2])

$$\mathbf{p}^2\psi = -\Delta\psi = \left(E + \frac{1}{r}\right)\psi, \qquad E = -\frac{1}{4n^2}.$$

Perciò

$$\mathbf{p}^4\psi = \mathbf{p}^2\left(E + \frac{1}{r}\right)\psi = \left(E + \frac{1}{r}\right)^2\psi - \psi\Delta\frac{1}{r} - 2\left(\nabla\frac{1}{r}\right)(\nabla\psi) =$$
$$= \left(E + \frac{1}{r}\right)^2\psi + 4\pi\delta(r)\psi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Per il valore medio troviamo

$$\overline{\mathbf{p}^4} = \overline{\left(E + \frac{1}{r}\right)^2} + 4\pi\,|\psi(0)|^2 + \int\int_0^\infty \frac{\partial|\psi|^2}{\partial r}\,dr\,do.$$

---

[1]) Per il calcolo della struttura fina dell'ortopositronio vedi V. B. Berestetskij, ŻETF 19, 1130 (1949); R. Ferrell, Phys. Rev. 84, 858 (1951).

[2]) Nel calcolo risulta comodo usare unità atomiche.

L'ultimo integrale è uguale a $-\int |\psi(0)|^2 do$; poiché $\psi(0) \neq 0$ solo per $l = 0$, e le funzioni d'onda degli stati S godono di simmetria sferica, allora l'integrale è uguale a $-4\pi |\psi(0)|^2$ e si semplifica con il secondo termine.

Introducendo l'operatore del momento angolare orbitale $\mathbf{l} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ si può scrivere

$$-\mathbf{p}^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\mathbf{l}^2\psi}{r^2} = -\left(E + \frac{1}{r}\right)\psi.$$

Da qui per l'altro valore medio che ci occorre troviamo

$$\int \psi^* \frac{\mathbf{r}}{r^3}(\mathbf{r}\mathbf{p})\,\mathbf{p}\psi\, d^3x = -\int \psi^* \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} d^3x =$$

$$= \overline{\frac{1}{r}\left(E + \frac{1}{r}\right)} - 4\pi |\psi(0)|^2 - l(l+1)\overline{r^{-3}}$$

(per $l = 0$ l'ultimo termine viene a mancare).

Secondo le note formule della teoria dell'atomo di idrogeno (vedi III (36,14), (36,16)), tenendo conto della sostituzione della massa dell'elettrone m con $m/2$, abbiamo

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{8\pi n^3}\delta_{l0}, \quad \overline{r^{-1}} = \frac{1}{2n^2}, \quad \overline{r^{-2}} = \frac{1}{2n^3(2l+1)},$$

$$\overline{r^{-3}} = \frac{1}{4n^3 l(l+1)(2l+1)} \qquad (l \neq 0).$$

Mediante queste formule otteniamo, per i livelli energetici cercati

$$E_{nl} = -\frac{1}{4n^2} - \alpha^2 \frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{2n^3}\left(\frac{1}{2l+1} - \frac{11}{32n}\right).$$

2. Determinare la differenza tra le energie degli stati fondamentali ($n = 1$, $l = 0$) dell'orto- e del parapositronio.

Soluzione. La dipendenza dell'energia dallo spin totale S per $l = 0$ è contenuta solo nel valore medio del secondo termine in V_3 [il primo termine, invece, si annulla quando si esegue la media sugli angoli nello stato S (a simmetria sferica)][1]. Il livello fondamentale dell'ortopositronio ($^3S_1$) è piú alto del livello fondamentale del parapositronio ($^1S_0$) della quantità

$$E(^3S_1) - E(^1S_0) = \frac{7}{12}\alpha^2 \frac{me^4}{\hbar^2} = 8{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{eV}.$$

§ 85. *Interazione di atomi a grandi distanze*

Tra due atomi neutri, che si trovano a distanze r grandi rispetto alle loro dimensioni intrinseche, agiscono forze attrattive. Il metodo quantistico ordinario per il calcolo di queste forze (vedi III, § 89) diventa, tuttavia, inapplicabile a distanze troppo grandi. E questo perché in quel tipo di calcolo si tiene conto solo dell'interazione elettrostatica, ma non degli effetti di ritardo. Tale approccio è valido solo fino a quando la distanza r rimane piccola rispetto alle lunghezze d'onda caratteristiche λ_0 degli spettri degli atomi interagenti. In questo paragrafo verrà eseguito un calcolo privo di questa limitazione.

---

[1]) La media sugli angoli deve essere eseguita prima dell'integrazione rispetto a r, come risulta evidente dal metodo di calcolo dell'integrale (83,14), che origina il primo termine in V_3.

Noi procederemo all'incirca come nel § 83, calcolando l'ampiezza di diffusione elastica di due atomi diversi (senza cambiamento dello stato interno) nella prima approssimazione non nulla. Confronteremo quindi l'espressione ottenuta con l'ampiezza che si otterrebbe in una descrizione dell'interazione degli atomi mediante l'energia potenziale $U(r)$.

In quest'ultimo caso il primo elemento non nullo della matrice S, che descrive il processo in esame, sarebbe l'elemento del primo ordine

$$S_{fi} = -i \int \psi_1'^*(\boldsymbol{r}_1)\, \psi_2'^*(\boldsymbol{r}_2)\, U(r)\, \psi_1(\boldsymbol{r}_1)\, \psi_2 \times \\ \times (\boldsymbol{r}_2)\, d^3x_1\, d^3x_2 \int \exp\{-i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1' - \varepsilon_2')\, t\}\, dt. \qquad (85,1)$$

Qui ψ_1, ψ_2 e ψ_1', ψ_2' sono le parti che non dipendono dal tempo delle funzioni d'onda (onde piane), che descrivono il moto di traslazione dei due atomi con impulsi iniziali e finali rispettivamente; ε_1, ε_2 e ε_1', ε_2' sono le energie cinetiche di questo moto; le coordinate $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ degli atomi, considerati come un sistema unico, si possono intendere come le coordinate dei rispettivi nuclei, e la distanza tra questi ultimi è $r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$. L'integrale temporale nella (85,1) dà, come al solito, una funzione δ, che esprime la legge di conservazione dell'energia. Per facilitare il successivo confronto è, tuttavia, conveniente considerare formalmente il caso limite di atomi con massa infinitamente grande ; per impulsi dati a questo limite corrispondono energie ε nulle. In altre parole, si può dire che si considerano tempi brevi rispetto ai periodi $1/\varepsilon$. Allora la (85,1) assumerà la forma

$$S_{fi} = -it \int\int \psi_1'^* \psi_2'^* U(r)\, \psi_1 \psi_2\, d^3x_1\, d^3x_2, \qquad (85,2)$$

dove t è l'intervallo di tempo su cui si integra.

Il calcolo concreto dell'ampiezza di diffusione elastica, con le supposizioni fatte, si può scomporre in due tappe. Si prende dapprima la media dell'operatore S rispetto alle funzioni d'onda degli stati invariati (fondamentali) dei due atomi (per certi valori delle coordinate dei due nuclei $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$), e poi rispetto allo stato di vuoto fotonico (all'inizio e alla fine del processo i fotoni non ci sono). Come risultato otteniamo una quantità, che sarà funzione della distanza tra i nuclei; indichiamola con $\langle S(r)\rangle$[1]. Per trovare l'elemento di matrice di transizione cercato occorre quindi calcolare l'integrale

$$S_{fi} = \int\int \psi_1'^* \psi_2'^* \langle S(r)\rangle\, \psi_1 \psi_2\, d^3x_1\, d^3x_2. \qquad (85,3)$$

Confrontando con la (85,2) vediamo che se otteniamo l'espressione $\langle S(r)\rangle$ nella forma

$$\langle S(r)\rangle = -itU(r),$$

[1]) Sostituisce la notazione piú complessa dell'elemento di matrice diagonale in cui sono specificati gli stati dell'atomo e del campo fotonico.

allora la funzione $U(r)$ sarà l'energia di interazione tra gli atomi cercata.

Poiché nel caso considerato abbiamo a che fare non con una collisione di particelle elementari, ma di sistemi composti (atomi, che negli stati intermedi possono essere eccitati), le regole formali ordinarie della tecnica dei diagrammi non sono direttamente applicabili, e noi partiremo dall'espressione dell'operatore S sotto forma dello sviluppo (73,10).

Per l'interazione tra atomi sono essenziali le componenti di Fourier dei campi che corrispondono a frequenze dell'ordine delle frequenze atomiche (e frequenze inferiori). Le corrispondenti lunghezze d'onda sono grandi rispetto alle dimensioni atomiche. Perciò l'operatore di interazione elettromagnetica può essere scritto nella forma

$$V = -\mathbf{E}(\boldsymbol{r}_1)\,\mathbf{d}_1 - \mathbf{E}(\boldsymbol{r}_2)\,\mathbf{d}_2, \tag{85,4}$$

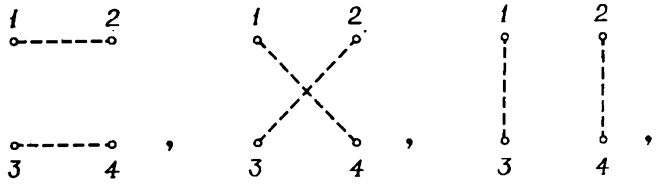
dove $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ sono gli operatori dei momenti di dipolo degli atomi (si intendono qui gli operatori di Heisenberg dipendenti dal tempo), e $\mathbf{E}(\boldsymbol{r})$ è l'operatore campo elettrico, il quale viene considerato nei punti in cui si trovano gli atomi.

Come è noto, i valori medi del momento di dipolo di un atomo nei suoi stati stazionari sono nulli (vedi III, § 75). Da qui discende che un'ampiezza di diffusione non nulla compare solo nell'approssimazione del quarto ordine della teoria delle perturbazioni, cioè compare come elemento di matrice dell'operatore

$$S^{(4)} = \frac{(-i)^4}{4!}\int dt_1 \ldots \int dt_4 \cdot T\{V(t_1)\,V(t_2)\,V(t_3)\,V(t_4)\}. \tag{85,5}$$

In effetti, agli ordini inferiori ciascun termine nei prodotti di operatori V contiene almeno uno degli operatori $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ alla prima potenza e quindi si annulla quando si prende il suo valore medio nello stato dell'atomo che gli corrisponde.

Calcoliamo ora il valore medio dell'operatore (85,5) nello stato di vuoto fotonico. Secondo il teorema di Wick il valore medio del prodotto di quattro operatori **E** si riduce alla somma dei prodotti dei valori medi di coppie di essi (contrazioni). La suddivisione in coppie può essere fatta in tre modi, che possono venire rappresentati mediante i diagrammi



(85,6)

dove le linee tratteggiate rappresentano le contrazioni, e i numeri corrispondono agli argomenti t_1, t_2, t_3, t_4. Inoltre, ad ogni punto possono corrispondere le coordinate spaziali $\boldsymbol{r}_1$ o $\boldsymbol{r}_2$ (a due punti $\boldsymbol{r}_1$, e agli altri due $\boldsymbol{r}_2$; in caso contrario nel termine della somma in esame uno degli operatori $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ entrerà alla prima potenza e si annullerà nella media rispetto allo stato dell'atomo). È evidente che nei punti uniti da linee devono trovarsi $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ differenti. In caso contrario il diagramma (cioè il termine corrispondente nell'elemento di matrice) si ridurrà al prodotto di funzioni indipendenti di $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$, invece di essere funzione della differenza $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$; e termini di questo tipo non hanno nessuna relazione con la diffusione[1]). Corrispondentemente a queste condizioni gli argomenti $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ si possono disporre nei quattro punti del diagramma in quattro modi. Tenendo conto anche della commutatività degli operatori $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ e mediando rispetto agli stati di ciascun atomo, troviamo che tutti i $3 \times 4 = 12$ termini ottenuti in questo modo sono uguali (essi differiscono solo per la notazione delle variabili d'integrazione). Come risultato otteniamo

$$\begin{aligned}\langle S(r)\rangle = \frac{1}{2}\int dt_1 \ldots \int dt_4 \cdot \langle \mathrm{T}\,(\mathrm{E}_i(\boldsymbol{r}_1, t_1)\,\mathrm{E}_k \times \\ \times (\boldsymbol{r}_2, t_2))\rangle \langle \mathrm{T}\,(\mathrm{E}_l(\boldsymbol{r}_2, t_3)\,\mathrm{E}_m(\boldsymbol{r}_1, t_4))\rangle \times \\ \times \langle \mathrm{T}\,(\mathrm{d}_{1i}(t_1)\,\mathrm{d}_{1m}(t_4))\rangle \langle \mathrm{T}\,(\mathrm{d}_{2k}(t_2)\,\mathrm{d}_{2l}(t_3))\rangle, \qquad (85,7)\end{aligned}$$

dove i, k, l, m sono indici vettoriali tridimensionali.

Per il calcolo delle quantità

$$D^E_{ik}(x_1 - x_2) = \langle \mathrm{T}\,(\mathrm{E}_i(x_1)\,\mathrm{E}_k(x_2))\rangle \qquad (85,8)$$

usiamo il gauge dei potenziali, in cui il potenziale scalare $\Phi = 0$. Allora $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$ e abbiamo

$$D^E_{ik}(x_1 - x_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}\langle \mathrm{T}\,(\mathrm{A}_i(x_1)\,\mathrm{A}_k(x_2))\rangle = i\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} D_{ik}(x),$$

dove $x = x_1 - x_2$, $D_{ik}(x)$ è il propagatore fotonico nel dato gauge[2]).

In seguito, sarà piú comodo usare il propagatore $D_{ik}(\omega, \boldsymbol{r})$ in forma « mista » ω, $\boldsymbol{r}$ connesso alla funzione $D(t, \boldsymbol{r})$ mediante

$$D_{ik}(t, \boldsymbol{r}) = \int D_{ik}(\omega, \boldsymbol{r})\, e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Cosicché

$$D^E_{ik}(t, \boldsymbol{r}) = -i\int \omega^2 D_{ik}(\omega, \boldsymbol{r})\, e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (85,9)$$

---

[1]) Essi non danno le correzioni, che a noi qui interessano, alle autoenergie di ciascuno degli atomi.

[2]) La derivata prima $\partial/\partial t\, D_{ik}(t)$ ha in $t = 0$ una discontinuità finita. Perciò la derivata seconda, cioè la funzione $D^E_{ik}(t)$, contiene anche un termine con la funzione $\delta\,(\sim\delta^4(x_2 - x_1))$. Questo termine, tuttavia, è nullo per tutti gli $\boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{r}_2$ e qui non ci interessa.

A sua volta la funzione $D_{ik}(\omega, \boldsymbol{r})$ si esprime mediante il propagatore fotonico nella rappresentazione degli impulsi dalla formula

$$D_{ik}(\omega, \boldsymbol{r}) = \int D_{ik}(\omega, \boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{85,10}$$

Secondo la (77,14) abbiamo

$$D_{ik}(\omega, \boldsymbol{k}) = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2 + i0}\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{\omega^2}\right). \tag{85,11}$$

Sviluppiamo le quantità

$$\alpha_{ik}(t_1 - t_2) = i\,\langle \mathrm{T}\,(\mathrm{d}_i(t_1)\,\mathrm{d}_k(t_2))\rangle \tag{85,12}$$

in integrale di Fourier

$$\alpha_{ik}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\alpha_{ik}(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Ponendo per comodità $t_2 = 0$, $t_1 = t$, scriviamo per definizione di prodotto T,

$$\alpha_{ik}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\alpha_{ik}(t)\,dt = i\int_{-\infty}^{0} e^{i\omega t}\langle \mathrm{d}_k(0)\,\mathrm{d}_i(t)\rangle\,dt +$$

$$+ i\int_{0}^{\infty} e^{i\omega t}\langle \mathrm{d}_i(t)\,\mathrm{d}_k(0)\rangle\,dt. \tag{85,13}$$

I valori medi (rispetto allo stato fondamentale dell'atomo), che compaiono qui, si esprimono attraverso gli elementi di matrice del momento di dipolo

$$\langle \mathrm{d}_k(0)\,\mathrm{d}_i(t)\rangle = \sum_n (d_k)_{0n}(d_i)_{n0}\, e^{i\omega_{n0}t},$$

$$\langle \mathrm{d}_i(t)\,\mathrm{d}_k(0)\rangle = \sum_n (d_i)_{0n}(d_k)_{n0}\, e^{-i\omega_{n0}t}.$$

Per la convergenza degli integrali nella (85,13) nel primo di essi ω va inteso come $\omega - i0$ e nel secondo come $\omega + i0$; integrando, otteniamo

$$\alpha_{ik}(\omega) = \sum_n \left\{\frac{(d_i)_{0n}(d_k)_{n0}}{\omega_{n0} - \omega + i0} + \frac{(d_k)_{0n}(d_i)_{n0}}{\omega_{n0} + \omega + i0}\right\}. \tag{85,14}$$

Se lo stato fondamentale dell'atomo è lo stato S, allora questo tensore si riduce ad uno scalare: $\alpha_{ik}(\omega) = \alpha(\omega)\,\delta_{ik}$, dove

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{3}\sum_n |\boldsymbol{d}_{0n}|^2\left(\frac{1}{\omega_{n0} - \omega + i0} + \frac{1}{\omega_{n0} + \omega + i0}\right). \tag{85,15}$$

Se invece l'atomo possiede momento angolare, allora questo stesso risultato si ottiene mediando sulle sue direzioni, cosa che noi sottintenderemo (a noi interessa l'interazione degli atomi mediata rispetto alle loro orientazioni reciproche).

Confrontando la (85,14) con l'espressione (60,17) per la polarizzabilità dell'atomo vediamo che coincidono per $\omega > 0$ (queste espressioni, tenendo conto anche della nota 1 alla pag. 294, differiscono solo per la direzione dell'aggiramento dei poli nel secondo membro, ciò è inessenziale per $\omega > 0$). I valori di $\alpha(\omega)$, invece, per $\omega < 0$ si esprimono con l'aiuto della relazione $\alpha(-\omega) = \alpha(\omega)$, evidente dalla (85,15), per $\omega > 0$.

Sostituendo le espressioni ottenute nella (85,7), troviamo

$$\langle S(r)\rangle = \frac{1}{2}\int dt_1 \ldots dt_4 \frac{d\Omega_1}{2\pi}\frac{d\Omega_2}{2\pi}\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi} \times$$
$$\times \alpha_1(\Omega_1)\alpha_2(\Omega_2)\omega_1^2 D_{ik}(\omega_1, \boldsymbol{r})\omega_2^2 D_{ik}(\omega_2, \boldsymbol{r}) \times$$
$$\times \exp\{-i\omega_1(t_1-t_2) - i\omega_2(t_3-t_4) - i\Omega_1(t_1-t_4) - i\Omega_2(t_2-t_3)\}$$

($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, abbiamo tenuto conto della parità della funzione $D_{ik}(\omega, \boldsymbol{r})$ secondo $\boldsymbol{r}$).

L'integrazione rispetto a tre tempi dà una funzione δ (in virtú della quale $-\Omega_1 = \Omega_2 = \omega_2 = \omega_1$), mentre rispetto al quarto dà il fattore t

$$\langle S(r)\rangle = -itU(r),$$

dove

$$U(r) = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \alpha_1(\omega)\alpha_2(\omega)[D_{ik}(\omega, \boldsymbol{r})]^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (85,16)$$

Questa formula dà l'energia d'interazione di due atomi a qualsiasi distanza, grande rispetto alle dimensioni atomiche a. Rimane soltanto da fare la trasformazione inversa di Fourier per trovare la forma $D_{ik}(\omega, \boldsymbol{r})$.

Osserviamo prima di tutto che, secondo le (85,10-11)

$$D_{ik}(\omega, \boldsymbol{r}) = -\left(\delta_{ik} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k}\right) D(\omega, \boldsymbol{r}),$$

dove

$$D(\omega, \boldsymbol{r}) = 4\pi \int \frac{e^{ikr}}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2 + i0}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

L'integrale in d^3k si calcola facilmente nelle coordinate sferiche con l'asse polare lungo $\boldsymbol{r}$. Integrando rispetto agli angoli otteniamo

$$D(\omega, \boldsymbol{r}) = -\frac{i}{\pi r}\int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2 + i0} k\, dk = -\frac{i}{\pi r}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2 + i0} k\, dk$$

(nel secondo termine abbiamo sostituito $k \to -k$). L'ultimo integrale si calcola chiudendo il contorno d'integrazione nel semipiano superiore k e si ottiene

$$D(\omega, \boldsymbol{r}) = -\frac{1}{r} e^{i|\omega|r},$$

da qui in seguito abbiamo

$$D_{ik}(\omega, \boldsymbol{r}) = \Big[\delta_{ik}\Big(1 + \frac{i}{|\omega| r} - \frac{1}{\omega^2 r^2} + \\ + \frac{x_i x_k}{r^2}\Big(\frac{3}{\omega^2 r^2} - \frac{3i}{|\omega| r} - 1\Big)\frac{e^{i|\omega|r}}{r}. \quad (85,17)$$

Sostituendo nella (85,16) dopo semplici trasformazioni, otteniamo (tenendo conto della parità della funzione $\alpha(\omega)$)

$$U(r) = \frac{i}{\pi r^2}\int_0^\infty \omega^4 \alpha_1(\omega)\alpha_2(\omega)\exp(2i\omega r) \times \\ \times \Big[1 + \frac{2i}{\omega r} - \frac{5}{(\omega r)^2} - \frac{6i}{(\omega r)^3} + \frac{3}{(\omega r)^4}\Big] d\omega. \quad (85,18)$$

L'espressione generale (85,18) si può semplificare nei casi limite di « piccole » ($a \ll r \ll \lambda_0$) e « grandi » ($r \gg \lambda_0$) distanze.

Per $r \ll \lambda_0$ nell'integrale sono essenziali i valori $\omega \sim \omega_0 \sim c/\lambda_0$, cosí che $\omega r \ll 1$. In questo caso si può lasciare tra parentesi solo l'ultimo termine e sostituire l'esponente con l'unità. Allora

$$U(r) = \frac{3i}{2\pi r^6}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1(\omega)\alpha_2(\omega)\, d\omega. \quad (85,19)$$

Come era prevedibile, abbiamo ottenuto per l'interazione su queste distanze la legge $1/r^6$. In questa formula l'integrale si calcola facilmente sostituendovi l'espressione (85,15), chiudendo il contorno d'integrazione nel semipiano superiore ω; in questo caso l'integrale si calcola mediante la sottrazione dell'espressione integranda nei poli $\omega = \omega_{n0} \sim \omega_0$. Supponendo, per semplicità, ambedue gli atomi uguali, otteniamo (in unità ordinarie)

$$U(r) = -\frac{2}{3r^6}\sum_{n,\, n'} \frac{|\boldsymbol{d}_{0n}|^2 |\boldsymbol{d}_{0n'}|^2}{\hbar(\omega_{n0} + \omega_{n'0})}, \quad (85,20)$$

che coincide esattamente con la nota formula di London (vedi III, problema del § 89).

Nel caso limite di grandi distanze $r \gg \lambda_0$ nell'integrale sono essenziali i valori $\omega \lesssim c/r \ll \omega_0$; per $\omega \gtrsim \omega_0$ il fattore $\exp(2i\omega r)$ elimina l'integrale. Perciò si possono sostituire le polarizzabilità $\alpha_1(\omega)$ e $\alpha_2(\omega)$ con i loro valori statici $\alpha_1(0)$, $\alpha_2(0)$. Dopo di ciò l'integra-

zione viene eseguita in modo elementare (per assicurare la convergenza dell'integrale occorre sostituire nell'esponente $r \to r + i0$). In questo modo troviamo l'espressione definitiva (in unità note):

$$U(r) = -\frac{23}{4\pi} \frac{\hbar c \alpha_1(0) \alpha_2(0)}{r^7}, \tag{85,21}$$

che determina l'energia d'interazione degli atomi a grandi distanze[1]).

---

[1]) Questa formula venne ottenuta per la prima volta da *H. B. Casimir*, *D. Polder*, (1948). Nella nostra deduzione abbiamo seguito *I. E. Dzjalošinskij*.

Capitolo X

INTERAZIONE DI ELETTRONI CON FOTONI

§ 86. *Diffusione di un fotone su un elettrone*

La conservazione dell'energia-impulso nella diffusione di un fotone su un elettrone libero (effetto Compton) è espressa dall'uguaglianza

$$p + k = p' + k', \tag{86,1}$$

dove p e k sono i 4-impulsi dell'elettrone e del fotone prima dell'urto, e p' e k' i loro 4-impulsi dopo l'urto. Gli invarianti cinematici introdotti nel § 67 sono

$$\begin{gathered} s = (p+k)^2 = (p'+k')^2 = m^2 + 2pk = m^2 + 2p'k', \\ t = (p-p')^2 = (k'-k)^2 = 2(m^2 - pp') = -2kk', \\ u = (p-k')^2 = (p'-k)^2 = m^2 - 2pk' = m^2 - 2p'k, \\ s + t + u = 2m^2. \end{gathered} \tag{86,2}$$

Il processo considerato è rappresentato dai due diagrammi di Feynman (75,14), e la sua ampiezza è

$$M_{fi} = -4\pi e^2 e'^*_\mu e_\nu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u), \tag{86,3}$$

dove

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{s-m^2}\gamma^\mu(\hat{p}+\hat{k}+m)\gamma^\nu + \frac{1}{u-m^2}\gamma^\nu(\hat{p}-\hat{k}'+m)\gamma^\mu. \tag{86,4}$$

Qui e, e' sono i 4-vettori polarizzazione dei fotoni iniziale e finale; u, u' sono le ampiezze bispinoriali degli elettroni iniziali e finali.

Secondo le regole esposte nel § 66 per stati delle particelle, polarizzati arbitrariamente, il quadrato $|M_{fi}|^2$ viene sostituito con

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4 \operatorname{Tr}\{\rho^{(e)\prime}\rho^{(\gamma)\prime}_{\lambda\mu} Q^{\mu\nu}\rho^{(e)}\rho^{(\gamma)}_{\nu\sigma}\bar{Q}^{\lambda\sigma}\}. \tag{86,5}$$

Qui $\rho^{(e)}$, $\rho^{(e)\prime}$ sono le matrici densità dell'elettrone iniziale e finale; $\rho^{(\gamma)}$, $\rho^{(\gamma)\prime}$ sono le quantità analoghe per i fotoni; gli indici fotonici (tensoriali) sono indicati esplicitamente, mentre quelli elettronici (bispinoriali) sono sottintesi; il simbolo Tr si riferisce proprio a questi secondi indici. Sempre a questi indici si riferisce il segno $^+$ in $Q_{\mu\nu} = \gamma^0 Q^+_{\mu\nu}\gamma^0$.

Esaminiamo la diffusione di un fotone non polarizzato su un elettrone non polarizzato, senza interessarci delle loro polarizzazioni nemmeno dopo la diffusione. La media sulle polarizzazioni di tutte le particelle viene eseguita mediante le matrici densità

$$\rho^{(\gamma)}_{\lambda\mu} = \rho^{(\gamma)'}_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} g_{\lambda\mu}, \quad \rho^{(e)} = \frac{1}{2} (\hat{p} + m), \quad \rho^{(e)'} = \frac{1}{2} (\hat{p}' + m);$$

il passaggio alla sommatoria sulle polarizzazioni delle particelle finali si realizza moltiplicando ancora per $2 \cdot 2 = 4$.

Usando la formula (65,23) (dove ora è necessario porre $I^2 = 1/4\,(s - m^2)^2$, vedi formula (65,15a)) per la sezione d'urto otteniamo

$$d\sigma = \frac{\pi e^4}{4} \frac{dt}{(s - m^2)^2} \operatorname{Tr} \{(\hat{p}' + m)\, Q^{\lambda\mu}\, (\hat{p} + m)\, \bar{Q}_{\lambda\mu}\}.$$

Usando le formule (66,2a) troviamo che $\bar{Q}_{\mu\lambda} = Q_{\lambda\mu}$. Separando i termini, che per la sostituzione $k \leftrightarrow -k'$ (e rispettivamente $s \leftrightarrow u$) si trasformano l'uno nell'altro, rappresentiamo la sezione d'urto nella forma

$$d\sigma = dt \frac{\pi e^4}{(s - m^2)^2} [f(s, u) + g(s, u) + f(u, s) + g(u, s)],$$

dove è stata introdotta la notazione

$$f(s, u) = \frac{1}{4(s - m^2)^2} \operatorname{Tr} \{(\hat{p}' + m)\, \gamma^\mu\, (\hat{p} + \hat{k} + m)\, \gamma^\nu\, (\hat{p} + m)\, \gamma_\nu\, (\hat{p} + \hat{k} + m)\, \gamma_\mu\},$$

$$g(s, u) = \frac{1}{4(s - m^2)(u - m^2)} \operatorname{Tr} \{(\hat{p}' + m)\, \gamma^\mu\, (\hat{p} + \hat{k} + m)\, \gamma^\nu\, (\hat{p} + m)\, \gamma_\mu\, (\hat{p} - \hat{k}' + m)\, \gamma_\nu\}$$

(introducendo queste notazioni noi abbiamo già presente che il risultato dipenderà solo dalle ampiezze invarianti).

La sommatoria su μ e ν viene fatta mediante le formule (22,6); tralasciando i termini con un numero dispari di matrici γ, otteniamo

$$f(s, u) = \frac{1}{(s - m^2)^2} \operatorname{Tr} \{\hat{p}'\, (\hat{p} + \hat{k})\, \hat{p}'\, (\hat{p} + \hat{k}) + 4m^2 (\hat{p} + \hat{k})(\hat{k} - \hat{p}') + m^2 \hat{p}\hat{p}' + 4m^4\}.$$

Calcolando la traccia mediante le formule (22,13) ed esprimendo tutte le quantità attraverso gli invarianti s, u, dopo alcune semplici trasformazioni troviamo

$$f(s, u) = \frac{2}{(s - m^2)^2} \{4m^4 - (s - m^2)(u - m^2) + 2m^2 (s - m^2)\}.$$

Analogamente viene calcolato g:

$$g(s, u) = \frac{2m^2}{(s - m^2)(u - m^2)} \{4m^2 + (s - m^2) + (u - m^2)\}.$$

Come risultato per la sezione d'urto otteniamo

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2\,dt}{(s-m^2)^2}\left\{\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{s-m^2}{u-m^2}+\frac{u-m^2}{s-m^2}\right)\right\}, \qquad (86,6)$$

dove $r_e = e^2/m$. Questa formula esprime la sezione d'urto attraverso gli invarianti cinematici. Partendo da essa è facile esprimere la sezione d'urto attraverso i parametri d'urto in qualsiasi particolare sistema di riferimento.

Consideriamo per esempio il sistema di riferimento del laboratorio, dove prima dell'urto l'elettrone era in quiete: $p = (m, 0)$. Qui abbiamo

$$s - m^2 = 2m\omega, \quad u - m^2 = -2m\omega'. \qquad (86,7)$$

Scrivendo l'equazione di conservazione dell'energia-impulso nella forma $p + k - k' = p'$ ed elevando al quadrato otteniamo

$$pk - pk' - kk' = 0,$$

da cui (nel sistema di laboratorio)

$$m(\omega - \omega') - \omega\omega'(1 - \cos\vartheta) = 0,$$

dove ϑ è l'angolo di diffusione del fotone. Questa uguaglianza determina il legame tra la variazione di energia del fotone e l'angolo di diffusione:

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos\vartheta). \qquad (86,8)$$

L'invariante t è

$$t = -2kk' = -2\omega\omega'(1 - \cos\vartheta).$$

Per una data energia ω (mediante la (86,8)) troviamo

$$dt = 2\omega'^2 d\cos\vartheta = \frac{1}{\pi}\omega'^2\,do' \quad (do' = 2\pi \operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta).$$

Sostituendo le espressioni trovate nella (86,6) si arriva alla seguente formula per la sezione d'urto di diffusione nel sistema di riferimento del laboratorio:

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\operatorname{sen}^2\vartheta\right)do' \qquad (86,9)$$

(*O. Klein*, *Y. Nishina*, 1929; *I. E. Tamm*, 1930).

Poiché l'angolo ϑ è univocamente legato a ω' dalla relazione (86,8), la sezione d'urto può essere espressa attraverso l'energia del fotone diffuso ω':

$$d\sigma = \pi r_e^2 \frac{m\,d\omega'}{\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}+\left(\frac{m}{\omega'}-\frac{m}{\omega}\right)^2-2m\left(\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\omega}\right)\right], \qquad (86,10)$$

dove ω' varia tra i limiti

$$\frac{\omega}{1+2\frac{\omega}{m}} \leqslant \omega' \leqslant \omega. \tag{86,11}$$

Per $\omega \ll m$ nella (86,9) si può porre $\omega' \approx \omega$, e si ottiene, come era logico, la formula classica di Thomson

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_e^2 (1+\cos^2\vartheta)\, do' \tag{86,12}$$

(vedi II (78,7)).

Per il calcolo della sezione totale torniamo alla formula (86,6). Gli invarianti che vi compaiono assumono valori che soddisfano le disuguaglianze

$$s \geqslant m^2,\ t \leqslant 0,\ us \leqslant m^4. \tag{86,13}$$

Queste relazioni erano già state ottenute nel § 68 (la regione fisica corrispondente è il dominio I nella fig. 9). È facile convincersi di queste disuguaglianze anche direttamente, scrivendo le espressioni degli invarianti nel sistema del baricentro. Qui $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}=0$, i valori dell'energia dell'elettrone ε e del fotone ω sono legati dalla relazione $\varepsilon = \sqrt{\omega^2+m^2}$. Per gli invarianti troviamo

$$\begin{aligned} s &= (\varepsilon+\omega)^2 = m^2 + 2\omega(\omega+\varepsilon), \\ u &= m^2 - 2\omega(\varepsilon+\omega\cos\theta), \\ t &= -2\omega^2(1-\cos\theta), \end{aligned} \tag{86,14}$$

dove θ è l'angolo di diffusione (l'angolo tra $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p}'$ o tra $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}'$). Le tre disuguaglianze (86,13) si ricavano dalle condizioni $\omega \geqslant 0$, $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$.

Per un dato s (cioè per una data energia delle particelle) l'integrazione rispetto a t si può sostituire con l'integrazione rispetto a $u = 2m^2 - s - t$ nell'intervallo

$$\frac{m^4}{s} \leqslant u \leqslant 2m^2 - s.$$

Introducendo al posto di s e u le quantità

$$x = \frac{s-m^2}{m^2},\quad y = \frac{m^2-u}{m^2}, \tag{86,15}$$

otteniamo

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{x^2} \int\limits_{x/(x+1)}^{x} \left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right] dy$$

e dopo un'integrazione elementare

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{4}{x}-\frac{8}{x^2}\right)\ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2}\right\}. \tag{86,16}$$

Per $x \ll 1$ (caso non relativistico) i primi tre termini dello sviluppo danno

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3}(1-x). \tag{86,17}$$

Il primo termine è la sezione d'urto classica di Thomson. Nel caso opposto, ultrarelativistico $x \gg 1$, lo sviluppo della formula (86,16) dà

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x}\left(\ln x + \frac{1}{2}\right). \tag{86,18}$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio

$$x = \frac{2\omega}{m}, \tag{86,19}$$

e quindi le formule (86,16-18) danno direttamente la dipendenza della sezione d'urto di diffusione su un elettrone fisso dall'energia

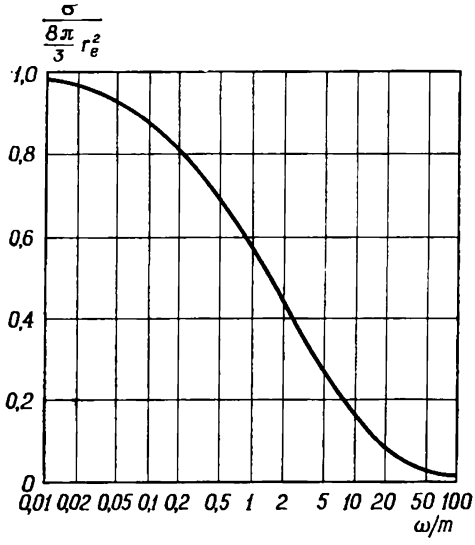


Fig. 15

del fotone. Nella fig. 15 è riportato il grafico della dipendenza di σ da ω/m.

Notiamo che nel caso ultrarelativistico la sezione d'urto diminuisce con l'aumentare dell'energia sia nel sistema del laboratorio ($\sigma \backsim \omega^{-1} \ln \omega$) sia nel sistema del baricentro ($x \approx 4\omega^2/m^2$; $\sigma \backsim \omega^{-2} \ln \omega$). La distribuzione angolare, invece, nel caso ultrarelativistico ha in questi due sistemi di riferimento un carattere totalmente differente.

Nel sistema del laboratorio la sezione d'urto differenziale ha un massimo ben marcato in corrispondenza della diffusione in avanti. Nello stretto cono $\vartheta \lesssim \sqrt{m/\omega}$ abbiamo $\omega' \sim \omega$ e la sezione è

$d\sigma/do' \sim r_e^2$ (e tende al valore r_e^2 per $\vartheta \to 0$). Fuori da questo cono la sezione diminuisce, e nel campo $\vartheta^2 \gg m/\omega$ (dove $\omega' \approx m/(1-\cos\vartheta)$) abbiamo

$$\frac{d\sigma}{do'} = \frac{r_e^2}{2}\frac{m}{\omega(1-\cos\vartheta)},$$

cioè la sezione d'urto diminuisce di $\sim \omega/m$ volte.

Nel sistema del baricentro, invece, la sezione d'urto differenziale ha un massimo in corrispondenza della diffusione all'indietro. Per $\pi - \theta \ll 1$ dalla (86,14) abbiamo

$$\frac{s-m^2}{m^2} \approx \frac{4\omega^2}{m^2}, \quad \frac{m^2-u}{m^2} \approx 1 + \frac{\omega^2}{m^2}(\pi-\theta)^2.$$

Il termine dominante nella sezione d'urto (86,6) è

$$d\sigma \approx 8\pi r_e^2 \frac{m^2\,dt}{4(s-m^2)(m^2-u)},$$

da cui si ricava

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2}\frac{do'}{1+(\pi-\theta)^2\omega^2/m^2}.$$

La sezione d'urto è $d\sigma/do' \sim r_e^2$ dentro lo stretto cono $\pi - \theta \lesssim m/\omega$, mentre fuori da questo diminuisce di $\sim \omega^2/m^2$ volte.

§ 87. *Diffusione di un fotone su un elettrone. Effetti di polarizzazione*

Torniamo ora alle formule di partenza del paragrafo precedente e mostriamo in che modo devono eseguirsi i calcoli, tenendo conto della polarizzazione dei fotoni e degli elettroni iniziali e finali.

La matrice densità del fotone si esprime, secondo la (8,17), mediante la coppia di 4-versori $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, che soddisfano le condizioni (8,16). Nel caso considerato questi vettori si possono scegliere in un modo unico per ambedue i vettori. Sono i 4-vettori introdotti nel § 71 [1])

$$e^{(1)} = \frac{N}{\sqrt{-N^2}}, \quad e^{(2)} = \frac{P}{\sqrt{-P^2}}, \tag{87,1}$$

[1]) Un modo alternativo di calcolo consiste nel prendere sin dall'inizio un sistema di riferimento determinato (per esempio, il sistema del laboratorio) e scegliere come versori $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ dei versori spaziali puri ($e = (0, \boldsymbol{e})$), trasversali rispetto agli impulsi dei fotoni:

$$e^{(1)} = \frac{[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']}{|[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']|}, \qquad e^{(2)} = \frac{1}{\omega}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}^{(1)}]$$

per il fotone $\boldsymbol{k}$, e

$$e^{(1)} = \frac{[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']}{[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']|}, \qquad e^{(2)} = \frac{1}{\omega'}[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}^{(1)}]$$

per il fotone $\boldsymbol{k}'$. In questo modo, tuttavia, tutti i calcoli verranno eseguiti in forma tridimensionale, e il risultato non avrà una forma invariante.

dove

$$P^\lambda = (p^\lambda + p'^\lambda) - K^\lambda \frac{pK + p'K}{K^2},$$
$$N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho, \tag{87,2}$$
$$K^\lambda = k^\lambda + k'^\lambda, \quad q^\lambda = k'^\lambda - k^\lambda = p^\lambda - p'^\lambda.$$

Le espressioni $Q^{\mu\nu}$ nella (86,5) sono date dalla formula (86,4). Esse possono essere considerate come le componenti di un 4-tensore (nel senso che esse formano un 4-tensore dopo la formazione delle quantità $\bar{u}'Q^{\mu\nu}u$). Tutte le componenti di un 4-tensore si esauriscono proiettando quest'ultimo su quattro 4-vettori mutuamente ortogonali, ad esempio sui vettori definiti sopra P, N, q, K. Poiché i tensori $\rho_{\mu\nu}^{(\gamma)'}$, $\rho_{\mu\nu}^{(\gamma)}$ contengono solo le componenti P e N, praticamente a noi occorrono solo le componenti di $Q_{\mu\nu}$ su questi 4-vettori. In altre parole, è sufficiente cercare in $Q_{\mu\nu}$ solo i termini della forma

$$Q_{\mu\nu} = Q_0 (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)} e_\nu^{(2)}) + Q_1 (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} + \\ + e_\mu^{(2)} e_\nu^{(1)}) - iQ_2 (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\mu^{(2)} e_\nu^{(1)}) + Q_3 (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)} e_\nu^{(2)}); \tag{87,3}$$

gli altri termini della sostituzione nella (86,5) sarebbero ugualmente scomparsi. Le quantità Q_0 e Q_3 sono degli scalari, nello stesso senso in cui $Q_{\mu\nu}$ è un 4-tensore; esse contengono perciò le matrici γ soltanto sotto forma di « combinazioni » invarianti: $\hat{K}$ ed espressioni simili. Nello stesso senso Q_1 e Q_2 sono degli pseudoscalari (N è uno pseudovettore!) e perciò devono contenere la matrice γ^5.

Proiettando direttamente il tensore $Q_{\mu\nu}$, troviamo

$$Q_0 = \frac{1}{2} Q^{\mu\nu} (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)} e_\nu^{(2)})$$

e cosí via. Per i calcoli successivi conviene esprimere $Q_{\mu\nu}$ attraverso i 4-vettori mutuamente ortogonali P, N, q, K:

$$Q^{\mu\nu} = \gamma^\mu \frac{\frac{1}{2}\hat{P} + m}{s - m^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\frac{1}{2}\hat{P} + m}{u - m^2} \gamma^\mu - \frac{1}{t} (\gamma^\mu \hat{K} \gamma^\nu - \gamma^\nu \hat{K} \gamma^\mu).$$

I calcoli ulteriori si riducono a trasformazioni algebriche che si possono eseguire mediante le formule riportate al § 22.
Inoltre in $Q^{\mu\nu}$ si possono fare delle sostituzioni che non si rifletteranno sul risultato nella successiva formazione del prodotto $\bar{u}'Q^{\mu\nu}u$. Ad esempio, poiché

$$\bar{u}'(\hat{p} + \hat{p}')u = 2m\bar{u}'u,$$
$$\bar{u}'\gamma^5\hat{q}u = \bar{u}'(\gamma^5\hat{p} + \hat{p}'\gamma^5)u = 2m\bar{u}'\gamma^5 u,$$

allora in $Q^{\mu\nu}$ si possono sostituire i termini

$$\hat{p} + \hat{p}' \to 2m, \quad \gamma^5\hat{q} \to 2m\gamma^5. \tag{87,4}$$

Omettendo i dettagli dei calcoli, scriviamo il risultato[1]):

$$Q_0 = -ma_+, \qquad Q_1 = \frac{i}{2} a_+ \gamma^5 \hat{K},$$
$$Q_2 = -ma_+ \gamma^5, \qquad Q_3 = ma_+ + \frac{1}{2} a_- \hat{K}, \tag{87,5}$$

dove

$$a_\pm = \frac{1}{s-m^2} \pm \frac{1}{u-m^2}.$$

Per i successivi calcoli conviene applicare a $Q_{\mu\nu}$ lo stesso procedimento formale descritto al § 8 per la matrice densità di un fotone: consideriamo le quattro componenti del tensore (87,3) lungo le direzioni $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ come gli elementi di una matrice Q due × due, e scomponiamo quindi questa ultima secondo le matrici di Pauli. Analogamente alla formula (8,18) otteniamo

$$\mathrm{Q} = Q_0 \cdot 1 + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3). \tag{87,6}$$

Per quanto riguarda il tensore $\bar{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q^+_{\mu\nu} \gamma^0$ che compare nella (86,5), dalle formule (87,3) e (87,5) è facile convincersi (mediante le regole (66,2a)) che le sue componenti si ottengono dalle componenti di $Q_{\mu\nu}$ sostituendo le quantità Q_0, Q_1, . . . con $\bar{Q}_0$, $\bar{Q}_1$, . . ., dove

$$\bar{Q}_0 = Q_0, \ \bar{Q}_1 = -Q_1, \ \bar{Q}_2 = -Q_2, \ \bar{Q}_3 = Q_3, \tag{87,7}$$

e permutando simultaneamente gli indici $\mu\nu$[2]). In forma matriciale questo significa che

$$\bar{\mathrm{Q}} = \bar{Q}_0 \cdot 1 + \bar{\boldsymbol{Q}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{87,8}$$

Precisiamo ora il senso dei 4-vettori $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ rispetto alla polarizzazione dei fotoni. Per ciascun fotone le direzioni indipendenti di polarizzazione sono determinate dalle componenti trasversali (rispetto all'impulso del fotone $\boldsymbol{k}$) dei vettori tridimensionali $\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$[3]). È facile vedere che sia nel sistema del baricentro come nel sistema del laboratorio (sistema di quiete dell'elettrone iniziale) il vettore $\boldsymbol{P}$ giace nel piano $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$, e il vettore $\boldsymbol{N}$ è perpendicolare a questo piano.

---

[1]) L'espressione (87,3) con i valori (87,5) corrisponde alla forma (71,11-13), stabilita nel § 71 sulla base di considerazioni generali. Oltre alle uguaglianze $f_3 = f_6 = 0$, che discendono dall'invarianza T, qui risulta nulla ancora un'altra ampiezza invariante (f_2). Questa è una peculiarità dell'approssimazione della teoria delle perturbazioni qui considerata, e scomparirebbe nelle approssimazioni di ordine superiore.

[2]) Per la matrice $Q_{\mu\nu}$ nella forma originaria (86,4) avremmo semplicemente $\bar{Q}_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$. Questa proprietà, tuttavia, viene a mancare per trasformazioni che includono sostituzioni del tipo della (87,4) e simili.

[3]) Le componenti longitudinali di $\boldsymbol{e}$, invece, (come anche le componenti temporali dei 4-vettori e) si possono semplicemente ignorare: l'invarianza di gauge garantisce la loro inessenzialità.

Perciò la direzione $e^{(1)}$ si interpreta come polarizzazione perpendicolare al piano di diffusione, e la direzione $e^{(2)}$ come polarizzazione nel piano di diffusione. Occorre anche tenere presente che i parametri di Stokes ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono determinati rispetto agli assi xyz, che formano un sistema destrorso (con l'asse z diretto lungo la direzione $\boldsymbol{k}$). È facile vedere che per il fotone iniziale tale sistema è formato dai vettori $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}_\perp$, $\boldsymbol{k}$, e per il fotone finale dai vettori $\boldsymbol{N}$, $-\boldsymbol{P}'_\perp$, $\boldsymbol{k}'$ ($\boldsymbol{P}_\perp$, $\boldsymbol{P}'_\perp$ sono le componenti di $\boldsymbol{P}$, perpendicolari rispettivamente a $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}'$). Il cambiamento di segno di $e^{(2)}$ nella matrice densità del fotone (8,17) è equivalente al cambiamento di segno di ξ_1 e ξ_2. Perciò le matrici densità dei fotoni iniziale e finale, riferite ai versori quadridimensionali $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, saranno

$$\begin{aligned} \rho^{(\gamma)} &= \frac{1}{2}(1+\xi\sigma), \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3); \\ \rho^{(\gamma)\prime} &= \frac{1}{2}(1+\xi'\sigma), \quad \xi' = (-\xi'_1, \ -\xi'_2, \ \xi'_3). \end{aligned} \tag{87,9}$$

Ora la traccia tensoriale

$$\rho^{(\gamma)\prime}_{\lambda\mu} Q^{\mu\nu} \rho^{(\gamma)}_{\nu\rho} \widetilde{\overline{Q}}^{\rho\lambda}$$

si calcola come la traccia del prodotto di matrici (87,6-9) mediante la (33,5).

Come risultato otteniamo

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 = 8\pi^2 e^4 \operatorname{Tr} \{ & (\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \overline{Q}_0 + \rho^{(e)\prime} Q \rho^{(e)} \overline{Q}) + \\ & + (\xi + \xi')(\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \overline{Q} + \rho^{(e)\prime} Q \rho^{(e)} \overline{Q}_0) - \\ & - i(\xi - \xi')[\rho^{(e)\prime} Q \cdot \rho^{(e)} \overline{Q}] + \\ & + (\xi\xi')(\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \overline{Q}_0 - \rho^{(e)\prime} Q \rho^{(e)} \overline{Q}) + \\ & + \rho^{(e)\prime}(\xi' Q)\rho^{(e)}(\xi \overline{Q}) + \rho^{(e)\prime}(\xi Q)\rho^{(e)}(\xi' \overline{Q}) - \\ & - i[\xi\xi'](\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \overline{Q} - \rho^{(e)\prime} Q \rho^{(e)} \overline{Q}_0) \}. \end{aligned} \tag{87,10}$$

Diffusione su elettroni non polarizzati

Effettuiamo ora un calcolo completo della sezione d'urto di diffusione di fotoni polarizzati su un elettrone non polarizzato, sommata sulle polarizzazioni dell'elettrone finale. A questo scopo nella (87,10) occorre sostituire

$$\rho^{(e)} = \frac{1}{2}(\hat{p} + m), \quad \rho^{(e)\prime} = \frac{1}{2}(\hat{p}' + m)$$

e moltiplicare per 2 il risultato, che deve essere sostituito a $|M_{fi}|^2$ nella formula della sezione d'urto (65,22)

$$d\sigma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{dt\, d\varphi}{(s-m^2)^2} |M_{fi}|^2$$

(φ è l'azimut nel sistema del baricentro o nel sistema del laboratorio). Un certo numero di termini nella (87,10) si annulla identicamente (i termini della terza e della sesta riga e in parte della seconda e della quinta). Il calcolo degli altri termini porta al seguente risultato definitivo (nelle notazioni della (86,15)):

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, d\bar{\sigma} + 2r_e^2 \frac{dy\, d\varphi}{x^2} \Big\{ (\xi_3 + \xi_3') \Big[-\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big)^2 - \\ - \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big)\Big] + \xi_1\xi_1' \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2}\Big) + \xi_2\xi_2' \frac{1}{4}\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big) \times \\ \times \Big(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{y}\Big) + \xi_3\xi_3' \Big[\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big) + \frac{1}{2}\Big]\Big\}. \quad (87,11)$$

$d\bar{\sigma}$ è la sezione d'urto di diffusione di fotoni non polarizzati, data dalla formula (86,9); il fattore 1/2 compare in quanto nella (87,11) non c'è sommatoria sulle polarizzazioni del fotone finale.

Nel sistema del laboratorio la formula (87,11) assume la forma

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4}\Big(\frac{\omega'}{\omega}\Big)^2 do' \{F_0 + F_3(\xi_3 + \xi_3') + F_{11}\xi_1\xi_1' + \\ + F_{22}\xi_2\xi_2' + F_{33}\xi_3\xi_3'\}, \quad do' = \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \quad (87,12)$$

dove

$$F_0 = \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \operatorname{sen}^2\vartheta, \quad F_3 = \operatorname{sen}^2\vartheta,$$

$$F_{11} = 2\cos\vartheta, \quad F_{22} = \Big(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega}\Big)\cos\vartheta, \quad F_{33} = 1 + \cos^2\vartheta \quad (87,13)$$

(*U. Fano*, 1949). Notiamo che, sebbene l'espressione (87,12) non contenga in forma esplicita la dipendenza dall'azimut del piano di diffusone φ, questa dipendenza è presente implicitamente poiché i parametri ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono definiti rispetto agli assi xyz, che sono connessi al piano di diffusione. Ricordiamo che l'asse x per ambedue i fotoni è lo stesso ed è perpendicolare al piano di diffusione:

$$x \parallel [\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'],$$

mentre gli assi y giacciono nel piano di diffusione:

$$y \parallel [\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']], \quad y' \parallel [\boldsymbol{k}'[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']].$$

Sommando le sezioni d'urto che differiscono per il segno di ξ' (ponendo cioè $\xi' = 0$ e moltiplicando per 2 il risultato), noi otteniamo la sezione d'urto di diffusione totale (sommata sulle polarizzazioni del fotone finale) di un fotone polarizzato su un elettrone non polarizzato. Indicando questa sezione con $d\sigma(\xi)$, abbiamo

$$d\sigma(\xi) = \frac{1}{2} r_e^2 \Big(\frac{\omega'}{\omega}\Big)^2 F\, do', \quad (87,14)$$

dove

$$F = F_0 + \xi_3 F_3 = \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - (1 - \xi_3)\,\mathrm{sen}^2\vartheta. \qquad (87,15)$$

Si vede qui che la sezione d'urto di diffusione di fotoni polarizzati perpendicolarmente al piano di diffusione ($\xi_3 = 1$) è maggiore che per fotoni polarizzati nel piano di diffusione ($\xi_3 = -1$). La sezione d'urto non dipende invece dalla polarizzazione circolare. Essa non dipende nemmeno dal parametro ξ_1. Perciò la sezione d'urto di diffusione coincide con la sezione d'urto per fotoni non polarizzati, se manca la polarizzazione lineare rispetto agli assi x o y ($\xi_3 = 0$) oppure anche in presenza di polarizzazione rispetto a direzioni che formano con questi assi un angolo di 45°.

Proprietà analoghe possiede la sezione d'urto di diffusione di fotoni non polarizzati con rivelazione del fotone polarizzato. Questa sezione (che indicheremo con $d\sigma(\xi')$) si ottiene dalla formula (87,12) ponendo in essa $\xi = 0$:

$$d\sigma(\xi') = \frac{1}{4} r_e^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 F'\, do', \quad F' = F_0 + \xi_3' F_3. \qquad (87,16)$$

Dalla formula (87,12) si può trovare anche la polarizzazione del fotone secondario come tale; denoteremo i parametri di questa polarizzazione con $\xi^{(f)}$, differenza della polarizzazione rivelata ξ'. Secondo le regole esposte al § 66 le quantità $\xi_i^{(f)}$ sono uguali ai rapporti tra i coefficienti di ξ_i' e il termine che non contiene ξ':

$$\xi_1^{(f)} = \frac{F_{11}}{F}\xi_1, \quad \xi_2^{(f)} = \frac{F_{22}}{F}\xi_2, \quad \xi_3^{(f)} = \frac{F_3 + F_{33}\xi_3}{F} \qquad (87,17)$$

In particolare, nella diffusione di un fotone non polarizzato abbiamo

$$\xi_1^{(f)} = \xi_2^{(f)} = 0, \quad \xi_3^{(f)} = \frac{\mathrm{sen}^2\vartheta}{\omega/\omega' + \omega'/\omega - \mathrm{sen}^2\vartheta}. \qquad (87,18)$$

Qui $\xi_3^{(f)} > 0$, cioè il fotone secondario si polarizza perpendicolarmente al piano di diffusione. La polarizzazione circolare del fotone, invece, si ha soltanto se il fotone primario è polarizzato circolarmente: $\xi_2^{(f)} \neq 0$ solo per $\xi_2 \neq 0$.

Esaminiamo il caso in cui il fotone incidente è totalmente polarizzato linearmente ($\xi_2 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_3^2 = 1$), e troviamo la sezione d'urto di diffusione, in cui viene rivelata anche la polarizzazione lineare del fotone secondario. Esprimendo i parametri ξ_i e ξ_i' attraverso le componenti dei vettori polarizzazione dei fotoni e e e', otteniamo la seguente espressione per la sezione d'urto di diffusione:

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4\cos^2\Theta\right) do', \qquad (87,19)$$

dove Θ è l'angolo formato dalle direzioni dei fotoni incidente ed emergente [1]).

Come appare da questa formula la sezione d'urto si comporta in modo essenzialmente diverso a seconda che le polarizzazioni $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{e}'$ siano reciprocamente perpendicolari o giacciano sullo stesso piano. Distinguendo questi due casi con gli indici $\perp$ e $\|$, nel limite non relativistico ($\omega \ll m$, $\omega' \approx \omega$) abbiamo

$$d\sigma_\perp = 0, \quad d\sigma_\| = r_e^2 \cos^2\Theta \, do' \tag{87,20}$$

in accordo con le formule classiche. Nel caso opposto, ultrarelativistico, abbiamo $\omega \gg m$, $\omega' \approx m/(1 - \cos\vartheta)$. Qui occorre distinguere le regioni dei grandi e dei piccoli angoli (a seconda che sia grande o piccolo il rapporto ω/ω'):

$$d\sigma_\perp = d\sigma_\| = \frac{1}{4} r_e^2 \frac{\omega'}{\omega} do' = \frac{1}{4} r_e^2 \frac{m do'}{\omega(1-\cos\vartheta)} \quad \text{per } \vartheta^2 \gg \frac{m}{\omega};$$

$$d\sigma_\perp = 0, \quad d\sigma_\| = r_e^2 \cos^2\Theta \, do' \quad \text{per } \vartheta^2 \ll \frac{m}{\omega}. \tag{87,21}$$

Si vede allora che nella regione che corrisponde ad angoli molto piccoli la sezione d'urto di diffusione coincide con la sezione classica. L'uguaglianza $d\sigma_\perp \approx d\sigma_\|$ per angoli non troppo piccoli significa che in questa regione nel caso ultrarelativistico la diffusione della radiazione non è polarizzata; sottolineiamo, tuttavia, che questa conclusione è valida solo nel caso di un fotone incidente polarizzato linearmente: dalla (87,17) si vede che per un fotone polarizzato circolarmente nel caso ultrarelativistico $\xi_2^{(f)} \approx \cos\vartheta \cdot \xi_2$.

Diffusione su elettroni polarizzati

Nel caso di elettroni polarizzati il calcolo delle tracce nella formula (87,10) diventa molto complesso anche se non presenta difficoltà di principio. Noi riportiamo qui alcuni risultati finali di questi calcoli[2]).

Nel caso generale la sezione d'urto dipende sia dai parametri di polarizzazione dei fotoni iniziale e finale $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\xi}'$, sia dalle polarizzazio-

---

[1]) Di per se stessa la formula (87,19) si otterrebbe piú facilmente ponendo sin dall'inizio nell'ampiezza di diffusione (86,3) $\boldsymbol{e} = (0, e)$, $\boldsymbol{e}' = (0, e')$ ed eseguendo i successivi calcoli del quadrato dell'ampiezza in forma tridimensionale (cioè separando le componenti temporali e spaziali dei 4-vettori).

Mediando $\cos^2\Theta = (ee')^2$ sulle direzioni di e e e' (usando la (45,4a)) e raddoppiando la sezione d'urto (passaggio alla sommatoria su e'), si torna, ovviamente, alla (86,9).

[2]) Una tabella completa dei risultati si può trovare nei lavori originali: F. Lipps, H. A. Tolhoek, Physica 20. 85, 395 (1954). Vedere anche gli articoli: H. A. Tolhoek, Rev. Mod. Phys. 28, 277 (1956); W. H. McMaster, Rev. Mod. Phys. 33, 8 (1961).

ni degli elettroni iniziale e finale, che sono caratterizzate dai vettori ζ e ζ'. La dipendenza della sezione d'urto da ciascuno di questi parametri è lineare. La sezione d'urto ha la forma

$$d\sigma = \frac{1}{2} d\sigma(\xi, \xi') + \frac{r_e^2}{8} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 do' \{f\zeta\xi_2 + \\ + f'\zeta\xi_2' + g\zeta'\xi_2 + g'\zeta'\xi_2' + G_{ik}\zeta_i\zeta_k' + \ldots\}. \quad (87,22)$$

Qui $d\sigma(\xi, \xi')$ è la sezione d'urto (87,12). Sono stati scritti tutti i termini contenenti prodotti di due parametri di polarizzazione. Sono stati omessi i termini contenenti prodotti di tre o quattro parametri; questi termini sono inessenziali, se a noi interessano le correlazioni tra le polarizzazioni solo di due particelle: essi scompaiono quando i parametri di polarizzazione delle due altre particelle sono nulli. Riportiamo i valori di alcuni coefficienti nel sistema di riferimento del laboratorio:

$$f = -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)(k\cos\vartheta + k'),$$

$$f' = -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)(k + k'\cos\vartheta),$$

$$g = -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)\left[(k\cos\vartheta + k') - (1+\cos\vartheta) \times \right. \quad (87,23)$$

$$\left. \times \frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'+2m}(k-k')\right],$$

$$g' = -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)\left[(k + k'\cos\vartheta) - (1+\cos\vartheta) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'+2m}(k-k')\right].$$

Nella sezione d'urto (87,22) manca il termine della forma $G\zeta$; questo significa che la polarizzazione dell'elettrone non influisce sulla sezione d'urto di diffusione totale (sommata su ξ' e ζ') di fotoni non polarizzati. Manca anche il termine della forma $G'\zeta'$; questo significa che nella diffusione di fotoni non polarizzati l'elettrone di rinculo non si polarizza.

Noi vediamo anche che nei termini bilineari rispetto alle polarizzazioni dell'elettrone e del fotone, entrano solo i parametri ξ_2, ξ_2' corrispondenti alla polarizzazione circolare del fotone. I vettori polarizzazione degli elettroni ζ e ζ', invece, entrano sotto forma di prodotti scalari $f\zeta, \ldots$, contenenti solo le proiezioni di questi vettori nel piano di diffusione. Perciò, ad esempio, la sezione d'urto di diffusione di un fotone polarizzato su un elettrone polarizzato

$$d\sigma(\xi, \zeta) = d\sigma(\xi) + \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \xi_2 f\zeta \, do' \quad (87,24)$$

differisce da $d\sigma$ (ξ) solo per la presenza nel fotone della polarizzazione circolare e negli elettroni di una proiezione non nulla nel piano di diffusione dello spin medio. Per questa stessa ragione l'elettrone di rinculo si polarizza soltanto nel caso in cui il fotone è polarizzato circolarmente; il vettore della polarizzazione che l'elettrone acquista giace, invece, nel piano di diffusione:

$$\zeta^{(f)} = \frac{1}{F}\xi_2 \boldsymbol{g}. \tag{87,25}$$

Relazioni di simmetria

Per concludere, rileviamo che alcune proprietà qualitative degli effetti di polarizzazione nella diffusione di fotoni su elettroni seguono già dalle richieste generali di simmetria.

Il parametro di polarizzazione circolare ξ_2 è uno pseudoscalare (vedi § 8). Perciò, in virtú della richiesta di invarianza P i termini del tipo $\sim\xi_2$ (oppure $\sim\xi_2'$) potrebbero comparire nella sezione d'urto solo come prodotto di ξ_2 per un qualche pseudoscalare, composto con i vettori $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}'$ che abbiamo a disposizione[1]). Con due vettori polari è, però, impossibile formare uno pseudoscalare. Da qui discende che i termini indicati non possono essere presenti nella sezione d'urto.

I parametri di polarizzazione lineare ξ_1 e ξ_3 sono legati alle componenti del tensore simmetrico bidimensionale (nel piano perpendicolare a $\boldsymbol{k}$)

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\rho^{(\gamma)}_{\alpha\beta} + \rho^{(\gamma)}_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 \\ \xi_1 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Nel caso considerato uno degli assi di polarizzazione è stato scelto lungo il vettore $\boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']$, e l'altro giace nel piano $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ (diretto lungo il vettore $[\boldsymbol{k}\boldsymbol{\nu}]$ o $[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\nu}]$ per l'uno o per l'altro dei fotoni). I termini $\sim\xi_1$ potrebbero apparire nella sezione d'urto solo come prodotti $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha\,[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\nu}]_\beta$ (oppure $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha k'_\beta$) e simili. Ma poiché $\boldsymbol{\nu}$ è un vettore assiale e $\boldsymbol{k}$ un vettore polare, mentre $S_{\alpha\beta}$ è un vero tensore, tali prodotti non sono invarianti rispetto alla riflessione spaziale. Quindi, nella sezione d'urto non ci possono esser nemmeno i termini $\sim\xi_1$ (oppure $\sim\xi_1'$). Invece, i termini $\sim\xi_3$ (o $\sim\xi_3'$) compaiono sotto forma di prodotti del tipo $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta$ e non sono vietati da considerazioni di simmetria.

Nella sezione d'urto i termini proporzionali alla polarizzazione elettronica ζ non sono vietati per parità: tali termini potrebbero essere formati come prodotti di due vettori assiali: $\zeta\boldsymbol{\nu}$. Tuttavia,

---

[1]) Noi consideriamo un processo nel sistema del laboratorio, dove $\boldsymbol{p} = 0$, $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$. È evidente che le conseguenze delle richieste di simmetria che ci interessano (presenza o assenza nella sezione d'urto di questi o di quei termini) non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento.

questi termini non devono comparire nella prima approssimazione non nulla della teoria delle perturbazioni in conseguenza del fatto che in questa approssimazione la matrice di diffusione è hermitiana (§ 72).

In virtú di questa proprietà, il quadrato dell'ampiezza di diffusione (e quindi anche la sezione d'urto) non cambia per lo scambio degli stati iniziale e finale. Allo stesso tempo la sezione d'urto deve essere invariante rispetto all'inversione temporale: scambio degli stati iniziale e finale con simultaneo cambiamento di segno dei vettori impulso e momento angolare di tutte le particelle (i parametri di Stokes ξ_1, ξ_2, ξ_3 per questa trasformazione non cambiano; vedi § 8). Combinando queste due richieste concludiamo che nell'approssimazione considerata la sezione d'urto non deve cambiare per il cambiamento simultaneo del segno di tutti gli impulsi e momenti angolari senza lo scambio degli stati iniziale e finale, cioè per la trasformazione

$$\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}' \to -\boldsymbol{k}',\ \boldsymbol{\zeta} \to -\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\zeta}' \to -\boldsymbol{\zeta}' \qquad (87,26)$$

senza variazione dei parametri $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}'$.

La trasformazione (87,26) cambia il segno del prodotto $\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\nu}$, e quindi nemmeno tali termini possono figurare nella sezione d'urto. Sottolineiamo, tuttavia, che questo divieto non è una conseguenza di severe richieste di simmetria e perciò può essere violato nelle approssimazioni successive della teoria delle perturbazioni.

Tra i termini di correlazione doppia tra le polarizzazioni di fotoni tra loro, la simmetria relativa alla parità vieta solo i termini della forma $\xi_1\xi_3$ e $\xi_2\xi_3$, mentre per quanto riguarda la correlazione tra fotoni ed elettroni nessun termine è vietato. Tuttavia, tutti i termini del tipo $\xi_1\xi_2$, $\xi_1\zeta$, $\xi_3\zeta$ sono vietati al primo ordine dalla richiesta di invarianza rispetto alla trasformazione (87,26). Ad esempio, i termini del tipo $\xi_1\xi_2'$ e $\xi_1\zeta$ si potrebbero comporre (dal punto di vista della conservazione della parità) a formare degli scalari: $\xi_2' S_{\alpha\beta} k_\alpha' \nu_\beta$ e $(S_{\alpha\beta} k_\alpha' \nu_\beta)(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{k})$; queste combinazioni, tuttavia, cambiano segno per la trasformazione (87,26).

Termini correlativi permessi, del tipo $\xi_2\zeta$, possono essere formati come prodotti della forma $\xi_2(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{k})$. I vettori polarizzazione degli elettroni entrano in questi termini solo sotto forma di proiezioni nel piano di diffusione.

Infine, una serie di relazioni tra i coefficienti nei termini permessi discende dalle richieste connesse alla universalità di crossing. I canali di reazione, che differiscono per lo scambio dei fotoni iniziale e finale, corrispondono allo stesso processo: diffusione di un fotone su un elettrone. Perciò il quadrato del modulo dell'ampiezza, e quindi anche la sezione d'urto di diffusione, devono essere invarianti rispetto alla trasformazione, che esprime il passaggio da uno dei

canali ad un altro

$$k \longleftrightarrow -k', \quad e \longleftrightarrow e'^*$$

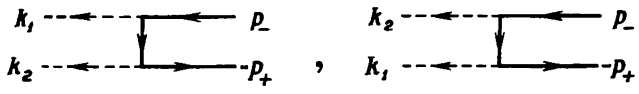
per impulsi e polarizzazione invariati degli elettroni. In forma tridimensionale questa trasformazione equivale alla sostituzione

$$\begin{aligned} &\omega \longleftrightarrow -\omega', \quad \boldsymbol{k} \longleftrightarrow -\boldsymbol{k}', \\ &\xi_1 \longleftrightarrow \xi_1', \quad \xi_2 \longleftrightarrow -\xi_2', \quad \xi_3 \longleftrightarrow \xi_3'. \end{aligned} \tag{87,27}$$

Il cambiamento di segno del parametro ξ_2 è evidente dall'espressione $\xi_2 = i[ee^*]\boldsymbol{n}$, nella quale il vettore $[ee^*]$ cambia segno nella sostituzione $e \leftrightarrow e^*$, e il vettore $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$ per la sostituzione $\boldsymbol{k} \leftrightarrow -\boldsymbol{k}$, $\omega \leftrightarrow -\omega$ non cambia. La trasformazione (87,27), non interessando gli impulsi degli elettroni, lascia inalterato il sistema del laboratorio. Perciò la sezione d'urto (87,22) non deve cambiare la sua forma per questa trasformazione; le formule (87,12), (87,22-23) soddisfano effettivamente questa condizione.

§ 88. Annichilazione in due fotoni di una coppia elettronica

L'annichilazione di un elettrone e di un positrone (4-impulsi p_- e p_+) accompagnata dalla produzione di due fotoni (k_1 e k_2) è rappresentata dai due diagrammi



(88,1)

Essi differiscono dai diagrammi di diffusione di un fotone su un elettrone per la sostituzione

$$p \to p_-, \; p' \to -p_+, \; k \to -k_1, \; k' \to k_2. \tag{88,2}$$

I due processi sono due canali incrociati di una stessa reazione (generalizzata). Dopo la sostituzione (88,2) gli invarianti cinematici (86,2) assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} s &= (p_- - k_1)^2, \\ t &= (p_- + p_+)^2 = (k_1 + k_2)^2, \\ u &= (p_- - k_2)^2. \end{aligned} \tag{88,3}$$

Se la diffusione del fotone era il canale s, l'annichilazione è il canale t.

Il quadrato $|M_{fi}|^2$ per l'annichilazione (mediato sulle polarizzazioni degli elettroni e sommato sulle polarizzazioni dei fotoni), espresso attraverso gli invarianti s, u, coincide con l'analoga quantità per la diffusione, cambiando unicamente il significato degli inva-

rianti[1]). Nella formula per la sezione d'urto (65,23), nei moltiplicatori di $|M_{fi}|^2$ occorre fare la sostituzione $s \leftrightarrow t$, e per la quantità I, secondo la (65,15a), abbiamo ora $I^2 = 1/4\, t\,(t - 4m^2)$. Effettuando le corrispondenti modifiche nella formula (86,6) otteniamo come risultato la sezione d'urto di annichilazione

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2\, ds}{t\,(t-4m^2)} \left\{ \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{s-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{s-m^2} \right) \right\}. \qquad (88,4)$$

Il dominio fisico del canale di annichilazione è il dominio II nella fig. 9. Per un dato t (cioè per una data energia nel sistema del baricentro) l'intervallo di variazione di s è determinato dall'equazione $su = m^4$, che insieme con la relazione $s + t + u = 2m^2$, dà

$$-\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t\,(t-4m^2)} \leqslant s - m^2 \leqslant -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t\,(t-4m^2)}\,. \qquad (88,5)$$

L'integrazione dell'espressione (88,4) è elementare; il risultato deve essere ancora diviso per 2 per tenere conto della identità delle due particelle finali (due fotoni). In tal modo, otteniamo

$$\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{\tau^2\,(\tau-4)} \left[(\tau^2 + 4\tau - 8) \ln \frac{\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau-4}}{\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau-4}} - \right.$$
$$\left. - (\tau + 4)\sqrt{\tau\,(\tau-4)} \right], \qquad (88,6)$$

dove $\tau = t/m^2$ (*P. A. M. Dirac*, 1930).

Da qui, nel limite non relativistico ($\tau \to 4$), troviamo

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{\sqrt{\tau-4}} \qquad (88,7)$$

Nel caso ultrarelativistico ($\tau \to \infty$) si ha

$$\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{\tau} (\ln \tau - 1). \qquad (88,8)$$

Nel sistema del laboratorio, dove una delle particelle (per esempio, l'elettrone) prima dell'urto si trovava in quiete, l'invariante τ è

$$\tau = 2\,(1 + \gamma), \quad \gamma = \frac{\varepsilon_+}{m}. \qquad (88,9)$$

Le formule (88,6-8) danno la dipendenza della sezione d'urto totale dall'energia del positrone incidente:

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{\gamma+1} \left[\frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right) - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right]. \qquad (88,10)$$

[1]) Inoltre si tiene conto del fatto che fotoni ed elettroni hanno lo stesso numero di polarizzazioni indipendenti (due) e perciò è inessenziale rispetto a quali polarizzazioni si esegua in $|M_{fi}|^2$ la media e rispetto a quali la sommatoria.

In particolare, nel limite non relativistico[1])

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{v_+}, \quad \text{(non rel.)} \tag{88,11}$$

dove v_+ è la velocità del positrone.

Nel sistema del baricentro l'elettrone, il positrone e i due fotoni hanno la stessa energia $\varepsilon = \omega$. Gli invarianti sono

$$m^2 - s = 2\varepsilon(\varepsilon - |\boldsymbol{p}|\cos\theta), \quad m^2 - u = 2\varepsilon(\varepsilon + |\boldsymbol{p}|\cos\theta), \quad t = 4\varepsilon^2, \tag{88,12}$$

dove θ è l'angolo tra gli impulsi dell'elettrone e di uno dei fotoni. Sostituendo nella (88,4) otteniamo la distribuzione angolare dei fotoni di annichilazione

$$d\sigma = \frac{r_e^2 m^2}{4\varepsilon|\boldsymbol{p}|}\left[\frac{\varepsilon^2 + p^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)}{\varepsilon^2 - p^2\cos^2\theta} - \frac{2p^4\operatorname{sen}^4\theta}{(\varepsilon^2 - p^2\cos^2\theta)^2}\right] do. \tag{88,13}$$

Nel caso ultrarelativistico questa distribuzione ha dei massimi simmetrici nelle direzioni $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Nelle vicinanze del punto $\theta = 0$ abbiamo

$$d\sigma \approx \frac{r_e^2 m^2 do}{2\varepsilon^2(\theta^2 + m^2/\varepsilon^2)}. \quad \text{(ultrarel.)} \tag{88,14}$$

La sezione d'urto totale si ottiene dalla (88,6):

$$\sigma = \pi r_e^2 \frac{1-v^2}{4v}\left[\frac{3-v^4}{v}\ln\frac{1+v}{1-v} - 2(2-v^2)\right], \tag{88,15}$$

dove $v = |\boldsymbol{p}|/\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}/\varepsilon$ è la velocità delle particelle collidenti.

Non esamineremo qui dettagliatamente gli effetti di polarizzazione nell'annichilazione[2]). Ci soffermeremo solo su alcune caratteristiche qualitative di questi effetti nei casi limite di grandi e piccole velocità v delle particelle collidenti. Esamineremo il processo nel sistema di riferimento del baricentro.

Nel limite $v \to 0$ un contributo non nullo alla sezione d'urto è dato solo dallo stato $l = 0$ (con l intendiamo al solito il momento angolare orbitale del moto relativo). Ma lo stato S del sistema « elettrone + positrone » ha parità negativa (vedi problema al § 27). Negli stati dispari di un sistema di due fotoni le loro polarizzazioni sono mutuamente ortogonali (§ 9).

Se l'elettrone e il positrone sono polarizzati, sempre per il caso non relativistico si può affermare che la loro annichilazione è possibile

---

[1]) Questa formula, tuttavia, diventa inapplicabile quando $v_+ \lesssim \alpha$, e non è possibile trascurare l'interazione coulombiana tra le particelle componenti la coppia (cfr. fine § 92).

[2]) Cfr. L. A. Page, Phys. Rev. 106, 394 (1957); W. H. McMaster, Rev. Mod. Phys. 33, 8 (1961).

solo per spin antiparalleli. Infatti, l'annichilazione avviene nello stato S e quindi il momento totale del sistema coincide con lo spin totale delle particelle: 1 per spin paralleli e 0 per spin antiparalleli. Un sistema di due fotoni non ha stati a spin totale 1 (§ 9).

Nel limite ultrarelativistico ($v \to 1$) l'annichilazione di un elettrone e di un positrone (dotati di elicità) polarizzati longitudinalmente è possibile solo se le elicità hanno segno opposto[1]). In questo limite le particelle dotate di elicità si comportano come il neutrino (vedi fine § 81), e quindi l'elettrone e il positrone che subiscono l'annichilazione devono essere analoghi al neutrino e all'antineutrino; da qui discende l'affermazione fatta.

L'annichilazione di un elettrone e di un positrone a elicità dello stesso segno può avvenire nel caso ultrarelativistico solo tenendo conto dei termini contenenti m. Come ordine di grandezza l'ampiezza di questo processo differisce del fattore m/ε dall'ampiezza di annichilazione di una coppia con spin paralleli; la sezione d'urto differisce rispettivamente del fattore $(m/\varepsilon)^2$.

PROBLEMA

Trovare la sezione d'urto di produzione di una coppia elettrone-positrone nell'urto di due fotoni (*G. Breit, J. A. Wheeler*, 1934).

Soluzione. Questo processo è l'inverso dell'annichilazione a due fotoni di una coppia elettrone-positrone. I quadrati dell'ampiezza dei due processi sono uguali e il loro legame con la sezione d'urto differisce solo per il fatto che ora $I^2 = (k_1k_2)^2 = t^2/4$. Perciò

$$d\sigma_{\text{prod}} = d\sigma_{\text{an}} \frac{t-4m^2}{t}.$$

Nel sistema del baricentro ($t = 4\varepsilon^2 = 4\omega^2$) abbiamo

$$d\sigma_{\text{prod}} = v^2\, d\sigma_{\text{an}},$$

dove v è la velocità delle particelle componenti la coppia. Nell'integrazione per trovare la sezione d'urto totale occorre tenere presente la non identità delle due particelle finali (elettrone e positrone) e quindi non si deve dividere il risultato per 2, come nel caso dell'annichilazione. Perciò (nel sistema del baricentro) abbiamo

$$\sigma_{\text{prod}} = 2v^2\sigma_{\text{an}} = \frac{\pi r_e^2}{2}(1-v^2)\left\{(3-v^4)\ln\frac{1+v}{1-v} - 2v(2-v^2)\right\}. \qquad (1)$$

In un sistema di riferimento generico K, nel quale i due fotoni k_1 e k_2 volano uno incontro all'altro, (dall'invarianza di k_1k_2) abbiamo

$$\omega_1\omega_2 = \omega^2,$$

dove ω è l'energia dei due fotoni nel sistema del baricentro. Poiché nel sistema del baricentro le energie dei fotoni e delle particelle componenti la coppia coincidono, allora $\omega = \varepsilon = m/\sqrt{1-v^2}$. Perciò per realizzare il passaggio al

---

[1]) Poiché allo stesso tempo sono opposte (nel sistema del baricentro) le direzioni degli impulsi delle particelle, a elicità di segno opposto corrispondono spin paralleli.

sistema K occorre porre nella (1)

$$v=\sqrt{1-\frac{m^2}{\omega_1\omega_2}}\,.$$

§ 89. *Annichilazione del positronio*

In virtú della conservazione dell'impulso l'annichilazione di un elettrone e di un positrone nel positronio deve essere accompagnata dall'emissione di almeno due fotoni. Questo decadimento, tuttavia, è possibile (nello stato fondamentale) solo per il parapositronio. Nel § 9 è stato mostrato che il momento angolare totale di un sistema di due fotoni non può essere uguale a 1. Perciò l'ortopositronio, trovandosi nello stato $^3S_1$ non può decadere in due fotoni. Inoltre, poiché nello stato $^3S_1$ il positronio costituisce un sistema di parità di carica dispari (vedi problema al § 27), in base al teorema di Furry (§ 80) è impossibile un suo decadimento anche in un qualsiasi numero pari di fotoni. Invece nello stato $^1S_0$ il positronio ha parità di carica pari e quindi è vietato il decadimento del parapositronio in un qualsiasi numero dispari di fotoni.

In tal modo, il processo fondamentale che determina la vita media è l'annichilazione in due fotoni per il parapositronio e l'annichilazione in tre fotoni per l'ortopositronio (*I. Ja. Pomerančuk*, 1948). La probabilità di decadimento può essere connessa con la sezione d'urto di annichilazione di una coppia libera.

Gli impulsi dell'elettrone e del positrone nel positronio sono proporzionali a $\sim me^2/\hbar$, cioè sono piccoli rispetto a mc. Perciò nel calcolo della probabilità di annichilazione si può considerare il caso limite in cui le due particelle sono in quiete nell'origine delle coordinate. Sia $\bar{\sigma}_{2\gamma}$ la sezione d'urto di annichilazione a due fotoni di una coppia libera, mediata sulle direzioni degli spin di ambedue le particelle. Nel limite non relativistico, secondo la (88,11)[1], abbiamo

$$\sigma_{2\gamma}=\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{c}{v}, \tag{89,1}$$

dove v è la velocità relativa delle particelle. La probabilità di annichilazione $\bar{w}_{2\gamma}$ si ottiene moltiplicando $\bar{\sigma}_{2\gamma}$ per la densità di flusso, uguale a $v\,|\,\psi(0)\,|^2$. Qui $\psi(r)$ è la funzione d'onda, normalizzata a 1, dello stato fondamentale del positronio

$$\psi(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}},\quad a=\frac{2\hbar^2}{me^2} \tag{89,2}$$

(il raggio di Bohr a del positronio è due volte maggiore del raggio dell'atomo di idrogeno, poiché la massa ridotta è due volte minore).

[1]) Le formule (89,1-7) sono scritte in unità ordinarie.

Questa probabilità, tuttavia, corrisponde allo stato iniziale mediato sulle direzioni degli spin. Nel positronio, invece, solo uno dei quattro stati di spin possibili per un sistema di due particelle (a spin totale 0) è atto all'annichilazione a due fotoni. Perciò la probabilità media di decadimento $w_{2\gamma}$ è connessa alla probabilità di decadimento del parapositronio w_0 dalla relazione $\overline{w}_{2\gamma} = w_0/4$. In tal modo

$$w_0 = 4\,|\,\psi(0)\,|^2\,(v\overline{\sigma}_{2\gamma})_{v\to 0}. \tag{89,3}$$

Sostituendo qui i valori presi dalle (89,1-2), per la vita media del parapositronio otteniamo

$$\tau_0 = \frac{2\hbar}{mc^2\alpha^5} = 1{,}23\cdot 10^{-10}\ \text{s}. \tag{89,4}$$

Notiamo che la larghezza del livello $\Gamma_0 = \hbar/\tau_0$ è piccola rispetto alla sua energia

$$|\,E_{\text{fond}}\,| = \frac{me^4}{4\hbar^2} = mc^2\,\frac{\alpha^2}{4}.$$

Proprio questo fatto permette di considerare il positronio come un sistema quasi-stazionario.

Analogamente si trova che la probabilità di decadimento dell'ortopositronio è connessa alla sezione d'urto, mediata rispetto agli spin, di annichilazione in tre fotoni di una coppia libera dalla relazione

$$w_1 = \frac{4}{3}\,\overline{w}_{3\gamma} = \frac{4}{3}\,|\,\psi(0)\,|^2\,(v\overline{\sigma}_{3\gamma})_{v\to 0} \tag{89,5}$$

(3/4 è il peso statistico dello stato a spin 1). Anticipiamo qui la relazione

$$\overline{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4\,(\pi^2-9)\,c}{3v}\,\alpha\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \tag{89,6}$$

Quindi la vita media dell'ortopositronio vale

$$\tau_1 = \frac{9\pi}{2\,(\pi^2-9)}\,\frac{\hbar}{mc^2\alpha^6} = 1{,}4\cdot 10^{-7}\ \text{s}. \tag{89,7}$$

La disuguaglianza $\Gamma_1 \ll |\,E_{\text{fond}}\,|$ è in questo caso osservata, ovviamente, in misura ancora maggiore che per il parapositronio.

Eseguiamo ora il calcolo della sezione d'urto di annichilazione a tre fotoni di una coppia libera (*A. Ore, J. L. Powell*, 1949)[1].

Secondo la (65,18) la sezione d'urto del processo considerato si esprime nel sistema del baricentro attraverso il quadrato dell'am-

---

[1]) Un altro canale di questa stessa reazione è il doppio effetto Compton: $e + \gamma \to e + \gamma + \gamma$ (per la sezione d'urto di questo processo vedere F. Mandl, T. H. R. Squirme, Proc. Roy. Soc. A 215, 497 (1952)).

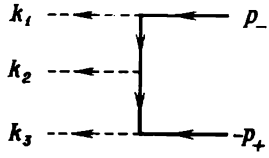
piezza mediante la formula

$$d\sigma_{3\gamma} = \frac{(2\pi)^4 \, |M_{fi}|^2}{4I} \, \delta(k_1 + k_2 + k_3) \, \delta \times$$

$$\times (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m) \frac{d^3k_1 \, d^3k_2 \, d^3k_3}{(2\pi)^9 \, 2\omega_1 \cdot 2\omega_2 \cdot 2\omega_3}, \qquad (89,8)$$

dove, secondo la (65,16), $I = 2m \cdot \frac{m}{2} v = m^2 v$, e v è la velocità relativa del positrone e dell'elettrone (che noi supponiamo piccola); $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ e ω_1, ω_2, ω_3 sono i vettori d'onda e le frequenze dei fotoni emessi; le funzioni δ esprimono le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso. In virtú di queste leggi le tre frequenze ω_1, ω_2, ω_3 devono potersi rappresentare come le lunghezze dei lati di un triangolo di perimetro $2m$. In altre parole, le quantità $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ e gli angoli che essi formano tra loro sono determinati dall'assegnazione di due frequenze.

All'annichilazione a tre fotoni corrisponde il diagramma



e ancora cinque diagrammi che si ottengono cambiando di posto i fotoni k_1, k_2, k_3. Scriviamo l'ampiezza corrispondente nella forma

$$M_{fi} = (4\pi)^{3/2} \, e_\lambda^{(3)*} e_\mu^{(2)*} e_\nu^{(1)*} \bar{u}(-p_+) \, Q^{\lambda\mu\nu} u(p_-), \qquad (89,9)$$

dove

$$Q^{\lambda\mu\nu} \sum_{\text{perm}} \gamma^\lambda G(k_3 - p_+) \, \gamma^\mu G(p_- - k_1) \, \gamma^\nu, \qquad (89,10)$$

e la somma viene eseguita rispetto a tutte le permutazioni degli indici dei fotoni 1, 2, 3 accompagnate da permutazioni analoghe dei corrispondenti indici tensoriali $\lambda\mu\nu$. Il quadrato del modulo dell'ampiezza, mediato sulle polarizzazioni dell'elettrone e del positrone e sommato sulle polarizzazioni dei fotoni, è

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = (4\pi)^3 \, \mathrm{Tr} \{\rho_+ Q^{\lambda\mu\nu} \rho_- \bar{Q}_{\lambda\mu\nu}\}, \qquad (89,11)$$

dove

$$\rho_- = \frac{1}{2}(\hat{p}_- + m), \quad \rho_+ = \frac{1}{2}(\hat{p}_+ - m).$$

Le matrici $\bar{Q}^{\lambda\mu\nu}$ differiscono dalle matrici $Q^{\lambda\mu\nu}$ per l'inversione dell'ordine dei fattori in ciascun termine della somma. Noi siamo interessati al caso limite di velocità piccole dell'elettrone e del positrone,

e possiamo quindi porre $p_- = p_+ = (m, 0)$. Allora per le funzioni elettroniche di Green abbiamo

$$G(p_- - k_1) = \frac{\hat{p} - \hat{k}_1 + m}{(p - k_1)^2 - m^2} \approx \frac{-k_1 + m(\gamma^0 + 1)}{-2m\omega_1} \quad \text{ecc.},$$

mentre le matrici densità si riducono all'espressione

$$\rho_\mp = \frac{m}{2}(\gamma^0 \pm 1).$$

Moltiplicando i valori nella (89,11) tra di loro compare un gran numero di termini. Tuttavia, il numero dei termini da calcolare può essere sensibilmente diminuito se si utilizzano appieno le proprietà di simmetria rispetto alla permutazione dei fotoni. Ad esempio, basta moltiplicare sei termini in $Q^{\lambda\mu\nu}$ (89,10) per un solo termine (qualsiasi) in $\bar{Q}_{\lambda\mu\nu}$. Nelle sei tracce, che in tal modo restano, si possono sempre evidenziare alcune parti, che si trasformano l'una nell'altra per le diverse permutazioni dei fotoni. I prodotti dei 4-vettori p, k_1, k_2, k_3 che compaiono sviluppando le tracce, si esprimono attraverso le frequenze ω_1, ω_2, ω_3. Poiché $p = (m, 0)$, allora $pk_1 = m\omega_1, \ldots$ Invece i prodotti $k_1k_2, \ldots$ si determinano dall'equazione di conservazione del 4-impulso: $2p = k_1 + k_2 + k_3$; cosí, riscrivendo questa uguaglianza nella forma $2p - k_3 = k_1 + k_2$ ed elevandola al quadrato otteniamo

$$\kappa_1\kappa_2 = 2m(m - \omega_3), \ldots \tag{89,12}$$

Al termine di un calcolo abbastanza lungo si ottiene

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = (4\pi)^3 e^6 \cdot 16 \left[\left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2\right]$$

Sostituendo questa espressione nella (89,8), otteniamo la sezione d'urto differenziale di annichilazione a tre fotoni

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{e^6}{\pi^2 m^2 v}\left[\left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2\right] \times$$
$$\times\, \delta(k_1 + k_2 + k_3)\, \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m) \frac{d^3k_1\, d^3k_2\, d^3k_3}{\omega_1\omega_2\omega_3}. \tag{89,13}$$

Qui dobbiamo ancora eliminare le funzioni δ. La prima di esse viene eliminata con l'integrazione in d^3k_3; sostituiamo quindi tutti gli altri differenziali

$$d^3k_1\, d^3k_2 \to 4\pi\omega_1^2\, d\omega_1 \cdot 2\pi\omega_2^2 d(\cos\theta_{12})\, d\omega_2,$$

dove θ_{12} è l'angolo tra $\boldsymbol{k}_1$ e $\boldsymbol{k}_2$; è sottinteso che è già stata effettuata l'integrazione rispetto alle direzioni di $\boldsymbol{k}_1$ e all'azimut di $\boldsymbol{k}_2$ rispetto a $\boldsymbol{k}_1$. Derivando l'uguaglianza

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\theta_{12}},$$

troviamo

$$d\cos\theta_{12} = \frac{\omega_3}{\omega_1\omega_2}\, d\omega_3.$$

Integrando in $d\omega_3$ eliminiamo la seconda funzione δ. Come risultato otteniamo la sezione d'urto per l'annichilazione con produzione di fotoni di energia fissata nella forma

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{1}{6}\,\frac{8e^6}{vm^2}\left\{\left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2\right\} d\omega_1\, d\omega_2 \qquad (89,14)$$

(avendo presente la successiva integrazione rispetto alle frequenze, qui è stato introdotto il fattore 1/6, che tiene conto della identità dei fotoni; cfr. nota a pag. 300.).

Ciascuna delle frequenze ω_1, ω_2, ω_3 può assumere i valori tra 0 e m (il valore m è assunto da due frequenze quando la terza è nulla). Per un dato ω_1 la frequenza ω_2 varia tra $m - \omega_1$ e m. Integrando la (89,14) in $d\omega_2$ tra questi limiti, otteniamo la distribuzione spettrale dei fotoni di decadimento

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{8e^6}{3vm^3}\, F(\omega_1)\, d\omega_1,$$

$$F(\omega_1) = \frac{\omega_1(m-\omega_1)}{(2m-\omega_1)^2} + \frac{2m-\omega_1}{\omega_1} + \left[\frac{2m(m-\omega_1)}{\omega_1^2} - \frac{2m(m-\omega_1)^2}{(2m-\omega_1)^3}\right]\ln\frac{m-\omega_1}{m}.$$

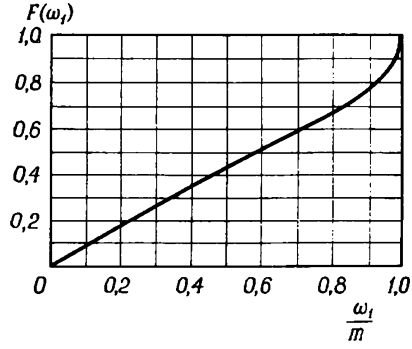


Fig. 16

La funzione $F(\omega_1)$ cresce monotonamente da zero per $\omega_1 = 0$ fino a 1 per $\omega_1 = m$; nella fig. 16 è riportato il grafico relativo.

La sezione d'urto totale di annichilazione si ottiene integrando la (89,14) rispetto alle due frequenze:

$$\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4e^6}{3vm^2}\, 3 \int_0^m \int_{m-\omega_1}^m \frac{(\omega_1+\omega_2-m)^2}{\omega_1^2\omega_2^2}\, d\omega_1\, d\omega_2.$$

L'integrale che compare qui è uguale a $(\pi^2 - 9)/3$ e si arriva quindi alla formula già riportata (89,6).

§ 90. *Radiazione di frenamento di un elettrone diffuso su un nucleo. Caso non relativistico*

Il presente e alcuni dei paragrafi seguenti sono dedicati all'importante fenomeno della *radiazione di frenamento*: radiazione che accompagna l'urto di particelle. Noi inizieremo dall'urto non relati-

vistico di un elettrone su un nucleo. Supporremo che il nucleo rimanga fisso, cioè studieremo la radiazione associata alla diffusione di un elettrone nel campo coulombiano di un centro fisso (*A. Sommerfeld*, 1931).

Prendiamo come punto di partenza la formula (45,5) per la probabilità di radiazione di dipolo

$$dw = \frac{\omega^3}{2\pi} | e^* \boldsymbol{d}_{fi} |^2 do_k. \tag{90,1}$$

Nel caso considerato gli stati iniziale e finale dell'elettrone appartengono allo spettro continuo, e la frequenza del fotone è

$$\omega = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{p}'^2), \tag{90,2}$$

dove $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{p}' = m\boldsymbol{v}'$ sono gli impulsi iniziale e finale dell'elettrone. Se le funzioni d'onda iniziale e finale dell'elettrone sono normalizzate con « una particella nell'unità di volume $V = 1$ », allora l'espressione (90,1), moltiplicata per $d^3p'/(2\pi)^3$ e divisa per la densità del flusso incidente $v/V = v$, darà la sezione d'urto $d\sigma_{kp'}$ di emissione del fotone $\boldsymbol{k}$ nell'angolo solido do_k con diffusione dell'elettrone nell'intervallo di stati d^3p'. Sostituendo all'elemento di matrice del momento di dipolo $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{r}$ l'elemento di matrice dell'impulso secondo la relazione

$$\boldsymbol{d}_{fi} = -\frac{1}{i\omega} \frac{e}{m} \boldsymbol{p}_{fi},$$

scriviamo l'espressione per la sezione d'urto nella forma[1])

$$d\sigma_{kp'} = \frac{\omega e^2}{(2\pi)^4 mp} | e^* \boldsymbol{p}_{fi} |^2 do_k \, d^3p', \tag{90,3}$$

dove

$$\boldsymbol{p}_{fi} = \int \psi_f^* \mathbf{p} \psi_i \, d^3x = -i \int \psi_f^* \nabla \psi_i \, d^3x.$$

Come funzioni ψ_i e ψ_f è necessario usare le funzioni d'onda esatte in un campo coulombiano attrattivo, scegliendo quelle che asintoticamente contengono un'onda piana e un'onda sferica; in ψ_f l'onda sferica deve essere convergente e in ψ_i divergente (vedi III, § 136). Queste funzioni hanno la forma

$$\begin{aligned} \psi_i &= A_i e^{i\boldsymbol{pr}} F(i\nu, 1, i(pr - \boldsymbol{pr})), \quad \nu = \frac{Ze^2 m}{p}; \\ \psi_f &= A_f e^{i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}} F(-i\nu', 1, -i(p'r + \boldsymbol{p}'\boldsymbol{r})), \quad \nu' = \frac{Ze^2 m}{p'} \end{aligned} \tag{90,4}$$

con i coefficienti di normalizzazione

$$A_i = e^{\pi\nu/2} \Gamma(1 - i\nu), \quad A_f = e^{\pi\nu'/2} \Gamma(1 + i\nu'). \tag{90,5}$$

---

[1]) In questo paragrafo si usano le notazioni $p = | \boldsymbol{p} |$, $p' = | \boldsymbol{p}' |$.

Notando che

$$\nabla F(i\nu, 1, i(pr-\boldsymbol{pr})) = i\left(p\frac{\boldsymbol{r}}{r}-\boldsymbol{p}\right)F' = -\frac{p}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_\nu,$$

scriviamo il gradiente $\nabla\psi_i$ nella forma

$$\nabla\psi_i = i\boldsymbol{p}\psi_i - A_i e^{ipr}\frac{p}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_\nu.$$

Moltiplicando per ψ_f^* e integrando, il primo termine si annulla in virtú dell'ortogonalità delle funzioni ψ_i e ψ_f. Perciò per l'elemento di matrice $\boldsymbol{p}_{fi}$ abbiamo

$$\boldsymbol{p}_{fi} = iA_iA_f p\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{p}}, \tag{90,6}$$

dove J denota l'integrale

$$J = \int \frac{e^{-iqr}}{r} F(i\nu', 1, i(p'r+\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}))\, F(i\nu, 1, i(pr-\boldsymbol{pr}))\, d^3x, \tag{90,7}$$
$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}.$$

Abbiamo portato $\partial/\partial\boldsymbol{p}$ fuori dal segno di integrale poiché è sottinteso che nella derivazione di J le quantità ν, ν', $\boldsymbol{q}$ devono considerarsi come dei parametri indipendenti e soltanto dopo che si è eseguita la derivazione si deve esprimere ν e $\boldsymbol{q}$ attraverso $\boldsymbol{p}$.

L'integrale viene calcolato mediante la sostituzione di ciascuna delle funzioni ipergeometriche confluenti con le rispettive rappresentazioni in forma di integrali curvilinei. Noi riportiamo qui solo il risultato[1]):

$$J = BF(i\nu', i\nu, 1, z),$$
$$B = 4\pi e^{-\pi\nu}(-\boldsymbol{q}^2-2\boldsymbol{qp})^{-i\nu}(\boldsymbol{q}^2-2\boldsymbol{qp}')^{-i\nu'}(\boldsymbol{q}^2)^{i\nu+i\nu'-1},$$
$$z = 2\frac{\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{pp}'+\boldsymbol{pp}')-2(\boldsymbol{qp})(\boldsymbol{qp}')}{(\boldsymbol{q}^2-2\boldsymbol{qp}')(\boldsymbol{q}^2+2\boldsymbol{qp})}. \tag{90,8}$$

Qui $F(i\nu', i\nu, 1, z)$ è la funzione ipergeometrica completa.

Dopo la derivazione nella (90,6) si può porre $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$ e z assumerà la forma

$$z = -2\frac{\boldsymbol{pp}'-\boldsymbol{pp}'}{(p-p')^2}, \quad \boldsymbol{q}^2 = (p-p')^2(1-z) \tag{90,9}$$

($z<0$). Notiamo anche che

$$-\boldsymbol{q}^2-2\boldsymbol{qp} = \boldsymbol{q}^2-2\boldsymbol{qp}' = \boldsymbol{p}^2-\boldsymbol{p}'^2 > 0.$$

In conclusione per l'elemento di matrice troviamo la seguente espressione definitiva:

$$\boldsymbol{p}_{fi} = A_iA_f\frac{8\pi i e^{-\pi\nu}}{(p-p')^3(p+p')}\left(\frac{p+p'}{p-p'}\right)^{-i(\nu+\nu')}\times$$
$$\times(1-z)^{i(\nu+\nu')-1}[i\nu\boldsymbol{pq}F(z)+(1-z)F'(z)(p'\boldsymbol{p}-\boldsymbol{pp}')], \tag{90,10}$$

[1]) Per i calcoli vedere A. Nordsieck, Phys. Rev. 93, 785 (1954).

dove per brevità si è indicato

$$F(z) = F(i\nu', i\nu, 1, z). \tag{90,11}$$

La sezione d'urto si ottiene sostituendo la (90,10) nella (90,3), ma la formula generale è molto complessa e difficilmente visualizzabile. Perciò noi passeremo subito a calcolare la distribuzione spettrale della radiazione, integreremo cioè la sezione d'urto rispetto alle direzioni del fotone e dell'elettrone finale.

L'integrazione in do_k e la sommatoria sulle polarizzazioni del fotone si riduce al calcolo della media sulle direzioni e e alla moltiplicazione per $2 \cdot 4\pi$, cioè alla sostituzione

$$e_i e_k^* \, do_k \to \frac{8\pi}{3} \delta_{ik}.$$

A questo punto la sezione d'urto assume la forma

$$d\sigma_{p'} = \frac{4\omega e^2}{3pm} |\mathfrak{p}_{fi}|^2 \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} = \frac{\omega e^2 p'}{6\pi^3 p} |\mathfrak{p}_{fi}|^2 \, d\omega \, do_{p'}. \tag{90,12}$$

Calcoliamo il quadrato $|\mathfrak{p}_{fi}|^2$ usando le formule (90,9-11) e tenendo presente che

$$|\Gamma(1 - i\nu)|^2 = \frac{\pi\nu}{\operatorname{sh} \pi\nu}.$$

Otteniamo

$$|\mathfrak{p}_{fi}|^2 = \frac{32\pi (Ze^2)^2 m^3}{p(p+p')^2 (p-p')^4 (1 - e^{-2\pi\nu'})(e^{2\pi\nu} - 1)} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\nu\nu'}{1-z} |F|^2 - z |F'|^2 + i \frac{\nu + \nu'}{2} \frac{z}{1-z} (FF'^* - F^*F') \right\}. \tag{90,13}$$

Per l'integrazione della sezione d'urto (90,12) in $do_{p'} = 2\pi \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta$ passiamo dalla variabile ϑ (angolo di diffusione) alla variabile

$$z = -\frac{2pp'}{(p-p')^2} (1 - \cos\vartheta), \quad do_{p'} \to \frac{\pi (p-p')^2}{pp'} dz.$$

Per calcolare l'integrale in dz trasformiamo l'espressione tra parentesi graffa nella (90,13). Secondo l'equazione differenziale delle funzioni ipergeometriche (vedi III (e, 2)) abbiamo

$$z(1-z) F'' + [1 - (1 + i\nu + i\nu') z] F' + \nu\nu' F = 0,$$
$$z(1-z) F''^* + [1 - (1 - i\nu - i\nu') z] F'^* + \nu\nu' F^* = 0.$$

Moltiplicando queste due equazioni rispettivamente per F^* e per F e sommando otteniamo

$$(1-z) \left[\frac{d}{dz} z (F'F^* + F'^*F) - 2z |F'|^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{i(\nu + \nu') z}{1-z} (F'^*F - F'F^*) + \frac{2\nu\nu'}{1-z} |F|^2 \right] = 0.$$

Da qui si vede che l'espressione tra parentesi graffa nella (90,13) è uguale a

$$\{\ldots\} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\, z\,(F'F^* + FF'^*) \qquad (90,14)$$

e si può integrare direttamente.

Mettendo insieme le formule ottenute, troviamo l'espressione definitiva della sezione d'urto per la radiazione di frenamento nell'intervallo di frequenze $d\omega$[1])

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi^2}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m^2c^2}{(p-p')^2}\frac{p'}{p} \times$$

$$\times \frac{1}{(1-e^{-2\pi\nu'})\,(e^{2\pi\nu}-1)} \left(-\frac{d}{d\xi}\,|F(\xi)|^2\right)\frac{d\omega}{\omega}, \qquad (90,15)$$

dove

$$\nu = \frac{Z\alpha mc}{p} = \frac{Ze^2}{\hbar v}, \quad \nu' = \frac{Ze^2}{\hbar v'}, \quad p' = \sqrt{p^2 - 2m\hbar\omega},$$

$$F(\xi) = F(i\nu', i\nu, 1, \xi), \quad \xi = -\frac{4pp'}{(p-p')^2}.$$

La formula quantistica (90,15) deve coincidere con il risultato della teoria classica (vedi II, § 70) nel caso limite in cui $\nu \gg 1$ e $\hbar\omega \ll p^2/2m$ (la prima di queste disuguaglianze è la condizione di quasi-classicità del moto dell'elettrone nel campo coulombiano, e la seconda è la condizione di quasi-classicità dell'elemento di matrice di transizione). Per effettuare il passaggio al limite occorre ricavare le espressioni asintotiche delle funzioni ipergeometriche per grandi valori dell'argomento e dei parametri, cosa su cui noi non ci soffermeremo.

Esaminiamo il caso limite in cui ambedue le velocità v e v' sono talmente grandi che $\nu \ll 1$ e $\nu' \ll 1$ (ovviamente, però, si ha sempre $v \ll 1$ e quindi $Z\alpha \ll \nu \ll 1$; questo è possibile solo se Z è piccolo). In questo caso, per il calcolo della derivata $F'(\xi)$ usiamo la formula

$$\frac{d}{dz}\, F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z),$$

che si può facilmente ottenere mediante una semplice derivazione della serie ipergeometrica. Abbiamo

$$F'(\xi) \approx i\nu \cdot i\nu' F(1, 1, 2, \xi) = \frac{\nu\nu'}{\xi} \ln(1-\xi)$$

(l'ultima uguaglianza è evidente da un confronto diretto delle corrispondenti serie). Per la funzione stessa $F(\xi)$ abbiamo semplicemente

$$F(\xi) \approx F(0, 0, 1, \xi) = 1.$$

---

[1]) Scriviamo le formule (90,15-19) in unità ordinarie.

Come risultato dalla (90,15) otteniamo

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{c^2}{v^2} \ln \frac{v+v'}{v-v'} \frac{d\omega}{\omega},$$

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \ll 1. \tag{90,16}$$

Il fatto che ν e ν' sono quantità piccole ci garantisce che la condizione di applicabilità dell'approssimazione di Born nel caso dell'interazione coulombiana è soddisfatta. Perciò la formula (90,16) si ottiene piú facilmente con un calcolo diretto a partire dalla teoria delle perturbazioni (vedi problema 1).

Esaminiamo ora il caso in cui l'elettrone veloce ($\nu \ll 1$) perde nella radiazione una parte notevole della propria energia, e quindi, $v' \ll v$, e ν' può anche non essere piccolo. Allora

$$-\xi \approx \frac{4p'}{\hbar p} = \frac{4\nu}{\nu'} \ll 1, \quad F(\xi) \approx F(i\nu', 0, 1, \xi) = 1,$$

$$F'(\xi) \approx -\nu\nu' F(1+i\nu', 1, 2, \xi) \approx -\nu\nu',$$

e la sezione d'urto è

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi}{3} Z^3 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \frac{1}{1-\exp(-2\pi Ze^2/\hbar v')} \frac{d\omega}{\omega},$$

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \gtrsim 1. \tag{90,17}$$

Per $\nu' \ll 1$ questa formula porta alla stessa espressione asintotica

$$d\sigma_\omega = \frac{32}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{c^2 v'}{v^3} \frac{d\omega}{\omega},$$

della formula (90,16) per $v' \ll v$. Perciò le formule (90,16-17) coprono insieme (per $\nu \ll 1$) tutta la gamma dei valori di ν'.

Per $\omega \to \omega_0$ (dove $\hbar\omega_0 = mv^2/2$) la velocità $v' \to 0$ e $\nu' \to \infty$. In questo limite la (90,17) dà

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \frac{\hbar\, d\omega}{mv^2}. \tag{90,18}$$

In tal modo, $d\sigma_\omega/d\omega$ tende per $\omega \to \omega_0$ ad un limite finito. Questa circostanza può essere spiegata con considerazioni analoghe a quelle esposte nel III, § 147. Da un punto di vista fisico essa è dovuta al fatto che la frequenza $\omega = \omega_0$ costituisce la « frontiera » solo per lo spettro continuo della radiazione di frenamento. L'elettrone può irradiare anche frequenze $\omega > \omega_0$ passando in uno stato legato. Ma gli stati legati fortemente eccitati in un campo coulombiano differiscono poco per le loro proprietà dagli stati liberi vicini alla loro frontiera. Perciò la frontiera che separa lo spettro continuo dallo spettro discreto non è, in sostanza, un punto fisicamente privilegiato.

Tutte le formule scritte si riferiscono ad un campo coulombiano attrattivo. La sezione d'urto di radiazione in un campo repulsivo si ottiene dalla (90,15) mediante la sostituzione $\nu \to -\nu$, $\nu' \to -\nu'$. In questo caso, in particolare, la formula nel limite dell'approssimazione di Born non cambia affatto. Invece, nel limite $\nu \ll 1$, $\nu' \to \infty$, al posto della (90,18), otteniamo

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3\alpha^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \exp\left(-\frac{\sqrt{2mc^2}\,\pi Z\alpha}{\sqrt{\hbar(\omega_0-\omega)}}\right)\frac{\hbar\, d\omega}{mv^2}, \quad (90,19)$$

cioè la sezione d'urto differenziale tende per $\omega \to \omega_0$ a zero secondo una legge esponenziale. Questo risultato è anch'esso naturale: in un campo repulsivo gli stati legati mancano e la frequenza $\omega = \omega_0$ è una frontiera reale dello spettro di radiazione.

PROBLEMI

1. Trovare nell'approssimazione di Born la sezione d'urto di radiazione di frenamento nella diffusione non relativistica di due particelle aventi valori differenti del rapporto e/m.

Soluzione. Il momento di dipolo di due particelle di carica e_1, e_2 e massa m_1, m_2 nel sistema del loro baricentro è

$$\boldsymbol{d} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\boldsymbol{r},$$

dove $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. Da qui troviamo

$$\ddot{\boldsymbol{d}} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = -\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\nabla\frac{e_1 e_2}{r}.$$

L'elemento di matrice

$$\boldsymbol{d}_{p'p} = -\frac{1}{\omega^2}(\ddot{\boldsymbol{d}})_{p'p}, \qquad \omega = \frac{p^2 - p'^2}{2\mu}$$

($\boldsymbol{p} = \mu\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p}' = \mu\boldsymbol{v}'$ sono gli impulsi del moto relativo) viene calcolato rispetto alle onde piane[1])

$$\psi_p = e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}, \quad \psi_{p'} = e^{i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}}$$

mediante la formula

$$\left(\nabla\frac{1}{r}\right)_{p'p} = \frac{4\pi i\boldsymbol{q}}{q^2}, \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}.$$

Come risultato otteniamo

$$d\sigma_{kp'} = \frac{e_1^2 e_2^2}{\pi^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\nu'}{\nu}\frac{\mu^2}{q^4}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{q})(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{q})\frac{d\omega}{\omega}\, do_{p'} do_k.$$

Dopo la sommatoria sulle polarizzazioni la distribuzione angolare della radiazione è data dal fattore $\operatorname{sen}^2\Theta$, dove Θ è l'angolo tra la direzione del fotone $\boldsymbol{k}$ e il vettore $\boldsymbol{q}$, che giace nel piano di diffusione (45,4a).

---

[1]) La sostituzione di due particelle con una avente massa ridotta è legittima, ovviamente, solo nel caso non relativistico.

Dopo l'integrazione sulle direzioni del fotone otteniamo

$$d\sigma_{\omega\theta}=\frac{16}{3}e_1^2e_2^2\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{v'}{v}\frac{d\omega}{\omega}\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{v^2+v'^2-2vv'\cos\theta},$$

dove è l'angolo di diffusione. Infine, l'integrazione in $d\theta$ dà

$$d\sigma_\omega=\frac{16}{3}e_1^2e_2^2\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{1}{v^2}\ln\frac{v+v'}{v-v'}\frac{d\omega}{\omega}.$$

Per la radiazione nel campo di un centro coulombiano fisso questa formula coincide con la (90,16).

2. Trovare in approssimazione di Born la sezione d'urto di radiazione di frenamento nella diffusione non relativistica di due elettroni [1]).

Soluzione. In questo caso la radiazione di dipolo manca e quindi occorre prendere in considerazione la radiazone di quadrupolo. Nella teoria classica la distribuzione spettrale dell'intensità totale della radiazione di quadrupolo è data dalla formula

$$I_\omega=\frac{1}{90}\,|(\dddot{D}_{ik})_\omega|^2,$$

dove $D_{ik}=\Sigma e\,(3x_ix_k-r^2\delta_{ik})$ è il tensore del momento di quadrupolo del sistema di cariche[2]). Per due elettroni nel sistema del loro baricentro abbiamo

$$D_{ik}=\frac{e}{2}\,(3x_ix_k-r^2\delta_{ik}),\qquad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2.$$

Nel passaggio alla teoria quantistica occorre sostituire le trasformate di Fourier con gli elementi di matrice (cfr. quanto detto nel § 45 sulla radiazione di dipolo), e con una opportuna normalizzazione delle funzioni d'onda (onde piane), dividendo per l'energia del fotone ω, si ottiene la sezione d'urto di radiazione con diffusione degli elettroni nell'intervallo di stati d^3p':

$$d\sigma_{p'}=\frac{1}{90\omega}\,|(\dddot{D}_{ik})_{p'p}|^2\frac{d^3p'}{v\,(2\pi)^3},$$

dove $v=2p/m$ è la velocità iniziale del moto relativo; la frequenza irradiata è $\omega=(p^2-p'^2)/m$.

L'operatore $\dddot{\mathrm{D}}_{ik}$ si calcola mediante una tripla commutazione dell'operatore D_{ik} con l'hamiltoniano

$$\mathrm{H}=\frac{\mathbf{p}^2}{m}+\frac{e^2}{r}$$

ed è uguale a [3])

$$\dddot{\mathrm{D}}_{ik}=\frac{2e^3}{m}\left[6\left(\frac{x_i}{r^3}\mathrm{p}_k+\mathrm{p}_k\frac{x_i}{r^3}\right)+6\left(\frac{x_k}{r^3}\mathrm{p}_i+\mathrm{p}_i\frac{x_k}{r^3}\right)-\right.$$
$$\left.-9\left(\frac{x_ix_kx_l}{r^5}\mathrm{p}_l+\mathrm{p}_l\frac{x_ix_kx_l}{r^5}\right)-\delta_{ik}\left(\frac{x_l}{r^3}\mathrm{p}_l+\mathrm{p}_l\frac{x_l}{r^3}\right)\right].$$

---

[1]) La velocità di collisione v soddisfa le condizioni $\alpha\ll e^2/\hbar v\ll 1$. Il caso classico ($e^2/\hbar v\gg 1$) è stato esaminato nel problema al § 71 del vol. II.

[2]) Questa formula si ottiene dalla II (71,5) allo stesso modo come la II (67,11) si ottiene dalla II (67,8).

[3]) Questa espressione è analoga alla formula classica che si sarebbe ottenuta

$$\dddot{D}_{ik}=\frac{4e^3}{m^2}\left[6\frac{x_i}{r^3}p_k+6\frac{x_k}{r^3}p_i-9\frac{x_ix_k}{r^5}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-\frac{1}{r^3}\delta_{ik}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}\right],$$

derivando D_{ik} tenendo conto dell'equazione classica del moto

$$\frac{m}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{e^2\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Tenendo conto dell'identità delle due particelle (elettroni) gli elementi di matrice vengono calcolati rispetto alle funzioni d'onda

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ipr} \pm e^{-ipr}), \quad \psi_{p'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ip'r} \pm e^{-ip'r}),$$

dove i segni $+$ e $-$ corrispondono a spin 0 e 1 degli elettroni (alla permutazione degli elettroni corrisponde la sostituzione $r \to -r$).

Calcoli piuttosto complessi[1]) portano alla seguente formula per la distribuzione spettrale della radiazione:

$$d\sigma_\omega = \frac{4}{15}\alpha r_e^2 \left\{ 17 - \frac{3x^2}{(2-x)^2} + \frac{12(2-x)^4 - 7(2-x)^2 x^2 - 3x^4}{(2-x)^3\sqrt{1-x}} \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{Arch}\frac{1}{\sqrt{x}} \right\} \frac{\sqrt{1-x}}{x}\, dx,$$

dove $x = \omega/\varepsilon$, $\varepsilon = p^2/m$ è l'energia iniziale del moto relativo degli elettroni; la sezione d'urto è mediata sui valori dello spin totale degli elettroni. La sezione d'urto di perdita di energia per radiazione è

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \omega\, d\sigma_\omega = 8{,}1\alpha r_e^2.$$

3. Trovare l'energia irraggiata nell'emissione da parte di un nucleo di un elettrone non relativistico nello stato s.

Soluzione. La funzione d'onda dell'elettrone emesso dal nucleo è un'onda sferica divergente normalizzata secondo un flusso totale uguale all'unità:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{4\pi v}}\,\frac{e^{ipr}}{r}$$

(vedi III (33,14). Come funzione d'onda dello stato finale dell'elettrone (dopo l'emissione del fotone) prendiamo l'onda piana

$$\psi_f = e^{ip'r}.$$

L'elemento di matrice di transizione è

$$p_{fi} = (p_{if})^* = \left(\int \psi_i^* \mathbf{p} \psi_f d^3x\right)^* = \frac{p'}{\sqrt{4\pi v}}\int e^{-ip'r+ipr}\, d^3x =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{v}}\,\frac{p'}{p'^2 - p^2} = -\sqrt{\frac{\pi}{v}}\,\frac{v'}{\omega}$$

(l'integrale si calcola secondo la (57,6a)). L'energia irradiata si ottiene dalla formula (45,8) moltiplicando per $d^3p'/(2\pi)^3$ e integrando sulle direzioni di p' (operazione che si riduce alla moltiplicazione per 4π). In conclusione, otteniamo la distribuzione spettrale dell'energia irradiata:

$$dE_\omega = \frac{2e^2 v'^3}{3\pi v}\, d\omega.$$

Per $\omega \to 0$ la velocità finale dell'elettrone $v' \to v$ e questa formula coincide, come doveva essere, con il limite non relativistico del risultato classico (vedi

[1]) Per i calcoli vedi B. K. Fedjušin, ŽETF 22, 140, (1952).

problema al § 69 del vol. II). L'energia totale irradiata (in unità ordinarie) è

$$E = \frac{4}{15\pi} \alpha \left(\frac{v}{c}\right)^2 \varepsilon,$$

dove $\varepsilon = mv^2/2$ è l'energia iniziale dell'elettrone.

4. Determinare l'energia irradiata nella riflessione di un elettrone non relativistico da parte di una « barriera di potenziale » infinitamente alta.

Soluzione. Supponiamo che l'elettrone si muova normalmente alla barriera. Anche se il fotone può venire emesso in qualsiasi direzione, poiché nel caso non relativistico l'impulso del fotone è piccolo rispetto a quello dell'elettrone, si può assumere che anche l'elettrone riflesso si muoverà normalmente al piano della barriera. Supponiamo che la barriera si trovi in $x = 0$ e che l'elettrone si muova nel semispazio $x > 0$. Le funzioni d'onda degli stati stazionari del moto unidimensionale, normalizzate secondo la funzione $\delta(p)$ $(p = p_x)$, hanno la forma di onde stazionarie (vedi III, § 21):

$$\psi_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} px, \quad \psi_f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} p'x.$$

L'elemento di matrice dell'operatore $\mathrm{p} = \mathrm{p}_x$ è[1])

$$p_{fi} = -\frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen} p'x \frac{d}{dx} \operatorname{sen} px \, dx = -\frac{2ip}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen} p'x \cos px \, dx = -\frac{2i}{\pi} \frac{pp'}{p^2 - p'^2}.$$

L'energia, irradiata in una riflessione dell'elettrone, si ottiene dalla (45,8) moltiplicando per $dp' = d\omega/v'$ e dividendo per $v/2\pi$ (densità del flusso che si sposta verso la barriera nella funzione iniziale ψ_i):

$$dE_\omega = \frac{4\omega^2 e^2}{3m^2} |p_{fi}|^2 \frac{2\pi \, d\omega}{v'} = \frac{8}{3\pi} e^2 v v' \, d\omega. \tag{1}$$

Per piccole frequenze ($\omega \ll \varepsilon = mv^2/2$) abbiamo $v' \approx v$ e la (1) diventa la formula classica II (69,5) (che va integrata sugli angoli, tenendo presente che $v = \Delta v/2$, dove Δv è la variazione di velocità dell'elettrone nella riflessione); d'altra parte cosí deve essere, dal momento che nella riflessione da una barriera la condizione, che il tempo dell'urto II (69,1) sia breve, è in ogni caso osservata. La formula quantistica (1) permette, tuttavia, di trovare anche l'energia totale irradiata:

$$E = \int_0^\varepsilon \frac{dE_\omega}{d\omega} d\omega = \frac{16}{9\pi} \alpha \varepsilon \frac{v^2}{c^2}$$

(in unità ordinarie).

§ 91. *Radiazione di frenamento di un elettrone diffuso su un nucleo. Caso relativistico*

Esaminiamo ora la radiazione di frenamento di un elettrone diffuso su un nucleo nel caso in cui l'elettrone abbia velocità relativisti-

---

[1]) Gli integrali di questo tipo devono essere intesi come limite per $\delta \to 0$ del valore che si ottiene introducendo nell'espressione integranda il fattore $e^{-\delta x}$.

che[1]). Supporremo soddisfatta la condizione di applicabilità dell'approssimazione di Born, cioè sia per la velocità iniziale (v) che per la velocità finale (v') dell'elettrone supporremo $Ze^2/\hbar v \ll 1$, $Ze^2/\hbar v' \ll 1$. In ogni caso la carica del nucleo non deve essere troppo grande: $Z\alpha \ll 1$.

Come nel paragrafo precedente, trascureremo il rinculo del nucleo e quindi il nucleo svolge solo il ruolo di sorgente di un campo esterno (per la giustificazione di questa omissione vedi § 94).

In accordo con la (65,25) la sezione d'urto del processo è

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8|\boldsymbol{p}|\varepsilon'\omega} \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega) \frac{d^3p' d^3k}{(2\pi)^5}. \qquad (91,1)$$

Qui $\boldsymbol{p}$, ε e $\boldsymbol{p}'$, ε' sono rispettivamente l'impulso e l'energia iniziali e finali dell'elettrone; $\boldsymbol{k}$, ω sono l'impulso e l'energia del fotone. La funzione δ viene eliminata con l'integrazione in $d\varepsilon'$; poiché $\boldsymbol{p}'$ e $\boldsymbol{k}$ sono variabili indipendenti, l'eliminazione è semplice. Notando che

$$d^3p' = |\boldsymbol{p}'|\, \varepsilon' d\varepsilon' do', \quad d^3k = \omega^2 d\omega\, do_k,$$

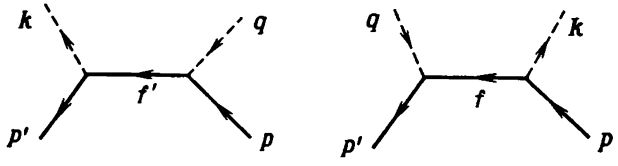
occorre semplicemente sostituire

$$\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)\, d^3p'\, d^3k \to \omega^2 |\boldsymbol{p}'|\, \varepsilon'\, do_k\, do'\, d\omega.$$

Allora abbiamo

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5} |M_{fi}|^2 \frac{\omega |\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|} do_k\, do'\, d\omega. \qquad (91,2)$$

Nella prima approssimazione non nulla, all'elemento di matrice M_{fi} corrispondono due diagrammi:



(91,3)

Il terminale libero q corrisponde al campo esterno, e perciò $q = p' - p + k$ è il 4-vettore impulso trasferito sul nucleo. Trascurare il rinculo del nucleo significa che la componente temporale q^0 è nulla.

Dai diagrammi (91,3) abbiamo

$$M_{fi} = -e^2 A_0^{(e)}(\boldsymbol{q}) \sqrt{4\pi}\, e_\mu^* \bar{u}' \left(\gamma^\mu \frac{\hat{f}' + m}{f'^2 - m^2} \gamma^0 + \gamma^0 \frac{\hat{f} + m}{f^2 - m^2} \gamma^\mu \right) u. \qquad (91,4)$$

---

[1]) La maggior parte dei risultati esposti nel seguito è stata ottenuta da H. A. Bethe, W. Heitler (1934) e indipendentemente da F. Sauter (1934).

I 4-impulsi intermedi sono $f = p - k$, $f' = p' + k$; introduciamo le notazioni

$$f^2 - m^2 = -2kp \equiv -2\varkappa\omega, \quad f'^2 - m^2 = 2kp' \equiv 2\varkappa'\omega. \tag{91,5}$$

$A_0^{(e)}$ è il potenziale scalare del campo esterno; per un campo coulombiano puro

$$A_0^{(e)}(q) = \frac{4\pi Ze}{q^2}. \tag{91,6}$$

Sostituendo nella (91,2) per la sezione d'urto troviamo

$$d\sigma = \frac{Z^2e^6}{4\pi^2}\frac{|p'|\,\omega}{|p|\,q^4} e_\mu^* e_\nu (\bar{u}'Q^\mu u)(\bar{u}\bar{Q}^\nu u')\, do_k\, do'\, d\omega,$$

dove

$$Q^\mu = \overline{\gamma^\mu}\frac{\hat{f}'+m}{2\omega\varkappa'}\gamma^0 - \gamma^0\frac{\hat{f}+m}{2\omega\varkappa}\gamma^\mu,$$

$$\bar{Q}^\nu = \gamma^0 Q^{\nu+}\gamma^0 = \gamma^0\frac{\hat{f}'+m}{2\omega\varkappa'}\gamma^\nu - \gamma^\nu\frac{\hat{f}+m}{2\omega\varkappa}\gamma^0.$$

Trascurando gli effetti di polarizzazione mediamo la sezione d'urto sulle direzioni dello spin dell'elettrone iniziale e sommiamo sulle polarizzazioni dell'elettrone finale e del fotone. Questo si effettua con

$$e_\mu^* e_\nu (\bar{u}'Q^\mu u)(\bar{u}\bar{Q}^\nu u') \to -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} Q_\mu(\hat{p}+m)\bar{Q}^\mu(\hat{p}'+m).$$

Il calcolo della traccia si esegue secondo le formule standard (§ 22). Una certa semplificazione dei calcoli si può ottenere usando l'uguaglianza

$$\gamma^0 p\gamma^0 = \tilde{p},$$

dove $\tilde{p} = (\varepsilon, -\boldsymbol{p})$ se $p = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$. Inoltre il numero di termini da calcolare si può ridurre se si tiene conto della simmetria rispetto alla sostituzione $p \leftrightarrow p'$, $k \to -k$, $q \to -q$ (questa sostituzione porta solo ad una permutazione ciclica dei fattori nel prodotto di matrici e quindi non cambia la traccia).

Come risultato si ottiene la seguente espressione per la sezione d'urto differenziale di radiazione di frenamento con emissione di un fotone di data frequenza e direzione per una direzione fissata dell'elettrone secondario[1].

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha r_e^2}{4\pi^2}\frac{p'm^4}{pq^4}\frac{d\omega}{\omega}\, do_k\, do' \times$$
$$\times\left\{\frac{q^2}{\varkappa\varkappa' m^2}(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon'^2 - q^2) + q^2\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa'}\right)^2 - \right.$$
$$\left. -4\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa'} - \frac{\varepsilon'}{\varkappa}\right)^2 + \frac{2\omega q^2}{m^2}\left(\frac{1}{\varkappa'} - \frac{1}{\varkappa}\right) - \frac{2\omega^2}{m^2}\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa} + \frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)\right\} \tag{91,7}$$

[1]) Qui e nel seguito di questo paragrafo p, p', q indicano i valori assoluti dei vettori tridimensionali: $p = |\boldsymbol{p}|$, $p' = |\boldsymbol{p}'|$, $q = |\boldsymbol{q}|$.

dove

$$\varkappa = \varepsilon - \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}, \quad \varkappa' = \varepsilon' - \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}' \quad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega), \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}.$$

Con una semplice trasformazione si può dare a questa formula una forma un po' piú comoda per l'analisi:

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{2\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{p' m^2}{p q^4} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \, d\varphi \times$$
$$\times \left\{ \frac{p'^2}{\varkappa'^2} (4\varepsilon^2 - q^2) \operatorname{sen}^2\theta' + \frac{p^2}{\varkappa^2} (4\varepsilon'^2 - q^2) \operatorname{sen}^2\theta + \right.$$
$$+ \frac{2\omega^2}{\varkappa\varkappa'} (p^2 \operatorname{sen}^2\theta + p'^2 \operatorname{sen}^2\theta') -$$
$$\left. - \frac{2pp'}{\varkappa\varkappa'} (2\varepsilon^2 + 2\varepsilon'^2 - q^2) \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi \right\}, \qquad (91,8)$$

dove

$$\varkappa = \varepsilon - p\cos\theta, \quad \varkappa' = \varepsilon' - p'\cos\theta',$$
$$q^2 = p^2 + p'^2 + \omega^2 - 2p\omega\cos\theta + 2p'\omega\cos\theta' -$$
$$- 2pp' (\cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi);$$

θ e θ' sono gli angoli tra $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{p}$ e tra $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{p}'$ rispettivamente; φ è l'angolo formato dai piani $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p})$ e $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}')$.

L'integrazione della (91,8) sulle direzioni del fotone e dell'elettrone secondario è alquanto laboriosa. Essa porta alla seguente formula per la distribuzione spettrale della radiazione[1]):

$$d\sigma_\omega = Z^2 \alpha r_{el}^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p'}{p} \left\{ \frac{4}{3} - 2\varepsilon\varepsilon' \frac{p^2 + p'^2}{p^2 p'^2} + \right.$$
$$+ m^2 \left(l \frac{\varepsilon'}{p^3} + l' \frac{\varepsilon}{p'^3} - \frac{ll'}{pp'} \right) + L \left[\frac{8\varepsilon\varepsilon'}{3pp'} + \frac{\omega^2}{p^3 p'^3} (\varepsilon^2\varepsilon'^2 + p^2 p'^2 + m^2\varepsilon\varepsilon') + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{m^2\omega}{2pp'} \left(l \frac{\varepsilon\varepsilon' + p^2}{p^3} - l' \frac{\varepsilon\varepsilon' + p'^2}{p'^3} \right) \right] \right\}, \qquad (91,9)$$

dove

$$L = \ln \frac{\varepsilon\varepsilon' + pp' - m^2}{\varepsilon\varepsilon' - pp' - m^2},$$
$$l = \ln \frac{\varepsilon + p}{\varepsilon - p}, \quad l' = \ln \frac{\varepsilon' + p'}{\varepsilon' - p'}.$$

Ricordiamo che i valori possibili delle frequenze nelle formule ottenute sono limitati solo dalla condizione imposta alla velocità finale dell'elettrone ($Ze^2/v' \ll 1$): l'elettrone non deve perdere quasi tutta

[1]) Anche l'integrazione sulle direzioni del solo elettrone secondario può essere eseguita analiticamente; vedi R. L. Gluckstern, M. H. Hull, Phys. Rev. 90, 1030 (1953).

Citiamo anche l'articolo di H. W. Koch, J. M. Motz, Rev. Mod. Phys. 31, 920 (1959), nel quale sono riportati i grafici delle formule della radiazione di frenamento.

la propria energia. Per $\omega \to 0$ la sezione d'urto di radiazione diverge come $d\omega/\omega$; questa è la manifestazione di una regola piú generale che verrà esaminata nel § 95.

Nel limite non relativistico ($p \ll m$) l'impulso del fotone è piccolo rispetto all'impulso dell'elettrone poiché

$$\omega = \frac{p'^2 - p^2}{2m} \ll p.$$

Perciò $q^2 \approx (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})^2$. Ponendo nella (91,8) $\varepsilon = \varepsilon' = m$ e trascurando p, p', ω rispetto a m, otteniamo

$$d\sigma = \frac{2}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p' m^2}{p q^4} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'\, d\varphi \times$$
$$\times (p^2 \operatorname{sen}^2\theta + p'^2 \operatorname{sen}^2\theta' - 2pp' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi),$$

oppure

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2} \frac{p'}{p} [\boldsymbol{n}\boldsymbol{q}]^2 \frac{do_k\, do'}{q^4} \frac{d\omega}{\omega} \tag{91,10}$$

in accordo con la formula ottenuta in approssimazione di Born nel problema 1 § 90. Corrispondentemente, anche per la distribuzione spettrale della radiazione si ottiene il risultato già noto (90,16)[1]).

Nel caso ultrarelativistico, quando sono grandi sia l'energia iniziale che l'energia finale dell'elettrone (ε, $\varepsilon' \gg m$), la distribuzione angolare dei fotoni e degli elettroni secondari ha un carattere peculiare. Per angoli θ, θ' piccoli le quantità $\varkappa$, $\varkappa'$ che compaiono nei denominatori della formula (91,8) sono

$$\varkappa \approx \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2} + \theta^2\right), \quad \varkappa' \approx \frac{\varepsilon'}{2}\left(\frac{m^2}{\varepsilon'^2} + \theta'^2\right) \tag{91,11}$$

e nella regione $\theta \lesssim m/\varepsilon$ diventano molto piccoli. In questa regione è piccolo anche il modulo del vettore $\boldsymbol{q}$ ($q \sim m$). In tal modo, nel caso ultrarelativistico il fotone e l'elettrone secondario emergono in avanti in uno stretto cono con angolo di apertura $\sim m/\varepsilon$.

La formula quantitativa per la distribuzione angolare nel caso ultrarelativistico è facile da ottenere dalla (91,8) ponendovi le quantità $\varkappa$, $\varkappa'$ prese dalla (91,11), sostituendo ovunque p, p' con ε, ε' e trascurando q^2 rispetto a ε^2. Introducendo notazioni piú comode

$$\delta = \frac{\varepsilon}{m}\theta, \quad \delta' = \frac{\varepsilon'}{m}\theta', \tag{91,12}$$

---

[1]) Tuttavia, ottenere questa formula eseguendo il passaggio al limite nella (91,9) è piuttosto lungo e faticoso poiché alcuni di questi termini si elidono a coppie.

rappresentiamo questa formula nella forma

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{\varepsilon' m^4}{\varepsilon q^4} \frac{d\omega}{\omega} \delta\, d\delta \cdot \delta'\, d\delta'\, d\varphi \times$$
$$\times \left\{ \frac{\delta^2}{(1+\delta^2)^2} + \frac{\delta'^2}{(1+\delta'^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'} \frac{\delta^2+\delta'^2}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) \frac{\delta\delta' \cos\varphi}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} \right\}. \quad (91,13)$$

Scrivendo $q^2 = (\boldsymbol{n}\boldsymbol{q})^2 + (\boldsymbol{n}\boldsymbol{q})^2$ $(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega)$ è facile trovare che per angoli piccoli

$$\frac{q^2}{m^2} = (\delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta' \cos\varphi) + m^2 \left(\frac{1+\delta^2}{2\varepsilon} - \frac{1+\delta'^2}{2\varepsilon'}\right)^2. \quad (91,14)$$

Per $\delta \sim \delta' \sim 1$ il secondo termine è piccolo rispetto al primo. I due termini si equivalgono nella regione degli angoli ancora piú piccoli, dove $\delta \sim m/\varepsilon$. Sebbene qui q diventi particolarmente piccolo ($q \sim \sim m^2/\varepsilon \ll m$), il contributo integrale dato da questa regione alla sezione d'urto è sempre piccolo rispetto al contributo dato da tutta la regione $\delta \lesssim 1$ (come è facile vedere, nel rapporto m^2/ε^2). Ma q può assumere valori $q \sim m^2/\varepsilon$ per $\delta \sim \delta' \sim 1$ se simultaneamente valgono le relazioni

$$|\delta - \delta'| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}, \quad \varphi \lesssim \frac{m}{\varepsilon}. \quad (91,15)$$

Il contributo di questa regione è dello stesso ordine di grandezza di tutta la sezione d'urto integrale (e a volte può essere il contributo fondamentale; vedi piú avanti).

L'integrazione della formula (91,13) in $d\varphi$ e $d\delta'$ dà la distribuzione angolare dei fotoni (di una data frequenza) indipendentemente dalle direzioni degli elettroni secondari [1]):

$$d\sigma = 8 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{\delta \cdot d\delta}{(1+\delta^2)^2} \times$$
$$\times \left\{ \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{4\delta^2}{(1+\delta^2)^2} \right] \ln \frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + 2 - \frac{16\delta^2}{(1+\delta^2)^2} \right] \right\}. \quad (91,16)$$

Integrando in $d\delta$ troviamo la distribuzione angolare della radiazione nel caso ultrarelativistico:

$$d\sigma_\omega = 4 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\right) \left(\ln \frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2}\right) \quad (91,17)$$

(questa formula si può ottenere anche direttamente dalla (91,9)).

[1]) Dapprima si esegue l'integrazione in $d\varphi$ (nei limiti da 0 a 2π). È comodo sostituire l'integrazione in $d\delta'$ con l'integrazione rispetto alla differenza $|\Delta| = |\delta' - \delta|$, dividendo la regione in due parti: da 0 fino ad un certo Δ_0 e da Δ_0 fino a ∞, dove Δ_0 soddisfa le disuguaglianze $m/\varepsilon \ll \Delta_0 \ll 1$. In ciascuna delle regioni sono possibili le corrispondenti omissioni nell'espressione integranda.

Notiamo nelle (91,16) e (91,17) la presenza del logaritmo di una quantità grande (anche per $\omega \sim \varepsilon$ il rapporto $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} \sim \frac{\varepsilon'}{m} \gg 1$). Se questa quantità è talmente grande che anche il suo logaritmo è grande, allora nelle formule indicate i termini contenenti i logaritmi diventano i termini dominanti. Notiamo che questo logaritmo proviene dall'integrazione sulla regione (91,15)[1]). In tale approssimazione logaritmica (cioè trascurando i termini che non contengono un logaritmo grande) l'elettrone secondario emerge sotto un angolo $\sim(m/\varepsilon)^2$ rispetto alla direzione di incidenza.

Riportiamo, infine, la formula limite per la regione vicina alla frontiera dello spettro rigido, quando l'elettrone ultrarelativistico irradia quasi tutta la propria energia: $\omega \approx \varepsilon \gg \varepsilon'$. Dalla (91,9) troviamo facilmente

$$d\sigma_\omega = 2Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon'^2}{p'^2} \ln \frac{\varepsilon'+p'}{\varepsilon'-p'} - \frac{m^2\varepsilon'}{4p'^3} \ln^2 \frac{\varepsilon'+p'}{\varepsilon'-p'} - \frac{\varepsilon'}{p'} \right\}. \quad (91,18)$$

Notiamo che le formule (91,17-18) coprono tutto l'intervallo dei valori di ω per un elettrone iniziale ultrarelativistico; per $\omega \approx \approx \varepsilon \gg \varepsilon' \gg m$ le due formule coincidono. Se l'elettrone secondario è non relativistico ($p' \ll m$), allora

$$d\sigma_\omega = 2Z^2\alpha r_e^2 \frac{\sqrt{2m(\varepsilon-\omega)}}{m} \frac{d\omega}{\varepsilon}. \quad (91,19)$$

Effetti di polarizzazione

Gli effetti di polarizzazione nella radiazione di frenamento possono essere studiati secondo lo stesso metodo generale descritto nel § 66. Il problema della scelta dei 4-vettori $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ è nel caso considerato particolarmente semplice. Poiché di fatto è comodo studiare il processo in un solo determinato sistema di riferimento (il sistema a riposo del nucleo), allora è sufficiente porre $e^{(1)} = (0, \boldsymbol{e}^{(1)})$, $e^{(2)} = (0, \boldsymbol{e}^{(2)})$, dove $\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$ sono versori perpendicolari a $\boldsymbol{k}$, dei quali uno giace nel piano $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p})$, e il secondo è ad esso perpendicolare.

Non riporteremo qui né i calcoli, piuttosto complessi, né i loro risultati quantitativi[2]). Ci limiteremo a notare alcune proprietà

[1]) Di questo è facile convincersi considerando la regione d'integrazione nella quale φ e $\Delta = \delta' - \delta$ soddisfano le condizioni: $m/\varepsilon \ll \Delta$, $\varphi \ll 1$. In questa regione $q^2/m^2 \approx \Delta^2 + \varphi^2\delta^2$, e la parentesi graffa nella (91,13) contiene termini proporzionali a φ^2 o a Δ^2 (per $\varphi = 0$ e $\Delta = 0$ essa si annulla). Gli integrali della forma

$$\int \frac{\varphi^2\, d\varphi\, d\Delta}{(\Delta^2+\delta^2\varphi^2)^2} \quad \text{oppure} \quad \int \frac{\Delta^2\, d\varphi\, d\Delta}{(\Delta^2+\delta^2\varphi^2)^2}$$

divergono logaritmicamente; la loro « troncatura » avviene sulle frontiere della regione indicata dei valori delle variabili.

[2]) A questo proposito vedere l'articolo di rassegna di W. H. McMaster, Rev. Mod. Phys. 33, 8 (1961).

qualitative degli effetti di polarizzazione. Queste proprietà possono essere ottenute mediante alcune relazioni di simmetria, come è stato fatto nel § 87 per l'effetto Compton.

La teoria esposta corrisponde all'approssimazione del primo ordine non nullo della teoria perturbativa. In questa approssimazione la sezione d'urto non può contenere il termine proporzionale al solo vettore polarizzazione dell'elettrone iniziale ($\boldsymbol{\zeta}$) o di quello finale ($\boldsymbol{\zeta}'$). La mancanza del termine $\sim\boldsymbol{\zeta}$ significa che la sezione d'urto totale di radiazione (sommata sulle polarizzazioni del fotone e dell'elettrone secondario) non dipende dalla polarizzazione dell'elettrone incidente.

Tra i termini proporzionali soltanto ai parametri di polarizzazione del fotone (ξ_1', ξ_2', ξ_3') manca il termine $\sim\xi_2'$. Questo significa che nella radiazione da parte di un elettrone non polarizzato il fotone non possiede polarizzazione circolare. Tuttavia, qui esiste una differenza rispetto all'analogo risultato per l'effetto Compton. In quest'ultimo caso questi termini erano vietati dalla parità spaziale in relazione all'impossibilità di comporre uno pseudoscalare con gli unici due vettori indipendenti $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ a nostra disposizione. Nel caso della radiazione di frenamento, invece, si hanno tre impulsi indipendenti ($\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{k}$); questo è sufficiente per comporre lo pseudoscalare ($\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}']$). Il termine della forma $\xi_2'(\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'])$ non contraddice alla parità spaziale e quindi, rigorosamente parlando, non è nullo. Tuttavia, esso non è invariante rispetto al cambiamento di segno di tutti gli impulsi (cfr. la (87,26)), e perciò manca nell'approssimazione del primo ordine secondo Born.

L'esistenza dello pseudoscalare ($\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}']$) ha come conseguenza anche il fatto che, oltre al termine $\sim\xi_3'$, risulta permesso nella sezione d'urto anche il termine $\sim\xi_1'$ (contrariamente a quanto avveniva per l'effetto Compton). Questo termine compare sotto forma del prodotto

$$S_{\alpha\beta}\nu_\alpha\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{\nu}]_\beta\,(\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'])$$

(dove $\boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{k}\boldsymbol{p}]$), invariante sia rispetto alla riflessione spaziale sia rispetto al cambiamento di segno di tutti gli impulsi. In tal modo, il fotone emesso possiede polarizzazione lineare di ambedue i tipi (sia nelle direzioni degli assi $\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$, che nelle direzioni « diagonali », che formano con questi assi un angolo di 45°). Questo è valido, tuttavia, solo quando viene registrata anche la direzione di emergenza del fotone secondario. Nell'integrazione su tutte le direzioni di $\boldsymbol{p}'$ il termine $\sim\xi_1'$ nella sezione d'urto si annulla. Questo fatto è a priori evidente da considerazioni di simmetria; dopo l'integrazione, le due direzioni « diagonali » non coincidenti tra loro diventano equivalenti, e perciò una polarizzazione preferenziale lungo una di esse (come avviene per $\xi_1' \neq 0$) non è possibile.

Il grado di polarizzazione lineare non dipende dallo stato di polarizzazione dell'elettrone incidente; i termini di correlazione nella sezione d'urto della forma $\xi_1'\zeta$ e $\xi_3'\zeta$ sono vietati in prima approssimazione secondo Born. Il termine $\xi_2'\zeta$, invece, è permesso e quindi nella radiazione da parte di un elettrone polarizzato il fotone possiede polarizzazione circolare (*Ja. B. Zeldovič*, 1952).

Schermaggio

Le formule fin qui ottenute valgono per un campo coulombiano puro. Se si ha a che fare, invece, con radiazione nell'urto non con un nucleo « nudo », ma con un atomo, allora si deve tenere conto anche dello schermaggio del campo del nucleo da parte degli elettroni, il che porta ad una diminuzione della sezione d'urto. A questo scopo occorre introdurre nel potenziale del campo esterno $A^{(e)}(q)$ il fattore di forma atomico $F(q)$ (vedi III, § 139). Secondo la III (139,2) questo si realizza sostituendo Z con $Z - F(q)$. Chiariamo le condizioni in cui lo schermaggio costituisce un fatto essenziale.

Ad un determinato valore q nel fattore di forma corrispondono distanze $r \sim 1/q$ nella distribuzione spaziale delle cariche elettroniche nell'atomo. Il fattore di forma si avvicina al valore Z (schermaggio totale) per $q \lesssim 1/a$, dove a rappresenta le dimensioni dell'atomo.

D'altro canto, nel caso ultrarelativistico un contributo importante nella sezione d'urto di radiazione è dato, come abbiamo visto poc'anzi, dalla regione dei valori q vicini a quel valore minimo che q può assumere per date energie iniziale e finale dell'elettrone. Nel caso ultrarelativistico

$$q_{\min} = p - p' - \omega = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2} - \sqrt{\varepsilon'^2 - m^2} - (\varepsilon - \varepsilon') \approx \frac{m^2\omega}{2\varepsilon\varepsilon'}.$$

Lo schermaggio è importante se $q_{\min} \lesssim 1/a$ ovvero se

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} \gtrsim \frac{a}{1/m}. \qquad (91,20)$$

Questa condizione è in ogni caso osservata per energie sufficientemente elevate dell'elettrone incidente.

Se $q_{\min} \ll 1/a$ (« schermaggio totale »), allora con precisione logaritmica si può immediatamente scrivere la risposta per la distribuzione spettrale della radiazione. In effetti, nella (91,17) sotto il segno di logaritmo c'è proprio il primo membro della disuguaglianza $\varepsilon\varepsilon'/m\omega \gg ma$. Se questa disuguaglianza è soddisfatta, l'integrale in dq, che dà il logaritmo, si tronca ad un valore dell'ordine di grandezza del secondo membro della disuguaglianza. Secondo il modello di Thomas — Fermi $a \sim a_0 Z^{-1/3}$, dove $a_0 \sim 1/me^2$ è il raggio di Bohr (vedi III, § 70); allora $am \sim 1/\alpha Z^{1/3}$. In tal modo, per uno

schermaggio totale il logaritmo nella (91,17) va sostituito con $\ln(1/\alpha Z^{1/3})$[1]).

Perdita di energia

La perdita di energia per radiazione da parte di un elettrone è caratterizzata dal « frenamento efficace »:

$$\varkappa_{\text{rad}} = \int_0^{\varepsilon-m} \omega \, d\sigma_\omega. \tag{91,21}$$

Prendendo $d\sigma_\omega$ dalla (91,17) il calcolo dell'integrale porta al seguente risultato[2]):

$$\varkappa_{\text{rad}} = Z^2 \alpha r_e^2 \varepsilon \left\{ \frac{12\varepsilon^2 + 4m^2}{3\varepsilon p} \ln \frac{\varepsilon + p}{m} - \right.$$
$$\left. - \frac{(8\varepsilon + 6p)\, m^2}{3\varepsilon p^2} \ln^2 \frac{\varepsilon + p}{m} - \frac{4}{3} + \frac{2m^2}{\varepsilon p} F\left(\frac{2p(\varepsilon + p)}{m^2} \right) \right\}, \tag{91,22}$$

dove la funzione $F(x)$ è definita come

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy.$$

Per piccoli x

$$F(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \ldots$$

Per grandi x si può usare la formula esatta

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 x - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nel caso non relativistico la (91,22) diventa

$$\varkappa_{\text{rad}} = \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_e^2 m. \tag{91,23}$$

Va da sé che questa formula si può ottenere direttamente integrando la formula non relativistica di Born (90,16).

Nel caso ultrarelativistico

$$\varkappa_{\text{rad}} = 4 Z^2 \alpha r_e^2 \varepsilon \left(\ln \frac{2\varepsilon}{m} - \frac{1}{3} \right). \tag{91,24}$$

Il rapporto $\varkappa_{\text{rad}}/\varepsilon$ è detto anche sezione d'urto di perdita di energia per radiazione. Per grandi ε esso cresce logaritmicamente. Questa crescita viene, tuttavia, eliminata tenendo conto dello

[1]) Per un'esposizione piú particolareggiata del problema vedi H. A. Bethe, W. Heitler, Proc. Roy. Soc. A 146, 83 (1934); H. A. Bethe, Proc. Camb. Phil. Soc. 30, 524 (1934).

[2]) La formula (91,17) in prossimità del limite superiore è inapplicabile; questo fatto, però, non è importante grazie alla convergenza dell'integrale.

schermaggio. Per uno schermaggio totale $\varkappa_{\text{rad}}/\varepsilon$ tende ad un limite costante $\approx 4Z^2\alpha r_e^2 \ln(1/\alpha Z^{1/3})$.

Nel caso di urto con un atomo occorre tenere presente che oltre alla radiazione per diffusione sul nucleo, si ha anche irraggiamento per urti con elettroni. Vedremo piú avanti (§ 94) che nel caso ultrarelativistico la sezione d'urto di radiazione nella diffusione elettrone-elettrone differisce dalla sezione d'urto di radiazione nella diffusione su un nucleo per l'assenza del fattore Z^2. Per questa ragione si può approssimativamente tenere conto della presenza di Z elettroni atomici sostituendo Z^2 con $Z(Z+1)$.

§ 92. *Produzione di coppie da parte di un fotone nel campo di un nucleo*

La produzione di una coppia elettrone-positrone nell'urto di un fotone con un nucleo ($Z + \gamma \to Z + e^- + e^+$) è uno dei canali incrociati della stessa reazione a cui si riferisce la radiazione di frenamento di un elettrone diffuso su un nucleo ($Z + e^- \to Z + e^- + \gamma$). Perciò l'ampiezza M_{fi} di questo processo si ottiene dall'ampiezza di radiazione di frenamento semplicemente operando la sostituzione

$$\varepsilon,\ \boldsymbol{p} \to -\varepsilon_+,\ -\boldsymbol{p}_+,\quad \varepsilon',\ \boldsymbol{p}' \to \varepsilon_-,\ \boldsymbol{p}_-,$$
$$\omega,\ \boldsymbol{k} \to -\omega,\ -\boldsymbol{k} \tag{92,1}$$

(gli indici + e — si riferiscono al positrone e all'elettrone). In termini di valori assoluti e di angoli la trasformazione degli impulsi è

$$p \to p_+,\quad p' \to p_-,\quad \theta \to \pi - \theta_+,\quad \theta' \to \theta_-,\quad \varphi \to \varphi - \pi,$$

dove $\theta_\pm$ sono gli angoli tra $\boldsymbol{p}_\pm$ e $\boldsymbol{k}$; φ è l'angolo formato dai piani $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_+)$ e $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_-)$.

La sezione d'urto si esprime ora attraverso M_{fi} come segue:

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8\omega\varepsilon_-\varepsilon_+}\,\delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-)\frac{d^3p_+\, d^3p_-}{(2\pi)^5}$$

(invece della (91,1)), oppure eliminando la funzione δ

$$d\sigma = \frac{p_+p_-}{(2\pi)^5\,\omega}\,|M_{fi}|^2\, do_+\, do_-\, d\varepsilon_+.$$

(In questo paragrafo $p_\pm = |\boldsymbol{p}_\pm|$, $q = |\boldsymbol{q}|$.) Confrontando con la (91,2) noi vediamo che per ottenere la sezione d'urto di produzione di una coppia dalla sezione d'urto di radiazione di frenamento occorre in quest'ultima fare la sostituzione (92,1) moltiplicando inoltre per

$$\frac{p_+^2}{\omega^2}\,\frac{d\varepsilon_+}{d\omega}, \tag{92,2}$$

e sostituire $do'\, do_k$ con $do_+\, do_-$.

In tal modo, dalla (91,8) otteniamo la seguente espressione per la sezione differenziale di produzione di una coppia da parte di un fotone non polarizzato, mediata sulle polarizzazioni delle particelle componenti la coppia[1]):

$$d\sigma = -\frac{Z^2\alpha r_e^2}{2\pi}\frac{m^2 p_+ p_- d\varepsilon_+}{\omega^3 q^4}\operatorname{sen}\theta_+ d\theta_+ \times$$
$$\times \operatorname{sen}\theta_- d\theta_- d\varphi \left\{ \frac{p_+^2}{\varkappa_+^2}(4\varepsilon_-^2 - q^2)\operatorname{sen}^2\theta_+ + \right.$$
$$+ \frac{p_-^2}{\varkappa_-^2}(4\varepsilon_+^2 - q^2)\operatorname{sen}^2\theta_- - \frac{2\omega^2}{\varkappa_+\varkappa_-}(p_+^2\operatorname{sen}^2\theta_+ + p_-^2\operatorname{sen}^2\theta_-) -$$
$$\left. - \frac{2p_+p_-}{\varkappa_+\varkappa_-}(2\varepsilon_+^2 + 2\varepsilon_-^2 - q^2)\operatorname{sen}\theta_+\operatorname{sen}\theta_-\cos\varphi \right\}, \qquad (92,3)$$
$$\varkappa_\pm = \varepsilon_\pm - p_\pm\cos\theta_\pm, \qquad q^2 = (\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{k})^2, \qquad \varepsilon_+ + \varepsilon_- = \omega$$

(*H. A. Bethe, W. Heitler*, 1934).

Mediante la stessa trasformazione dalla (91,9) otteniamo la distribuzione energetica delle particelle componenti la coppia:

$$d\sigma_{\varepsilon_+} = Z^2\alpha r_e^2 \frac{p_+p_-}{\omega^3} d\varepsilon_+ \left\{ -\frac{4}{3} - 2\varepsilon_+\varepsilon_- \frac{p_+^2 + p_-^2}{p_+^2 p_-^2} + \right.$$
$$+ m^2\left(l_- \frac{\varepsilon_+}{p_-^3} + l_+ \frac{\varepsilon_-}{p_+^3} - l_+ l_- \frac{1}{p_+p_-}\right) + L\left[-\frac{8\varepsilon_+\varepsilon_-}{3p_+p_-} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\omega^2}{p_+^3 p_-^3}(\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2 + p_+^2 p_-^2 - m^2\varepsilon_+\varepsilon_-) - \frac{m^2\omega}{2p_+p_-}\left(l_+ \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+^2}{p_+^3} + l_- \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_-^2}{p_-^3}\right)\right]\right\},$$
$$L = \ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+p_- + m^2}, \qquad l_\pm = \ln\frac{\varepsilon_\pm + p_\pm}{\varepsilon_\pm - p_\pm}. \qquad (92,4)$$

Poiché le formule ottenute sono state trovate in approssimazione di Born, esse dunque sono valide nella condizione $Ze^2/v_\pm \ll 1$. Notiamo che la simmetria delle formule (92,3-4) rispetto all'elettrone e al positrone è una conseguenza proprio dell'approssimazione di Born; essa scomparirebbe in approssimazioni di ordine superiore.

Nel caso ultrarelativistico ($\varepsilon_\pm \gg m$) l'elettrone e il positrone emergono sotto angoli $\theta_\pm \sim m/\varepsilon_\pm$ rispetto alla direzione del fotone incidente. La distribuzione angolare è data da una formula analoga alla (91,13):

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} Z^2\alpha r_e^2 \frac{m^4\varepsilon_+\varepsilon_-}{\omega^3 q^4} d\varepsilon_+ \left\{ -\frac{\delta_+^2}{(1+\delta_+^2)^2} - \frac{\delta_-^2}{(1+\delta_-^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_+\varepsilon_-}\frac{\delta_+^2 + \delta_-^2}{(1+\delta_+^2)(1+\delta_-^2)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} + \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+}\right)\frac{\delta_+\delta_-\cos\varphi}{(1+\delta_+^2)(1+\delta_-^2)} \right\} \delta_+\delta_- \cdot d\delta_+ d\delta_- \cdot d\varphi, \qquad (92,5)$$

---

[1]) Per quanto riguarda gli effetti di polarizzazione nella produzione di una coppia da parte di un fotone vedi la letteratura indicata al § 91 per la radiazione di frenamento.

dove

$$\frac{q^2}{m^2} = \delta_+^2 + \delta_-^2 + 2\delta_+\delta_- \cos\varphi + m^2 \left(\frac{1+\delta_+^2}{2\varepsilon_+} + \frac{1+\delta_-^2}{2\varepsilon_-} \right)^2. \qquad (92,6)$$

La distribuzione energetica in questo caso è

$$d\sigma = 4Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_- \right) \left(\ln \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega} - \frac{1}{2} \right) \text{(ultrarel.)}. \qquad (92,7)$$

Integrando questa espressione in $d\varepsilon_+$ (nei limiti da m a ω) si ottiene la sezione d'urto totale di produzione di una coppia da parte di un fotone di data energia[1]):

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2\alpha r_e^2 \left(\ln \frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42} \right), \qquad \omega \gg m. \qquad (92,8)$$

Come anche per la radiazione di frenamento, il termine logaritmico nella sezione d'urto, nel caso ultrarelativistico, proviene dalla regione dei valori $q \sim m^2/\varepsilon$. A questo corrispondono ora angoli per i quali

$$|\delta_+ - \delta_-| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}, \quad |\pi - \varphi| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}$$

(invece di $\varphi \lesssim m/\varepsilon$ nella (91,15)). In tal modo, in approssimazione logaritmica le direzioni dell'elettrone e del positrone formano angoli piccoli con la direzione del fotone e giacciono nello stesso piano di quest'ultima ma in semipiani diversi rispetto ad essa.

In prossimità della soglia di reazione ($\omega \to 2m$) l'approssimazione di Born è inapplicabile. In questo caso per la deduzione di una formula quantitativa si dovrebbe tenere conto esattamente dell'interazione coulombiana delle tre particelle cariche che si hanno nello stato finale (nucleo e coppia). La simmetria rispetto all'elettrone (attratto dal nucleo) e al positrone (respinto dal nucleo) in questo caso, naturalmente, viene a mancare.

Se

$$Z\alpha \ll \sqrt{\frac{\omega - 2m}{\omega}} \ll 1, \qquad (92,9)$$

allora l'approssimazione di Born è ancora applicabile. Per energie non relativistiche della coppia $\omega \approx 2m \gg p_\pm$ e quindi $q \approx \omega$. Nella (92,3) si può ovunque porre $\varepsilon_\pm = \varkappa_\pm = m$, $\omega = 2m$, dopo di che questa formula si riduce all'espressione

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha r_e^2}{64\pi^2} \frac{p_+p_-}{m^5} (p_+^2 \operatorname{sen}^2\theta_+ + p_-^2 \operatorname{sen}^2\theta_-)\, do_+\, do_-\, d\varepsilon_+. \qquad (92,10)$$

---

[1]) Poiché l'integrale converge in ambedue i limiti, l'inapplicabilità della formula (92,7) per piccoli $\varepsilon_\pm - m$ è inessenziale.

Integrando rispetto agli angoli otteniamo

$$d\sigma = \frac{1}{6} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{p_+ p_- (p_+^2 + p_-^2)}{m^5} d\varepsilon_+ =$$

$$= \frac{2Z^2 \alpha r_e^2}{3m^3} (\omega - 2m) \sqrt{(\varepsilon_+ - m)(\varepsilon_- - m)}\, d\varepsilon_+. \qquad (92,11)$$

Infine, integrando in $d\varepsilon_+$ (nei limiti da m a $\omega - m$) otteniamo la sezione d'urto totale

$$\sigma = \frac{\pi}{12} Z^2 \alpha r_e^2 \left(\frac{\omega - 2m}{m} \right)^3. \qquad (92,12)$$

Se la velocità relativa (v_0) delle particelle componenti la coppia prodotta è piccola, allora è necessario tenere conto della loro interazione coulombiana reciproca (*A. D. Sakharov*, 1948). Questa interazione diventa importante quando v_0 è dell'ordine di grandezza (oppure inferiore) delle velocità delle particelle nello stato legato dell'elettrone e del positrone (positronio):

$$v_0 \lesssim \alpha. \qquad (92,13)$$

Esaminiamo il processo nel sistema del baricentro della coppia. Nei diagrammi, che rappresentano il processo in questo sistema, sono essenziali gli impulsi virtuali $\sim m$. In altre parole, sono essenziali le distanze tra elettrone e positrone $\sim 1/m$. Invece, la funzione d'onda del loro moto relativo $\psi(r)$ varia sensibilmente solo su distanze $r \sim 1/mv_0 \sim 1/m\alpha$, cioè su distanze grandi rispetto a $1/m$. Perciò il tener conto dell'interazione delle particelle porta alla comparsa nell'elemento di matrice del fattore $\psi^*(0)$. Corrispondentemente la sezione differenziale viene moltiplicata per $|\psi(0)|^2$, cioè per

$$\frac{2\pi\alpha/v_0}{1 - e^{-2\pi\alpha/v_0}} \qquad (92,14)$$

(vedi III (136,11)). La velocità relativa di due particelle è la velocità di una di esse nel sistema di quiete dell'altra. Confrontando il valore dell'invariante $p_{+\mu} p_-^\mu$ in questo sistema e nel sistema di laboratorio (sistema a riposo del nucleo), troviamo la formula

$$\frac{m^2}{\sqrt{1 - v_0^2}} = \varepsilon_+ \varepsilon_- - \boldsymbol{p}_+ \boldsymbol{p}_-,$$

dalla quale si può ricavare v_0. Se $\boldsymbol{p}_+$ e $\boldsymbol{p}_-$ sono vicini tra loro per modulo e direzione, allora per v_0 si ottiene la formula approssimata

$$v_0^2 = p^2 \vartheta^2 + \frac{(p_+ - p_-)^2}{\varepsilon^2} \qquad (92,15)$$

(applicabile per $v_0 \ll 1$); qui $p = (p_+ + p_-)/2$, $\varepsilon = (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)/2$, ϑ è l'angolo tra $\boldsymbol{p}_+$ e $\boldsymbol{p}_-$.

La correzione nella sezione d'urto, determinata dalle formule (92,14-15), porta alla comparsa di una anomalia nella correlazione tra gli impulsi dell'elettrone e del positrone prodotti: un massimo pronunciato per $\boldsymbol{p}_+ \approx \boldsymbol{p}_-$.

§ 93. *Teoria esatta della produzione di coppie e della radiazione di frenamento nel caso ultrarelativistico*

Nei due paragrafi precedenti la radiazione di frenamento e la produzione di coppie da parte di un fotone sono state studiate nel dominio relativistico sulla base dell'approssimazione di Born, imponendo quindi, in ogni caso, che fosse soddisfatta la condizione $Z\alpha \ll 1$. In questo paragrafo esporremo una teoria di questi processi libera da questa restrizione, valida cioè anche per $Z\alpha \sim 1$ (*H. A. Bethe*, *L. Maximon*, 1954). Supporremo che ambedue le particelle (l'elettrone iniziale e finale oppure le particelle componenti la coppia) siano ultrarelativistiche; la loro energia $\varepsilon \gg m$.

Si è visto che nel caso ultrarelativistico ambedue le particelle emergono sotto angoli piccoli (θ, θ' oppure θ_+, θ_-) rispetto alla direzione del fotone: $\theta \lesssim m/\varepsilon$. Questa proprietà si mantiene anche nella teoria esatta (rispetto a $Z\alpha$), e noi considereremo perciò proprio questa regione degli angoli.

In questa regione l'impulso trasferito sul nucleo è $q \sim m$. Questo significa che nelle funzioni d'onda sono essenziali i parametri d'urto $\rho \sim 1/q \sim 1/m$, cioè le « grandi » distanze. Per tali distanze si può usare la funzione d'onda ottenuta nel § 39.

Produzione di coppie

La sezione di produzione di una coppia ha una forma analoga alla sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico (cfr. (56,1-2)):

$$d\sigma = 2\pi \left| e\sqrt{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}} M_{fi} \right|^2 \delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-) \frac{d^3p_+\, d^3p_-}{(2\pi)^6}, \qquad (93,1)$$

dove

$$M_{fi} = \int \psi^{(-)*}_{\varepsilon_- p_-}(\boldsymbol{\alpha e})\, e^{i\boldsymbol{kr}}\, \psi^{(+)}_{-\varepsilon_+ -p_+}\, d^3x. \qquad (93,2)$$

Qui $\psi^{(-)}_{\varepsilon_- p_-}$ è la funzione d'onda dell'elettrone, $\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+ -p_+}$ la funzione d'onda ad energia negativa ($-\varepsilon_+$) e con impulso $-\boldsymbol{p}_+$.

La funzione $\psi^{(-)}_{\varepsilon_- p_-}$, relativa ad una particella nello stato finale, deve contenere nella sua espressione asintotica (oltre ad un'onda piana) un'onda sferica convergente; questo fatto è indicato mediante il segno in alto (—) apposto alla funzione. Secondo la (39,10) tale

funzione d'onda ha la forma[1])

$$\psi^{(-)}_{\varepsilon_- p_-} = \frac{C^{(-)}}{\sqrt{2\varepsilon_-}} e^{ip_- r} \left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}\nabla}{2\varepsilon_-}\right) F(-i\nu,\ 1,\ -i(p_- r + \boldsymbol{p}_- \boldsymbol{r}))\, u(p_-),$$

$$C^{(-)} = e^{\pi\nu/2}\Gamma(1 + i\nu), \quad \nu = Z\alpha. \tag{93,3}$$

La funzione $\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+ -p_+}$ deve contenere nella sua espressione asintotica un'onda sferica divergente (indice (+) in alto), poiché essa ha il senso della funzione d'onda « di uno stato iniziale a energia negativa ». La funzione d'onda del positrone, invece, (composta della $\psi^{(+)*}_{-\varepsilon_+ -p_+}$) risulterà contenere nella sua espressione asintotica un'onda sferica convergente, come è richiesto per una particella finale. Secondo la (39,11) questa funzione ha la forma

$$\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+ -p_+} = \frac{C^{(+)}}{\sqrt{2\varepsilon_+}} e^{-ip_+ r} \left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}\nabla}{2\varepsilon_+}\right) \times$$

$$\times F(-i\nu,\ 1,\ i(p_+ r + \boldsymbol{p}_+ \boldsymbol{r}))\, u(-p_+), \tag{93,4}$$

$$C^{(+)} = e^{-\pi\nu/2}\Gamma(1 + i\nu).$$

Notiamo che la necessità di tenere conto dei termini $\sim 1/\varepsilon$ nelle (93,3-4) è connessa alla struttura matriciale di M_{fi} (93,2). L'elemento di matrice $(\boldsymbol{\alpha})_{fi}$ è un vettore con direzione vicina a $\boldsymbol{k}$. Perciò il termine principale in $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e})_{fi}$ risulta piccolo, e i termini di correzione risultano del suo stesso ordine di grandezza.

Sostituendo le (93,3-4) nella (93,2) e trascurando i termini $\sim 1/\varepsilon_+\varepsilon_-$, troviamo

$$M_{fi} = \frac{N}{2\sqrt{\varepsilon_+\varepsilon_-}} u^*(p_-)\{(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\alpha})I + (\boldsymbol{e}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{I}_+) + (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{I}_-)(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\alpha})\} \times$$

$$\times u(-p_+), \tag{93,5}$$

dove

$$N = C^{(+)}C^{(-)} = \frac{\pi\nu}{\operatorname{sh}\pi\nu}, \tag{93,6}$$

$$I = \int e^{-iqr} F_-^* F_+ \, d^3x,$$

$$\boldsymbol{I}_+ = \frac{i}{2\varepsilon_+}\int e^{-iqr} F_-^* \nabla F_+ \, d^3x, \quad \boldsymbol{I}_- = \frac{i}{2\varepsilon_-}\int e^{-iqr} (\nabla F_-)^* F_+ \, d^3x, \tag{93,7}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{k}$$

(F_- e F_+ indicano, per brevità, le funzioni ipergeometriche che entrano nella (93,3) e nella (93,4)). Notiamo subito che gli integrali I, $\boldsymbol{I}_+$, $\boldsymbol{I}_-$ sono legati da un'identità; dalla relazione

$$\int \nabla (e^{-iqr} F_-^* F_+)\, d^3x = 0$$

---

[1]) In questo paragrafo $p_\pm = |\boldsymbol{p}_\pm|$, $q = |\boldsymbol{q}|$.

abbiamo

$$qI + 2\varepsilon_+ \boldsymbol{I}_+ + 2\varepsilon_- \boldsymbol{I}_- = 0. \tag{93,8}$$

Mediamo il quadrato $|M_{fi}|^2$ sulle polarizzazioni del fotone incidente e sommiamo sulle direzioni degli spin dell'elettrone e del positrone[1]). Queste operazioni si eseguono mediante la sostituzione del tensore:

$$e_i e_k^* \to \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k), \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega},$$

e delle ampiezze bispinoriali:

$$u_\pm \cdot \bar{u}_\pm \to 2\rho_\pm = (\varepsilon_\pm \gamma^0 - \boldsymbol{p}_\pm \boldsymbol{\gamma} \mp m).$$

Sostituendo anche $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$, troviamo

$$|M_{fi}|^2 \to \frac{N^2}{2\varepsilon_+\varepsilon_-}\{\mathrm{Tr}\,\rho_- \boldsymbol{Q} \rho_+ \bar{\boldsymbol{Q}} - \mathrm{Tr}\rho_- (\boldsymbol{n}\boldsymbol{Q})\rho_+ (\boldsymbol{n}\bar{\boldsymbol{Q}})\},$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\gamma} I - \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{I}_+) - \gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{I}_-)\boldsymbol{\gamma},$$

$$\bar{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{\gamma} I^* - \gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{I}_+^*)\boldsymbol{\gamma} - \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{I}_-^*).$$

Scriviamo subito il risultato che si ottiene per il caso ultrarelativistico nella regione dei piccoli angoli

$$\theta_\pm \sim \frac{m}{\varepsilon} \ll 1 \text{ (trascurando i corrispondenti termini).} \tag{93,9}$$

Introduciamo i vettori ausiliari:

$$\boldsymbol{\delta}_\pm = \frac{1}{m}(\boldsymbol{p}_\pm)_\perp, \quad \delta_\pm = \frac{\varepsilon_\pm}{m}\theta_\pm \tag{93,10}$$

(l'indice $\perp$ indica la componente perpendicolare alla direzione di $\boldsymbol{k}$). Usando queste grandezze, la risposta si scrive nella forma

$$|M_{fi}|^2 \to \frac{N^2}{4}\left\{\frac{m^2\omega^2}{2\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2}|I|^2 + 2\left|I\frac{m\boldsymbol{\delta}_+}{2\varepsilon_+} + \boldsymbol{I}_+\right|^2 + \right.$$
$$\left. + 2\left|I\frac{m\boldsymbol{\delta}_-}{2\varepsilon_-} + \boldsymbol{I}_-\right|^2\right\}. \tag{93,11}$$

Qui si è tenuto conto del fatto che $I \sim \frac{\varepsilon}{q}\boldsymbol{I}_\pm \sim \frac{\varepsilon}{m}\boldsymbol{I}_\pm$ (come è chiaro dalla (93,8)), e sono stati omessi i termini di ordine superiore in m/ε.

Gli integrali $\boldsymbol{I}_\pm$ si possono rappresentare nella forma

$$\boldsymbol{I}_\pm = i\frac{\boldsymbol{p}_\pm}{2\varepsilon_\pm}\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{p}_\pm},$$

$$J = \int \frac{e^{-iqr}}{r} F(-i\nu, 1, i(p_+ r + \boldsymbol{p}_+ \boldsymbol{r})) \times$$
$$\times F(i\nu, 1, i(p_- r + \boldsymbol{p}_- \boldsymbol{r}))\, d^3x. \tag{93,12}$$

---

[1]) Per i calcoli che tengono conto della polarizzazione di tutte le particelle vedi H. Olsen, L. Maximon, Phys. Rev. 114, 887 (1959).

L'integrale J si esprime attraverso una funzione ipergeometrica completa[1]):

$$J = \frac{4\pi}{q^2}\left(\frac{q^2-2p_+q}{q^2-2p_-q}\right)^{i\nu} F(-i\nu,\ i\nu,\ 1,\ z),$$

$$z = 2\frac{q^2(p_+p_- - p_+p_-) + 2(p_+q)(p_-q)}{(q^2-2p_+q)(q^2-2p_-q)}. \tag{93,13}$$

La derivazione rispetto a $p_\pm$ deve eseguirsi per un dato parametro q, e solo successivamente si può porre $q = p_+ + p_- - k$. Riportiamo il risultato nella forma nella quale sono già state fatte le approssimazioni relative al caso ultrarelativistico e alle condizioni (93,9):

$$I_\pm = \frac{4\pi}{q^2}\frac{\varepsilon_\mp}{m^2\omega}\left(\frac{\varepsilon_+\xi_+}{\varepsilon_-\xi_-}\right)^{i\nu}\times$$

$$\times\left\{\pm\nu q\xi_\mp F(z) + i\frac{q^2}{m^2}F'(z)(q\xi_\mp - m\delta_\pm)\right\}. \tag{93,14}$$

Qui abbiamo introdotto le notazioni abbreviate

$$\xi_\pm = \frac{1}{1+\delta_\pm^2},\quad z = 1 - \frac{q^2}{m^2}\xi_+\xi_-, \tag{93,15}$$

$$F(z) = F(-i\nu,\ i\nu,\ 1,\ z)$$

($F(z)$ è una funzione reale). L'integrale I si calcola quindi direttamente dalla (93,8).

Sostituendo i valori degli integrali nella (93,11) e quindi nella (93,1), otteniamo la sezione d'urto differenziale voluta. La formula definitiva è

$$d\sigma = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi\nu}{\operatorname{sh}\pi\nu}\right)^2 Z^2\alpha r_e^2\frac{m^4}{q^4\omega^3}\delta_+d\delta_+\cdot\delta_-d\delta_-\cdot d\varphi\, d\varepsilon_+\times$$

$$\times\Big\{F^2(z)\,[-2\varepsilon_+\varepsilon_-(\delta_+^2\xi_+^2+\delta_-^2\xi_-^2)+$$

$$+\omega^2(\delta_+^2+\delta_-^2)\xi_+\xi_- + 2(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2)\delta_+\delta_-\xi_+\xi_-\cos\varphi]+$$

$$+\frac{q^4}{m^4}\frac{\xi_+^2\xi_-^2}{\nu^2}F'^2(z)\,[-2\varepsilon_+\varepsilon_-(\delta_+^2\xi_+^2+\delta_-^2\xi_-^2)+$$

$$+\omega^2(1+\delta_+^2\delta_-^2)\xi_+\xi_- - 2(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2)\delta_+\delta_-\xi_+\xi_-\cos\varphi]\Big\}. \tag{93,16}$$

Per $\nu\to 0$

$$\frac{\pi\nu}{\operatorname{sh}\pi\nu}\to 1,\quad F(z)\to 1,\quad F'(z)\approx\nu^2\to 0.$$

L'espressione (93,16) si riduce in questo caso, come doveva accadere, alla formula di Bethe — Heitler (92,5), corrispondente all'approssimazione di Born. Essa si riduce a questa stessa formula anche per un ν qualsiasi, se gli angoli di emergenza della coppia

[1]) Per i calcoli vedi l'articolo di *A. Nordsieck* citato a pag. 439.

soddisfano le condizioni

$$|\delta_+ - \delta_-| \ll 1, \quad |\pi - \varphi| \ll 1.$$

Effettivamente, in questo caso $q \ll m$, e perciò il secondo termine entro parentesi graffa nella (93,16) può venire omesso a causa della presenza in esso del fattore addizionale (rispetto al primo termine) $(q/m)^4$. Nel primo termine, invece, abbiamo (notando che $(1 - z) \sim \sim q^2/m^2 \ll 1$)[1])

$$F(z) \to F(1) \equiv F(-i\nu, i\nu, 1, 1) = \frac{1}{\Gamma(1-i\nu)\Gamma(1+i\nu)} = \frac{\operatorname{sh}\pi\nu}{\pi\nu}, \quad (93,17)$$

espressione che si semplifica con il termine analogo davanti alla parentesi graffa.

Passiamo all'integrazione della sezione d'urto rispetto alle direzioni di emergenza della coppia.

Dividiamo l'integrazione sugli angoli in due regioni, I e II, nelle quali si ha rispettivamente

$$\text{I)}\ 1 - z > 1 - z_1, \quad \text{II)}\ 1 - z < 1 - z_1,$$

dove z_1 è un certo valore per il quale $1 \gg 1 - z_1 \gg (m/\varepsilon)^2$. Poiché nella regione II $1 - z \ll 1$, $q^2 \ll m^2$, allora, secondo quanto detto precedentemente, qui $d\sigma \approx d\sigma_B \equiv d\sigma|_{\nu=0}$, dove $d\sigma_B$ è la sezione d'urto in approssimazione di Born. Perciò l'integrale sugli angoli è

$$d\sigma_{\varepsilon_+} \equiv \int d\sigma = \int_{\mathrm{I}} d\sigma + \int_{\mathrm{II}} d\sigma|_{\nu\to 0} =$$

$$= (d\sigma_{\varepsilon_+})_B + \int_{\mathrm{I}} (d\sigma - d\sigma|_{\nu\to 0}), \quad (93,18)$$

dove $(d\sigma_{\varepsilon_+})_B$ è la sezione d'urto secondo Born integrata sugli angoli.

Nella regione I abbiamo

$$\frac{q^2}{m^2} \approx \delta_+^2 + \delta_-^2 + 2\delta_+\delta_- \cos\varphi.$$

Passiamo dalle variabili δ_+, δ_-, φ alle variabili ξ_+, ξ_-, z. Mediante un calcolo diretto del Jacobiano troviamo

$$\delta_+ d\delta_+ \cdot \delta_- d\delta_- \cdot d\varphi \to \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{8m^2} \frac{d\xi_+\, d\xi_-\, d\varphi}{(\xi_+\xi_-)^3 \operatorname{sen}\varphi},$$

dove

$$1 - z = \frac{q^2}{m^2}\xi_+\xi_- = \xi_+ + \xi_- - 2\xi_+\xi_- + 2\sqrt{\xi_+\xi_-(1-\xi_+)(1-\xi_-)}\cos\varphi.$$

---

[1]) Questo valore della funzione si può ottenere dalla formula III (e,7), che lega le funzioni ipergeometriche di argomento z e $1 - z$.

Ricavando da qui cos φ e sen φ e sostituendo nella (93,16), dopo semplici trasformazioni algebriche, troviamo

$$d\sigma = A\, d\varepsilon_+ \frac{2d\xi_+\, d\xi_-\, dz}{[z(1-z)-(1-z)(\xi_+ + \xi_- - 1)^2 - z(\xi_+ - \xi_-)^2]^{1/2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{F^2(z)}{(1-z)^2} [(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2)(1-z) + 2\varepsilon_+\varepsilon_-(\xi_+ - \xi_-)^2] + \right.$$

$$\left. + \frac{F'^2(z)}{\nu^2} [(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2) z + 2\varepsilon_+\varepsilon_-(\xi_+ + \xi_- - 1)^2] \right\},$$

$$A = \left(\frac{\pi\nu}{\operatorname{sh}\pi\nu}\right)^2 \frac{Z^2\alpha r_e^2}{2\pi\omega^3}.$$

Introduciamo, infine, al posto di ξ_+, ξ_- nuove variabili « sferiche » χ, ψ mediante le relazioni

$$\xi_+ + \xi_- - 1 = \sqrt{z}\, \operatorname{sen}\chi \cos\psi;$$

$$\xi_+ - \xi_- = \sqrt{1-z}\, \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\psi;$$

$$0 \leqslant \chi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi;$$

$$2d\xi_+\, d\xi_- \to \sqrt{z(1-z)}\, \operatorname{sen}\chi \cos\chi\, d\chi\, d\psi.$$

Gli intervalli indicati di variazione di χ e ψ corrispondono ad una variazione di ξ_+, ξ_- da 0 a 1, cioè ad una variazione di δ_+, δ_- (oppure, ciò che è lo stesso, di θ_+, θ_-) da 0 a ∞; la convergenza rapida dell'integrale rende possibile tale ampliamento del dominio di variazione degli angoli. Dopo una trasformazione la radice al numeratore si riduce a $\sqrt{z(1-z)}\cos\chi$; l'integrazione in $d\chi\, d\psi$ è elementare e dà

$$d\sigma = 2A \cdot 2\pi\, dz \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right) \left[\frac{F^2(z)}{1-z} + \frac{z}{\nu^2} F'^2(z)\right] d\varepsilon_+.$$

Qui è stato introdotto supplementarmente il fattore 2, che tiene conto del fatto che l'integrazione in dz verrà eseguita da 0 a z_1, mentre per la variazione dell'azimut φ da 0 a π e da π a 2π ciascun valore di z viene percorso due volte.

L'integrazione in dz viene fatta mediante la formula (90,14), la quale per $\nu' = -\nu$ (e corrispondentemente per $F(z)$ reale) ha la forma

$$\frac{F^2}{1-z^2} + \frac{z}{\nu^2} F'^2 = \frac{1}{\nu^2} \frac{d}{dz}(zFF').$$

L'integrale di questa espressione vale $z_1 F(z_1) F'(z_1)/\nu^2$. Il valore $z_1 F(z_1) \approx F(1)$ è preso dalla (93,17), e l'espressione limite per

$F'(z_1 \to 1)$ è data dalla formula[1])

$$\frac{1}{\nu^2} F'(z) = F(1-i\nu,\ 1+i\nu,\ 2,\ z) \approx -[\ln(1-z) + 2f(\nu)]\,\frac{\operatorname{sh}\pi\nu}{\pi\nu},$$

dove

$$f(\nu) = \frac{1}{2}[\Psi(1+i\nu) + \Psi(1-i\nu) - 2\Psi(1)] = \nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+\nu^2)}.$$

$$\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z). \qquad (93,19)$$

Sostituendo tutte le espressioni trovate nella (93,18), otteniamo la seguente formula definitiva:

$$d\sigma_{\varepsilon_+} = 4Z^2\alpha r_e^2 \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right) \times$$
$$\times \left[\ln\frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega} - \frac{1}{2} - f(\alpha Z)\right]\frac{d\varepsilon_+}{\omega^3}. \qquad (93,20)$$

La sezione d'urto totale di produzione di una coppia da parte di un fotone di energia ω è

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2\alpha r_e^2 \left[\ln\frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42} - f(\alpha Z)\right]. \qquad (93,21)$$

Vediamo che in queste formule le variazioni si riducono alla sottrazione del numero atomico $f(\alpha Z)$ dal logaritmo della funzione universale. Nella fig. 17 è riportato il grafico di questa funzione. Per $\nu \ll 1$ $f(\nu) \approx 1{,}2\,\nu^2$.

Radiazione di frenamento

L'elemento di matrice del processo della radiazione di frenamento

$$M_{fi}^{\text{fren}} = \int \psi_{\varepsilon' p'}^{(-)*}(\alpha e^*)\, e^{-ikr} \psi_{\varepsilon p}^{(+)}\, d^3x; \qquad (93,22)$$

le funzioni d'onda dell'elettrone iniziale $(\varepsilon, \boldsymbol{p})$ e finale $(\varepsilon', \boldsymbol{p}')$ contengono nella parte asintotica rispettivamente un'onda sferica divergente e un'onda sferica convergente. Il calcolo di questo integrale è del tutto analogo al calcolo dell'elemento di matrice (93,2). Tuttavia, non ci soffermeremo qui.

Esporremo invece un altro metodo di calcolo della sezione della radiazione di frenamento, che si basa sulla quasi-classicità del problema e che non usa esplicitamente le funzioni d'onda dell'elet-

---

[1]) La deduzione di queste formule si può trovare nell'appendice all'articolo di H. Davies, H. A. Bethe, L. C. Maximon, Phys. Rev. 93, 788 (1954).

trone nel campo del nucleo (e in questo senso non è legato alla forma esatta del potenziale del campo)[1]).

Nel processo di radiazione di frenamento, da parte del nucleo si trasmette all'elettrone e al fotone l'impulso $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}$.

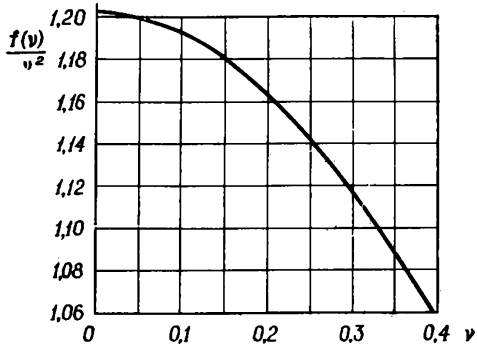


Fig. 17

Come sopra (nel problema di produzione delle coppie) occorre distinguere due regioni di valori della trasmissione trasversale $q_\perp$ (rispetto a $\boldsymbol{p}$):

$$\text{I)}\quad m \gtrsim q_\perp \gg \frac{\omega^2 m^2}{\varepsilon^2}, \qquad \text{II)}\quad q_\perp \sim \frac{\omega m^2}{\varepsilon^2} \ll m. \qquad (93,23)$$

È chiaro che nella regione I la sezione d'urto coincide con quella di Born. Infatti, per questi $q_\perp$ è inessenziale il rinculo durante l'emissione del fotone da parte dell'elettrone (ciò sarà mostrato dettagliatamente nel § 95, vedi deduzione della condizione (95,10)). Perciò nella regione I la sezione del processo si suddivide in prodotto di sezione di diffusione esatta dell'elettrone nel campo del nucleo e di probabilità, indipendente dal tipo di campo, di radiazione. Ma poiché per la (81,10) la sezione di diffusione esatta nel campo coulombiano in angoli piccoli coincide con la sezione di Born, allora anche la sezione generale del processo nella regione I coincide con quella di Born.

In questo modo è sufficiente esaminare soltanto la regione II. Alle piccole trasmissioni dell'impulso risponde il passaggio dell'elettrone vicino al nucleo a grandi distanze d'urto, $\rho \sim 1/q_\perp \sim \varepsilon/m^2$. Ma a queste distanze il movimento dell'elettrone è notoriamente quasi-classico (è facile convincersene applicando anche direttamente

[1]) La deduzione espressa piú avanti appartiene a *V. N. Bayer* e *V. M. Katkov* (1968). Per l'altro metodo di calcolo quasi-classico vedi H. Olsen, L. Maximon, H. Wergeland, Phys. Rev. 106, 27 (1957).

la solita condizione di quasi-classicità III (46,7) all'equazione ultrarelativistica (39,5)).

La quasi-classicità del movimento permette di usare il metodo, che era già stato usato nel § 59 per la radiazione di frenamento magnetico. La probabilità dell'emissione del fotone è data dall'integrale (59,9) (con Q dalla (59,13)) e in questo caso questa sarà la probabilità dell'emissione durante un solo passaggio dell'elettrone vicino al nucleo.

Come nel § 59, è necessario prima di tutto calcolare la grandezza L, determinata secondo la (59,15). La differenza è solo nella forma classica della traiettoria dell'elettrone $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

A grandi distanze d'urto il movimento avviene nella regione, dove il campo del nucleo $U(r)$ si può già considerare debole. Nell'approssimazione nulla la traiettoria è una retta passante alla distanza ρ dal centro. Nella seguente approssimazione abbiamo l'equazione del movimento (cfr. I, § 20):

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{r}\frac{dU}{dr},$$

dove $\boldsymbol{\rho}$ è il vettore nel piano xy, perpendicolare all'impulso iniziale dell'elettrone, mentre r nella parte destra dell'uguaglianza si deve considerare come funzione dell'approssimazione nulla,

$$r \approx \sqrt{\rho^2 + v^2t^2} \approx \sqrt{\rho^2 + t^2}.$$

Da qui

$$\boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = -\boldsymbol{\rho}\int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dr}\frac{dt}{r}. \qquad (93,24)$$

La velocità $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{p}(t)/\varepsilon$, e l'energia ε (che dipende solo dalla grandezza ma non dalla direzione $\boldsymbol{p}(t)$) si può considerare, con la precisione richiesta, costante. Perciò ancora un'integrazione dà

$$\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{v}(t_1)(t_2 - t_1) - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t} \frac{dU}{dr}\frac{dt'}{r(t')}. \qquad (93,25)$$

In seguito porremo $t_1 \to -\infty$, in modo che le grandezze $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(-\infty)$ e $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(-\infty)$ siano l'impulso e la velocità iniziali dell'elettrone.

Questa formula ha la stessa struttura della (59,17): il primo termine è parallelo, mentre il secondo è perpendicolare a $\boldsymbol{v}$, e il coefficiente nel secondo termine contiene $1/\varepsilon$. Perciò, per L si ottiene l'espressione di prima (59,18) con $\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)$ dalla (93,25).

Usando questa espressione, rappresentiamo la probabilità (59,9) nella forma

$$dw = |a(\boldsymbol{\rho})|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (93,26)$$

dove

$$a(\rho) = e\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) \exp\left\{ i \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} [\omega t - \boldsymbol{kr}(t)] \right\} dt, \quad (93,27)$$

$$R(t) = \frac{u^*_{\varepsilon' p'}}{\sqrt{2\varepsilon'}} \alpha e^* \frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

e tutti i fattori nell'espressione integranda si possono considerare grandezze classiche, cioè si può trascurare la loro non commutatività[1]).

Ricordiamo che nella (93,27)

$$\varepsilon' = \varepsilon - \omega, \quad \boldsymbol{p}'(t) = \boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{k}.$$

La funzione classica $\boldsymbol{p}(t)$ invece è data dalla (93,24). Essendo $\boldsymbol{p}$ l'impulso iniziale della particella, per il campo coulombiano ($U = -\nu/r$, $\nu = Z\alpha$) otteniamo

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p} - \frac{\nu\rho}{\rho^2}\left[\frac{t}{\sqrt{\rho^2+t^2}} + 1\right].$$

Con ciò

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{\boldsymbol{p}}{\varepsilon} t - \frac{\rho}{\rho^2}\frac{\nu}{\varepsilon}\left[\sqrt{\rho^2+t^2} + t\right].$$

Introducendo il cambiamento dell'impulso nella diffusione classica

$$\Delta = \boldsymbol{p}(\infty) - \boldsymbol{p}(-\infty) = -\frac{2\rho\nu}{\rho^2} \quad (93,28)$$

trascriviamo queste formule nella forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(t) &= \boldsymbol{p} + \frac{\Delta}{2}\left[\frac{t}{\sqrt{t^2+\rho^2}} + 1\right], \\ \boldsymbol{r}(t) &= \left(\boldsymbol{p} + \frac{\Delta}{2}\right)\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\Delta}{2\varepsilon}\sqrt{t^2+\rho^2}. \end{aligned} \quad (93,29)$$

Usando ora la formula (59,19) per $R(t)$ e le espressioni (93,29) per $\boldsymbol{p}(t)$ e $\boldsymbol{r}(t)$ si può calcolare l'integrale rispetto al tempo nella (93,27). L'integrazione si effettua sostituendo la variabile t con

$$\xi = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\omega t - \boldsymbol{kr}(t))$$

e usando la formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \exp(-i\xi)}{\sqrt{\chi^2+\xi^2}} d\xi = 2i\chi K_1(\chi)$$

---

[1]) La possibilità di poterli trascurare, come nel § 59, è assicurata dalla disuguaglianza $\omega \gg \omega_0$, dove ω_0 è la caratteristica frequenza di movimento. In questo caso $\omega_0 \sim v/\rho \ll m$, e $\omega \sim \varepsilon$.

(K_1 è la funzione di Macdonald). Tuttavia, non è necessario effettuare completamente questi calcoli. Infatti, ci occorre l'espressione $a(\rho)$ solo nei valori piccoli ($\Delta \ll m$) della grandezza Δ (la quale nel calcolo è considerata un parametro indipendente). Allora per $a(\rho)$ si ottiene l'espressione della forma

$$a(\rho) = w_f^* \boldsymbol{D} w_i \cdot \Delta\chi K_1(\chi) \tag{93,30}$$

per cui

$$\chi = \rho \frac{\omega\varepsilon}{\varepsilon'}(1 - \boldsymbol{n}\boldsymbol{v}),$$

dove $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$, e $\boldsymbol{D}$ è una certa funzione di $\boldsymbol{p}$, ε, $\boldsymbol{k}$ (ma non piú di ρ); la forma di questa funzione non ci occorre[1]). Poiché nel caso ultrarelativistico il fotone viene emesso sotto un angolo piccolo θ rispetto alla direzione della velocità dell'elettrone, allora

$$\chi \approx \rho \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \omega \left(1 - v + \frac{\theta^2}{2}\right),$$

oppure

$$\chi = \rho \frac{\omega m^2}{2\varepsilon\varepsilon'}(1 + \delta^2), \quad \delta = \frac{\theta\varepsilon}{m}. \tag{93,31}$$

Come è già stato detto, la (93,26) è la probabilità di emissione in un solo passaggio alla distanza d'urto ρ. La sezione del processo di radiazione del fotone con la frequenza e la direzione note si ottiene moltiplicando per $v^{-1}\, d\rho_x\, d\rho_y \approx d\rho_x\, d\rho_y \equiv d^2\rho$ e integrando rispetto alle distanze d'urto

$$d\sigma = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int |a(\rho)|^2\, d^2\rho. \tag{93,32}$$

Non bisogna tuttavia pensare che senza l'integrazione in $d^2\rho$ questa formula dia anche la distribuzione degli elettroni finali secondo le direzioni. Infatti, la deviazione dell'elettrone nel movimento secondo la traiettoria classica, determinabile univocamente dal campo esterno, non coincide affatto con la deviazione indeterminata quantomeccanica (cosí che anche il limite $\boldsymbol{p}'(\infty)$ della funzione classica $\boldsymbol{p}'(t)$ non coincide con l'impulso finale dell'elettrone $\boldsymbol{p}'$). Perciò, per ottenere la distribuzione angolare degli elettroni, occorre effettuare una scomposizione della loro funzione d'onda secondo le onde piane, cosí come si è fatto nel III, §§ 131, 152.

Dalla (93,32) si vede che $a(\rho)$ è l'ampiezza della radiazione del fotone durante il passaggio alla distanza d'urto ρ. Le espressioni (93,26-27) determinano, tuttavia, questa ampiezza con una preci-

---

[1]) Osserviamo che nell'integrazione gli spinori w_i, w_f si possono considerare costanti, cioè si può trascurare il cambiamento della polarizzazione dell'elettrone ζ nel suo movimento classico ultrarelativistico. Di questo è possibile convincersi sulla base delle equazioni, ottenute nel § 41.

sione fino al fattore di fase. È facile comprendere che questo fattore è uguale a $e^{-ik\varrho}$. In effetti, per la presenza in $\boldsymbol{r}(t)$ di una parte $\boldsymbol{r}_\perp(-\infty) = \boldsymbol{\rho}$ perpendicolare a $\boldsymbol{p}$, indipendente dal tempo, questo fattore costante si ha già nell'espressione per $V_{fi}(t)$. Lo si può ricavare dall'integrale rispetto al tempo e, grazie al suo carattere non operatoriale, non viene toccato dal processo di commutazione degli operatori. In questo modo, l'ampiezza del processo di radiazione è

$$e^{-ik\varrho}\, a(\boldsymbol{\rho}), \tag{93,33}$$

dove $a(\boldsymbol{\rho})$ è dato dalla (93,30).

Si circoscriva ora l'elettrone in $z \to -\infty$ con un'onda piana avente impulso $\boldsymbol{p}$, diretto lungo l'asse z. Ciò significa che la funzione d'onda dell'elettrone in $z \to -\infty$ nel piano x, y, tende alla costante, indipendente da $\boldsymbol{\rho}$, la quale si può supporre uguale all'unità. Tralasciamo le ampiezze bispinoriali non essenziali per i successivi ragionamenti. Allora, per le III (131,5-6), la funzione d'onda dell'elettrone, che è passato attraverso il campo, sarà uguale, per $z \to \infty$ con precisione fino al fattore di fase indipendente da $\boldsymbol{\rho}$, a[1])

$$\psi(\infty) = \exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z)\, dz\right\} \equiv S(\boldsymbol{\rho}). \tag{93,34}$$

Per lo stesso valore dell'ampiezza del passaggio (93,33), la funzione d'onda dell'elettrone, che è passato attraverso il campo e che ha emesso il quanto, sarà

$$e^{-ik\varrho} a(\boldsymbol{\rho})\, S(\boldsymbol{\rho}). \tag{93,35}$$

Allora l'ampiezza della radiazione con il passaggio dell'elettrone allo stato con un determinato impulso $\boldsymbol{p}'$ viene data dalla relativa componente di Fourier della (93,35) e per la III (131,7) dall'espressione

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{q}_\perp) &= \int e^{-i\boldsymbol{p}'\varrho} e^{-ik\varrho} a(\boldsymbol{\rho})\, S(\boldsymbol{\rho})\, d^2\rho = \\ &= \int e^{-i\boldsymbol{q}_\perp\varrho} a(\boldsymbol{\rho})\, S(\boldsymbol{\rho})\, d^2\rho, \end{aligned} \tag{93,36}$$

dove $\boldsymbol{q}_\perp$ è la componente perpendicolare della trasmissione dell'impulso da parte del nucleo. La sezione della diffusione con questa

---

[1]) Riferendoci alla formula III (131,5) noi consideriamo l'analogia tra l'equazione (39,5), dove supponiamo $p^2 \approx \varepsilon$, e l'equazione non relativistica di Schrödinger (39,5a). Tenendo presente la differenza dei coefficienti in queste equazioni, è facile vedere che nel nostro caso effettivamente vengono soddisfatte le condizioni III (131,1) di applicabilità della formula III (131,5). Questo fatto, cioè che questa formula non si può applicare per quanto grandi z, non è essenziale per gli stessi motivi esposti nel III, § 131.

trasmissione $q_\perp$ sarà

$$d\sigma = |a(q_\perp)|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^2q_\perp}{(2\pi)^2}. \tag{93,37}$$

Calcoliamo $S(\rho)$. In questo caso del campo di Coulomb, l'integrale diverge nell'esponente, ciò che riflette l'infinità della fase durante la diffusione di Coulomb. Perciò l'integrale deve essere calcolato dall'inizio nei limiti finali

$$\int_{-R}^{R} U(z)\,dz = -2\nu \int_0^R \frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}} =$$

$$= -2\nu\left[\ln\left(R+\sqrt{R^2+\rho^2}\right) - \ln\rho\right] \approx -2\nu\ln 2R + 2\nu\ln\rho$$

($R \gg \rho$). Il primo termine costante è inessenziale, cosí che

$$S(\rho) = e^{-2i\nu\ln\rho} = \rho^{-2i\nu}. \tag{93,38}$$

Sostituendo la (93,30) e la (93,38) nella (93,36) e integrando nelle direzioni del vettore ρ nel piano x, y, otteniamo

$$a(q_\perp) \sim \nu \int_0^\infty \rho^{-2i\nu} K_1(\chi) J_1(q_\perp\rho)\,\rho\,d\rho; \tag{93,39}$$

J_1 è la funzione di Bessel. Qui non sono stati trascritti i fattori, che non contengono $\nu = Z\alpha$.

Notiamo che la dipendenza dell'ampiezza $a(q_\perp)$ (e anche la sezione (93,37)) da ν si riduce a un singolo fattore. D'altra parte, con $\nu \to 0$ la sezione deve passare alla sua espressione di Born. Da ciò è chiaro che la sezione si differenzia dall'espressione di Born solo per il fattore, e per di piú questo fattore non dipende dalla polarizzazione dell'elettrone e quindi non cambia gli effetti di polarizzazione.

L'integrale (93,39) si calcola tramite la funzione ipergeometrica con l'aiuto della formula

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} K_1(ax) J_1(bx)\,x\,dx =$$

$$= \frac{b\Gamma\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{2^\lambda a^{3-\lambda}} \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}} F\left(\frac{\lambda}{2},\ 1-\frac{\lambda}{2},\ 2,\ \frac{b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Questo dà

$$a(q_\perp) \sim \nu\left(\frac{q}{2}\right)^{2i\nu}(1-i\nu)\,\Gamma^2(1-i\nu)\,F(i\nu,\ 1-i\nu,\ 2,\ z), \tag{93,40}$$

dove

$$z = 1 - \frac{m^4\omega^2}{4q^2\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1+\delta^2)^2, \qquad \delta = \frac{\varepsilon\theta}{m}. \tag{93,41}$$

Qui si è usato ciò che nella regione II dei valori di $\boldsymbol{q}_\perp$ la componente parallela $\boldsymbol{p}$ del vettore $\boldsymbol{q}$ è

$$q_{\parallel}^2 = q^2 - q_\perp^2 \approx \frac{m^4\omega^2}{4\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1+\delta^2)^2. \tag{93,42}$$

Di ciò è facile convincersi, tenendo presente che in questa regione gli angoli tra gli impulsi $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ e $\boldsymbol{k}$ soddisfano le condizioni della (91,15).

La funzione ipergeometrica nella (93,40) può essere portata alla funzione $F(z)$ dalla (93,15) grazie alla formula

$$F(a, b+1, c+1, z) = \frac{c}{a-c}F(a, b, c, z) + \frac{c(1-z)}{b(a-c)}F'(a, b, c, z).$$

Da qui otteniamo il seguente risultato definitivo:

$$d\sigma = d\sigma_{\mathrm{B}}\frac{1}{F^2(1)}\left[F^2(z) - \frac{(1-z)^2}{\nu^2}F'^2(z)\right], \tag{93,43}$$

dove $d\sigma_{\mathrm{B}}$ è la sezione di Born (91,13). Con $q \gg m^2/\varepsilon$ abbiamo $z \approx 1$ e tutto il fattore in $d\sigma_{\mathrm{B}}$ si trasforma nella 1 (in questo senso la formula (93,43), dedotta per la regione II, si può applicare automaticamente con tutti i $q \lesssim m$). Ricordiamo che con $q \lesssim m^2/\varepsilon$, quando il fattore di correzione nella (93,43) è soltanto differente dalla 1, i vettori $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{k}$ sono quasi complanari, mentre le grandezze δ e δ' sono quasi uguali; questa circostanza è già stata usata nella (93,42). Tenendo ciò presente, il quadrato di q^2 nell'espressione z (93,41) si può scrivere come

$$\frac{q^2}{m^2} = \delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta'\cos\varphi + \frac{m^2\omega^2}{4\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1+\delta^2)^2, \tag{93,44}$$

cioè si può porre $\delta = \delta'$ nel secondo termine della (91,14) (ma non nel primo termine, che non contiene il coefficiente piccolo ($\sim m^2/\varepsilon^2$)).

Per trovare la sezione integrale (rispetto agli angoli) non è necessario effettuare l'integrazione dall'inizio. Si può trovare la risposta per analogia con il problema della produzione delle coppie, tornando all'elemento di matrice di transizione nella forma (93,22) e applicando i successivi ragionamenti (*H. Olsen*, 1955).

Le diverse direzioni $\boldsymbol{p}'$ (per una data energia ε') corrispondono alla degenerazione dello stato finale dell'elettrone. È evidente che il risultato della sommatoria sugli stati concernenti un livello degenere non dipende dal come sarà scelto l'insieme di questi stati. Possiamo perciò usare per la sommatoria sulle direzioni $\boldsymbol{p}'$ il sistema di funzioni $\psi^{(+)}_{\varepsilon'\boldsymbol{p}'}$ al posto del sistema $\psi^{(-)}_{\varepsilon'\boldsymbol{p}'}$ (necessario per il calcolo della sezione d'urto differenziale), cioè definire l'elemento di ma-

trice della radiazione di frenamento come segue:

$$M_{fi}^{\text{fren}} = \int \psi_{\varepsilon' p'}^{(+)*} (\alpha e^*)\, e^{-ikr} \psi_{\varepsilon p}^{(+)}\, d^3x.$$

È facile convincersi che questo integrale coincide con l'integrale $(M_{fi}^{\text{coppia}})^*$ se in quest'ultimo si cambiano i parametri delle funzioni d'onda al modo seguente:

$$\boldsymbol{p}_+,\ p_+, \varepsilon_+ \to -\boldsymbol{p},\ -p,\ -\varepsilon; \qquad \boldsymbol{p}_-,\ p_-,\ \varepsilon_- \to \boldsymbol{p}',\ p',\ \varepsilon';$$
$$\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$$

(e si cambiano anche le variabili d'integrazione: $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$).

Da qui si vede chiaramente che la sezione integrale (sugli angoli) della radiazione di frenamento si può ottenere dalla sezione integrale della produzione della coppia (93,20) moltiplicando quest'ultima per

$$\frac{\omega^2}{p_+^2}\frac{d\omega}{d\varepsilon_+} \approx \frac{\omega^2}{\varepsilon_+^2}\frac{d\omega}{d\varepsilon_+}$$

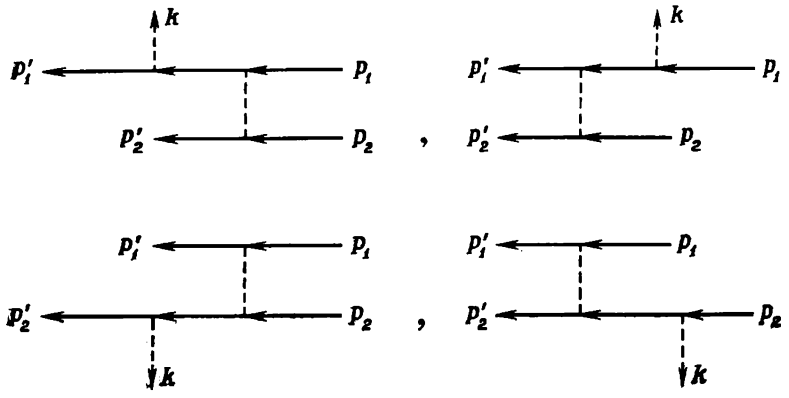
(cfr. con la (92,2)) e cambiando $\varepsilon_+ \to -\varepsilon$, $\varepsilon_- \to \varepsilon'$. Si ottiene allora

$$d\sigma = 4Z^2\alpha r_e^2 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{2}{3}\right)\left[\ln\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2} - f(\alpha Z)\right]\frac{d\omega}{\omega}. \qquad (93,45)$$

Si vede che le correzioni alle formule di Born per le sezioni integrali della radiazione di frenamento e la produzione delle coppie sono date dalla stessa funzione $f(\alpha Z)$.

§ 94. *Radiazione di frenamento nella diffusione elettrone-elettrone nel caso ultrarelativistico*

La radiazione di frenamento da parte di un elettrone diffuso su un altro elettrone è rappresentata da otto diagrammi di Feynman: quattro diagrammi (94,1) e quattro diagrammi di scambio, che si



(94,1a)

(94,1b)

ottengono da quelli riportati scambiando p_1' e p_2'. Noi riporteremo qui i risultati dei calcoli per il caso ultrarelativistico[1]).

Nel sistema di riferimento del laboratorio (sistema di quiete di uno degli elettroni iniziali, diciamo, del secondo) la sezione d'urto di radiazione integrale rispetto alle direzioni del fotone può essere rappresentata sotto forma di somma $d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$, dove

$$d\sigma^{(1)} = 4\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\omega} + \frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\right) \left(\ln \frac{2\varepsilon(\varepsilon-\omega)}{m\omega} - \frac{1}{2}\right); \tag{94,2}$$

$$d\sigma^{(2)} = \frac{2}{3} \alpha r_e^2 \frac{m\, d\omega}{\omega^2} \left\{ \left(4 - \frac{m}{\omega} + \frac{m^2}{4\omega^2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \ln \frac{2\varepsilon}{m} - 2 + \frac{2m}{\omega} - \frac{5m^2}{8\omega^2} \right\} \text{ per } \omega \geqslant \frac{m}{2}; \tag{94,3}$$

$$d\sigma^{(2)} = \frac{2}{3} \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \left\{ 8\left(1 - \frac{\omega}{m} + \frac{\omega^2}{m^2}\right) \ln \frac{\varepsilon}{\omega} - \right.$$
$$- \left(1 - \frac{2\omega}{m}\right) \ln \left(1 - \frac{2\omega}{m}\right) \left[\frac{m^3}{4\omega^3} - \frac{m^2}{2\omega^2} + \frac{3m}{\omega} - 2 + \frac{4\omega}{m}\right] -$$
$$\left. - \frac{m^2}{2\omega^2} + \frac{3m}{2\omega} - 2 + \frac{2\omega}{m} - \frac{4\omega^2}{m^2} \right\} \text{ per } \omega \leqslant \frac{m}{2} \tag{94,4}$$

(ε è l'energia iniziale del primo elettrone).

Queste formule sono precise a meno dei termini di ordine di grandezza relativo m/ε. Con questa precisione risulta che i contributi nella sezione d'urto da parte dei diversi diagrammi non interferiscono tra loro, e in questo senso $d\sigma^{(1)}$ e $d\sigma^{(2)}$ corrispondono alla radiazione da parte di ciascuno dei due elettroni: rispettivamente da parte dell'elettrone veloce e dell'elettrone di rinculo (i diagrammi (94,1a) e (94,1b)).

I diagrammi del tipo « di scambio » danno nella sezione d'urto lo stesso contributo dei diagrammi « diretti ». In forza dell'identità degli elettroni il contributo totale dei diagrammi « diretti » e dei diagrammi « di scambio » va diviso per 2; perciò si può prendere in considerazione soltanto il contributo dei diagrammi diretti e non tenere conto dell'identità delle particelle. Per l'urto di un elettrone con un positrone al posto dei diagrammi « di scambio » compaiono i diagrammi « di annichilazione ». Il loro contributo, tuttavia, risulta dell'ordine di grandezza relativo m/ε, cioè trascurabile. Perciò con la precisione indicata le sezioni d'urto di radiazione di frenamento nella diffusione elettrone-elettrone e elettrone-positrone sono uguali.

---

[1]) Questi risultati sono ottenuti negli articoli: V. N. Bayer, V. M. Galitskij, ZETF 49, 661 (1965); V. N. Bayer, V. S. Fadin, V. A. Khose, ZETF, 51, 1135 (1966); 53, 2194 (1967). Si noti in questi articoli il metodo di integrazione della sezione differenziale fondato sull'introduzione delle variabili invarianti; l'uso di questo metodo semplifica notevolmente i calcoli.

Per $\omega \gg m$ abbiamo il rapporto

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\sigma^{(1)}} \sim \frac{m}{\omega} \ll 1,$$

cioè la radiazione da parte dell'elettrone di rinculo è debole rispetto alla radiazione da parte dell'elettrone veloce (quando questo rapporto raggiunge l'ordine di grandezza m/ε, la formula (94,3) perde, ovviamente, senso). Al contrario, per $\omega \ll m$ le due parti della sezione quasi si equivalgono:

$$d\sigma^{(1)} = \frac{16}{3} \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{2\varepsilon^2}{m\omega}, \qquad d\sigma^{(2)} = \frac{16}{3} \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{\varepsilon}{\omega}, \quad \omega \ll m. \tag{94,5}$$

Per la validità delle formule (94,2-5) è necessario che almeno uno degli elettroni dopo la radiazione rimanga ultrarelativistico. In altre parole, la frequenza del fotone deve essere sufficientemente lontana dalla frontiera dello spettro duro, cioè lontana dalla frequenza massima $\omega_{\max}$ che può venire irradiata. L'energia finale degli elettroni è minima e l'energia del fotone è massima quando ambedue gli elettroni dopo la radiazione si muovono nella direzione del fotone e hanno velocità uguali. Allora dalle leggi di conservazione abbiamo

$$\varepsilon + m = \omega_{\max} + 2\varepsilon', \quad |\boldsymbol{p}| = \omega_{\max} + 2|\boldsymbol{p}'|.$$

Escludendo da qui ε' e $\boldsymbol{p}'$ otteniamo la formula

$$(\varepsilon + m - \omega_{\max})^2 - (|\boldsymbol{p}| - \omega_{\max})^2 = 4m^2$$

dalla quale

$$\omega_{\max} = \frac{m(\varepsilon - m)}{m + \varepsilon - |\boldsymbol{p}|}. \tag{94,6}$$

Per $\varepsilon \gg m$ abbiamo $\omega_{\max} \approx \varepsilon$. In tal modo, le formule (94,2-4) sono valide alla condizione

$$\omega_{\max} - \omega \sim \varepsilon - \omega \gg m. \tag{94,7}$$

La sezione d'urto di radiazione da parte dell'elettrone veloce (94,2) coincide esattamente con la sezione d'urto di radiazione da parte di un elettrone diffuso su un nucleo a $Z = 1$ (formula (91,17)). Questa coincidenza non è casuale e le cause di essa si chiariscono dall'analisi del ruolo del rinculo nel processo di radiazione.

Nella deduzione della formula (91,17) noi abbiamo trascurato il rinculo della particella fissa (il nucleo) sostituendola con un campo esterno costante. Questo equivale a trascurare la componente temporale del 4-vettore impulso trasferito $q = p' - p + k$ (energia di rinculo). Mostriamo ora che nel caso ultrarelativistico questa omissione è ammissibile non solo nella radiazione da parte di un elettrone diffuso su un nucleo, ma anche quando l'elettrone è diffuso su un altro elettrone.

Scriviamo q^2 nella forma

$$-q^2 = -(\varepsilon' + \omega - \varepsilon)^2 + (p'_{\parallel} + \omega - p_{\parallel})^2 + (\boldsymbol{p}'_{\perp} - \boldsymbol{p}_{\perp})^2, \quad (94,8)$$

dove gli indici in basso indicano le componenti dei vettori $\boldsymbol{p}'$ e $\boldsymbol{p}$ (impulso iniziale e finale dell'elettrone), parallele e perpendicolari alla direzione del fotone $\boldsymbol{k}$. Nel caso ultrarelativistico gli angoli θ e θ' (angoli formati da $\boldsymbol{k}$ rispettivamente con $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p}'$) sono piccoli: $\theta \lesssim m/\varepsilon$, $\theta' \lesssim m/\varepsilon'$. Perciò

$$|\boldsymbol{p}_{\perp}| \sim |\boldsymbol{p}|\theta \sim m,$$

$$p_{\parallel} \approx |\boldsymbol{p}| - \frac{\boldsymbol{p}_{\perp}^2}{2|\boldsymbol{p}|} \approx \varepsilon - \frac{m^2}{2\varepsilon} - \frac{\boldsymbol{p}_{\perp}^2}{2\varepsilon}, \quad (94,9)$$

e analogamente per $\boldsymbol{p}'_{\perp}$ e $p'_{\parallel}$.

Se non si tiene conto del rinculo abbiamo $\varepsilon' + \omega - \varepsilon = 0$; la differenza $p'_{\parallel} + \omega - p_{\parallel} \sim m^2/\varepsilon$, e perciò

$$-q^2 \approx (\boldsymbol{p}'_{\perp} - \boldsymbol{p}_{\perp})^2 \sim m^2. \quad (94,10)$$

L'energia di rinculo (sull'elettrone) è

$$q_0 = \varepsilon' + \omega - \varepsilon \sim \frac{q^2}{2m} \sim m. \quad (94,11)$$

La variazione di $\boldsymbol{p}'_{\perp}$ dovuta alla variazione di ε' può essere trascurata. Perciò i primi due termini nella (94,8) danno la variazione di q^2 se si tiene conto del rinculo; denotiamo questa variazione con Δq^2. Usando la (94,9) otteniamo

$$\Delta q^2 \approx (\varepsilon' + \omega - \varepsilon)\left(-\frac{m^2}{\varepsilon'} - \frac{\boldsymbol{p}_{\perp}'^2}{\varepsilon'} + \frac{m^2}{\varepsilon} + \frac{\boldsymbol{p}_{\perp}^2}{\varepsilon}\right) \sim m^2 \frac{m}{\varepsilon}.$$

Confrontando con la (94,10) vediamo che $\Delta q^2 \ll |q^2|$; questo risultato giustifica la omissione del rinculo[1]).

Il fatto che una particella veloce irradi in un cono stretto (con angolo di apertura $\sim m/\varepsilon$) nella direzione del proprio moto, permette di ottenere la sezione d'urto di radiazione nel sistema del baricentro mediante una semplice trasformazione della sezione d'urto nel sistema del laboratorio (94,2)[2]).

Nel sistema del baricentro ambedue gli elettroni irradiano in maniera uguale, ciascuno nella direzione del proprio moto[3]). L'energia E dell'elettrone relativistico nel sistema del baricentro è legata

---

[1]) Questa conclusione, ovviamente, è tanto piú valida per la radiazione da parte di un elettrone diffuso su un nucleo, per il quale l'energia di rinculo è $q_0 \approx q^2/2M \sim m^2/M$, dove M è la massa del nucleo.

[2]) Nel caso generale questa trasformazione non è possibile, poiché il contributo nello spettro in un dato intervallo di frequenze $d\omega$ proviene da fotoni emessi in direzioni essenzialmente differenti.

[3]) Notiamo che questo fatto chiarisce bene la causa della mancanza di interferenza tra le radiazioni delle due particelle.

con la propria energia ε nel sistema del laboratorio dalla relazione $2E^2 = m\varepsilon$, e le frequenze Ω e ω del fotone in questi due sistemi di riferimento sono legate dalla relazione $\omega/\varepsilon = \Omega/E$ (è facile ottenere queste uguaglianze confrontando i valori degli invarianti (p_1p_2) e (p_1k) nei due sistemi di riferimento). Perciò per la sezione d'urto di radiazione da parte di ciascuno dei due elettroni nel sistema del baricentro troviamo

$$d\sigma^{(1)} = d\sigma^{(2)} = 4\alpha r_e^2 \frac{d\Omega}{\Omega} \frac{E-\Omega}{E} \times$$
$$\times \left(\frac{E}{E-\Omega} + \frac{E-\Omega}{E} - \frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{4E^2(E-\Omega)}{m^2\Omega} - \frac{1}{2}\right) \qquad (94,12)$$

(*G. Altarelli, F. Buccella*, 1964).

Per l'applicabilità della (94,12) è pure necessario che la frequenza del fotone non sia vicina alla frontiera dello spettro. Per una particella ultrarelativistica la trasformazione indicata precedentemente dalla relazione $\omega_{\max} \approx \varepsilon$ dà direttamente

$$\Omega_{\max} \approx \omega_{\max}\frac{E}{\varepsilon} \approx E. \qquad (94,13)$$

In tal modo, nel sistema del baricentro gli elettroni possono irradiare solo metà della propria energia totale $2E$. È facile calcolare direttamente $\Omega_{\max}$ notando che, dopo la radiazione di tale fotone, gli elettroni si muoveranno (nello stesso sistema di riferimento) con le stesse velocità nella direzione opposta alla direzione del fotone. Abbiamo

$$2E = 2E' + \Omega_{\max}, \quad 2|\boldsymbol{p}'| = \Omega_{\max},$$

da cui

$$\Omega_{\max} = \frac{p^2}{E} = E - \frac{m^2}{E}, \qquad (94,14)$$

e nel caso ultrarelativistico si torna nuovamente alla (94,13). In tal modo, la formula (94,12) è applicabile alla condizione

$$\Omega_{\max} - \Omega \sim E - \Omega \gg m. \qquad (94,15)$$

Riportiamo ora le formule per la radiazione nel sistema del baricentro nel caso limite opposto, in prossimità della frontiera dello spettro, quando[1])

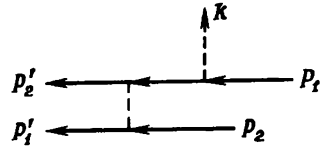
$$\Omega_{\max} - \Omega \ll m. \qquad (94,16)$$

---

[1]) Va da sé che il risultato ottenuto in approssimazione di Born è valido, come al solito, solo fino a quando la velocità relativa degli elettroni finali è grande rispetto a α. In caso contrario è necessario tenere conto dell'interazione delle particelle nello stato finale.

Poiché in questo caso il rinculo è un fatto essenziale, i risultati differiscono dal caso di diffusione su un centro fisso e risultano differenti per la diffusione elettrone-elettrone e elettrone-positrone.

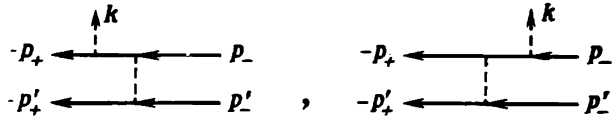
Nel caso di diffusione elettrone-elettrone, oltre ai quadrati dei diagrammi (94,1), danno un contributo nella sezione d'urto di radiazione in prossimità della frontiera dello spettro anche i prodotti (termini di interferenza) dei diagrammi diretti e di scambio, nei quali è la stessa particella iniziale ad irradiare, ad esempio il prodotto del secondo dei diagrammi (94,1a) con il diagramma



Questo è connesso al fatto che in prossimità della frontiera le particelle finali hanno impulsi vicini e non ci sono ragioni perché i termini di scambio siano piccoli. Il risultato definitivo per la sezione d'urto è

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \qquad (94,17)$$

Per la diffusione elettrone-positrone nella sezione d'urto di radiazione, danno un contributo logaritmicamente grande i quadrati dei diagrammi di annichilazione, nei quali sono le particelle iniziali ad irradiare:



(94,18)

All'approssimazione non logaritmica diventano importanti anche i quadrati di altri diagrammi. I termini di interferenza sono, invece, piccoli. Il risultato definitivo è

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \left(\ln \frac{2E}{m} + 1\right) \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \qquad (94,19)$$

In tal modo, la radiazione nella diffusione elettrone-positrone è logaritmicamente grande rispetto alla radiazione nella diffusione elettrone-elettrone.

§ 95. *Emissione di fotoni molli negli urti*

Sia $d\sigma_0$ la sezione d'urto di un qualche processo di diffusione di particelle cariche, che può essere accompagnato dall'emissione di un determinato numero di fotoni. Parallelamente a questo processo,

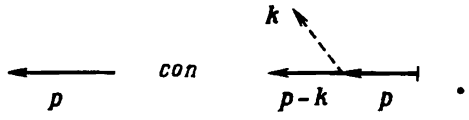
esaminiamo anche un altro processo, che differisce dal primo solo per l'emissione di un fotone in piú. Se la frequenza ω di questo fotone è sufficientemente piccola (le corrispondenti condizioni verranno formulate piú avanti), allora la sezione d'urto $d\sigma$ del secondo processo è legata in maniera semplice con $d\sigma_0$.

Effettivamente, per piccoli ω si può trascurare l'azione reciproca dell'emissione di questo quanto sul processo di diffusione. In altre parole, la sezione d'urto $d\sigma$ può essere rappresentata in forma di prodotto di due fattori indipendenti: la sezione d'urto $d\sigma_0$ e la probabilità dw di emissione di un fotone nell'urto. L'emissione di un fotone molle è un processo quasi-classico; perciò la sua probabilità coincide con il numero calcolato classicamente dei quanti emessi nell'urto, cioè con l'intensità classica (energia totale) di radiazione dI, divisa per ω $(=\hbar\omega)$. In tal modo, abbiamo

$$d\sigma = d\sigma_0 \frac{dI}{\omega}. \tag{95,1}$$

Mostriamo in che modo questa formula può essere ottenuta seguendo le regole generali della tecnica dei diagrammi (*J. M. Jauch, F. Rohrlich*, 1954).

I diagrammi del processo con il fotone supplementare si ottengono dai diagrammi del processo fondamentale mediante l'aggiunta di una linea fotonica esterna, che costituisce una « diramazione » di una qualsiasi linea elettronica (interna o esterna), cioè mediante la sostituzione di



(95,2)

È facile vedere che il ruolo fondamentale è svolto dai diagrammi che si ottengono mediante tale sostituzione nelle linee elettroniche esterne. Effettivamente, se p è l'impulso della linea esterna ($p^2 = m^2$), allora per piccoli k si avrà anche $(p-k)^2 \approx m^2$, cioè il fattore che viene aggiunto nel diagramma si troverà vicino al suo punto singolare.

Per la linea dell'elettrone iniziale p la sostituzione (95,2) si riduce alla seguente sostituzione nell'ampiezza di reazione:

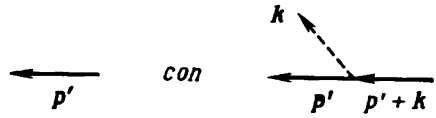
$$u(p) \to e\sqrt{4\pi}\, G(p-k)\, \hat{e}^* u(p) = e\sqrt{4\pi}\, \frac{\hat{p}-\hat{k}+m}{(p-k)^2-m^2}\, \hat{e}^* u(p) \approx$$
$$\approx -e\sqrt{4\pi}\, \frac{\hat{p}+m}{2(pk)}\, \hat{e}^* u(p)$$

(il primo fattore e è la carica elettrica).

Notando che $\hat{p}\hat{e}^* = 2pe^* - \hat{e}^*\hat{p}$ e che $\hat{p}u(p) = mu(p)$, otteniamo la regola di sostituzione

$$u(p) \to -e\sqrt{4\pi}\,\frac{(pe^*)}{(pk)}\,u(p). \tag{95,3}$$

Analogamente per la linea dell'elettrone finale p' la sostituzione nel diagramma di



significa nell'ampiezza la sostituzione

$$\bar{u}(p') \to e\sqrt{4\pi}\,\bar{u}(p')\,\frac{(p'e^*)}{(p'k)}. \tag{95,4}$$

In tutte le rimanenti parti del diagramma si possono trascurare completamente le variazioni degli impulsi delle linee associate all'emissione del fotone k. Con questo si sottintende che l'energia del fotone ω è, in ogni caso, piccola rispetto alle energie di tutte le particelle che intervengono nella reazione (ivi comprese le energie dei fotoni duri emessi, se ce ne sono).

Si abbia che la sezione d'urto $d\sigma_0$ si riferisce alla diffusione di un elettrone su un nucleo fisso (con possibilità di emissione di fotoni duri). L'ampiezza di questo processo ha la forma

$$M_{fi}^{(0)} = \bar{u}(p')\,Mu(p).$$

Operando nell'ampiezza una volta la sostituzione (95,3) e un'altra volta la sostituzione (95,4) e sommando quindi i risultati, otteniamo l'ampiezza della radiazione di frenamento di quegli stessi fotoni duri e del fotone molle k [1]):

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} e\sqrt{4\pi}\left(\frac{p'e^*}{p'k} - \frac{pe^*}{pk}\right). \tag{95,5}$$

Corrispondentemente, la sezione d'urto è

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot 4\pi e^2 \left|\frac{p'e}{p'k} - \frac{pe}{pk}\right|^2 \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3\,2\omega}. \tag{95,6}$$

Sommando sulle polarizzazioni del fotone k, otteniamo

$$d\sigma = -e^2 \left|\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)}\right|^2 \frac{d^3\boldsymbol{k}}{4\pi^2\omega}\,d\sigma_0. \tag{95,7}$$

---

[1]) Notiamo che la comparsa in questa formula di una differenza è il risultato naturale dell'invarianza di gauge: l'ampiezza di reazione non deve cambiare per la sostituzione del 4-vettore polarizzazione $e \to e +$ costante$\cdot k$.

Espressa attraverso quantità tridimensionali questa formula ha la forma[1])

$$d\sigma = \alpha \left(\frac{[v'n]}{1 - v'n} - \frac{[vn]}{1 - vn} \right)^2 \frac{d\omega\, do_k}{4\pi^2 \omega}\, d\sigma_0, \qquad (95,8)$$

dove $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$, e $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ sono le velocità iniziale e finale dell'elettrone. Vediamo che l'espressione, che sta davanti a $d\sigma_0$, coincide effettivamente con l'intensità classica (divisa per ω) della radiazione (cfr. II (69,4)), come si era affermato nella formula (95,1).

La condizione di applicabilità delle formule ottenute richiede che l'impulso $\boldsymbol{q}$ trasferito sul nucleo sia grande rispetto alla variazione $\delta\boldsymbol{q}$ di questa quantità connessa all'emissione del fotone molle. Abbiamo

$$\delta\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})\,|_{\omega=0} = \delta\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{k},$$

e $|\,\delta\boldsymbol{p}'\,| \sim \frac{\partial |\boldsymbol{p}'|}{\partial \varepsilon}\,\omega \sim \frac{\omega}{v}$, $|\,\boldsymbol{k}\,| = \omega$. Nel caso non relativistico ($v \ll 1$) otteniamo quindi la condizione

$$\frac{\omega}{|\,\boldsymbol{q}\,|\,v} \ll 1. \qquad (95,9)$$

Poiché, d'altra parte, $|\,\boldsymbol{q}\,| \sim 1/\rho$ (ρ è il parametro d'urto), allora questa condizione si può rappresentare anche nella forma $\omega\tau \ll 1$, dove $\tau \sim \rho/v$ è la durata caratteristica dell'urto.

Nel caso ultrarelativistico i fotoni vengono emessi principalmente nelle direzioni vicine a $\boldsymbol{v}$ o a $\boldsymbol{v}'$ (come si vede dai denominatori nella (95,8)). Se l'angolo θ di deflessione dell'elettrone è piccolo, le direzioni di tutti e tre i vettori $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{n}$ sono vicini tra loro. Allora

$$|\,\delta\boldsymbol{q}\,| = |\,\delta\boldsymbol{p}'\,| - |\,\boldsymbol{k}\,| = \omega \left(\frac{1}{v} - 1 \right) \sim \frac{\omega m^2}{\varepsilon^2},$$

e poiché $|\,\boldsymbol{q}\,| \sim \varepsilon\theta$, otteniamo la condizione

$$\theta \gg \frac{\omega}{\varepsilon}\,\frac{m^2}{\varepsilon^2}. \qquad (95,10)$$

Grazie al carattere quasi-classico delle formule (95,5-8) esse sono valide per la radiazione da parte di particelle cariche qualsiasi (non necessariamente elettroni, per i quali è stata fatta la deduzione). Nel caso generale, quando nella reazione intervengono piú particelle cariche, la formula (95,5) deve essere scritta nella forma

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} e \sqrt{4\pi} \sum Z \left(\frac{p'e^*}{p'k} - \frac{pe^*}{pk} \right), \qquad (95,11)$$

---

[1]) Per la deduzione è comodo tornare alla (95,6), ponendo $p = (\varepsilon, \varepsilon\boldsymbol{v})$, $pk = \varepsilon\omega\,(1 - \boldsymbol{vn})$, . . ., $e = (0, \boldsymbol{e})$ ed eseguendo di nuovo la somma sulle polarizzazioni mediante la (45,4a).

dove la sommatoria viene eseguita su tutte le particelle (di carica Ze); corrispondentemente cambiano anche le formule (95,6-8).

In particolare, nel caso non relativistico

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} \frac{e\sqrt{4\pi}}{\omega} \sum Z(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{e}^*. \tag{95,12}$$

Per due particelle questa formula assume la forma

$$\begin{gathered} M_{fi} = M_{fi}^{(0)} \frac{\sqrt{4\pi}}{\omega} \left(\frac{Z_1 e}{m_1} - \frac{Z_2 e}{m_2} \right) \boldsymbol{q}\boldsymbol{e}^*, \\ \boldsymbol{q} = m(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}), \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \end{gathered} \tag{95,13}$$

dove $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ sono le velocità relative rispettivamente prima e dopo l'urto.

I risultati ottenuti si generalizzano al caso dell'emissione simultanea di piú fotoni molli. Per ciascuno dei fotoni si aggiunge nell'ampiezza M_{fi} un fattore della forma di quello che nella (95,5) sta davanti a $M_{fi}^{(0)}$. È facile convincersi di questo direttamente sull'esempio di due fotoni. Le linee dei due fotoni emessi devono venire aggiunte a linee elettroniche esterne nei due diversi ordini di successione possibili, cioè un diagramma con la linea esterna p viene sostituito con due diagrammi con le linee

Ognuno di essi contiene il fattore (denominatori dei propagatori elettronici)

$$\frac{1}{2(pk_1 + pk_2)} \frac{1}{2pk_1} \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{2(pk_1 + pk_2)} \frac{1}{2pk_2}.$$

La loro somma è

$$\frac{1}{2pk_1} \frac{1}{2pk_2},$$

contiene cioè il prodotto dei due fattori indipendenti relativi al primo e al secondo fotone. Dopo questo nella somma di tutti i diagrammi i termini si raccolgono (in forza dell'invarianza di gauge) nel prodotto delle differenze

$$\left(\frac{p'e_1^*}{p'k_1} - \frac{pe_1^*}{pk_1} \right) \left(\frac{p'e_2^*}{p'k_2} - \frac{pe_2^*}{pk_2} \right).$$

Corrispondentemente alla fattorizzazione dell'ampiezza, si separa in fattori anche la sezione d'urto del processo. In tal modo, i fotoni

molli vengono emessi indipendentemente. La sezione d'urto del processo con emissione di n fotoni molli può essere rappresentata nella forma

$$d\sigma = d\sigma_0 \, dw_1 \ldots dw_n, \tag{95,14}$$

dove dw_1, dw_2, ... sono le probabilità di emissione di ciascuno dei fotoni k_1, k_2, ... Integrando questa formula su un intervallo finito di valori delle variabili (frequenze e direzioni), uguale per tutti i quanti, si deve introdurre il fattore $1/n!$, che tiene conto dell'identità dei fotoni.

Se integriamo la sezione d'urto di radiazione (95,1) rispetto alle frequenze su un certo intervallo finito da ω_1 a ω_2 si ottiene un'espressione della forma

$$d\sigma \sim \alpha \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} d\sigma_0 \tag{95,15}$$

(cfr. con la (95,8)). Nel fare questo si sottintende che ambedue le frequenze sono molli in modo che i possibili valori di ω_2 siano limitati dalla condizione di applicabilità del metodo. Con precisione logaritmica, tuttavia, si può porre $\omega_2 \sim \varepsilon$, dove ε è l'energia iniziale della particella irradiante. I valori di ω_1 non sono, invece, in nessun modo limitati dal basso. Facendo, però, tendere $\omega_1 \to 0$ si vede che la sezione d'urto di radiazione di tutti i possibili quanti molli diventa infinita. Chiariamo il senso di questa situazione, chiamata *catastrofe infrarossa* (*F. Bloch*, *A. Nordsieck*, 1937).

Per

$$\alpha \ln \frac{\varepsilon}{\omega_1} \gtrsim 1 \tag{95,16}$$

abbiamo $d\sigma \gtrsim d\sigma_0$. Ma questo significa l'inapplicabilità della teoria perturbativa, l'impossibilità di calcolare $d\sigma$ in quanto quantità di ordine superiore di $d\sigma_0$. In altre parole, parametro di piccolezza deve considerarsi in questo caso non α, ma $\alpha \ln (\varepsilon/\omega_1)$.

In tal modo, la deduzione delle formule (95,5-8) sulla base della teoria delle perturbazioni risulta errata per frequenze sufficientemente piccole. D'altro canto, la formula classica per l'intensità dI (II (69,4)) è applicabile in grado sempre minore quanto piú piccola è la frequenza ω. Perciò la formula (95,1) rimane valida se la si considera dal punto di vista di una maggiore classicità. Precisamente, nella (95,1) era sottinteso che veniva emesso un fotone; allora l'energia perduta dalla particella nella radiazione coincide con ω e la « sezione di perdita relativa di energia » è data dall'espressione $\omega \, d\sigma/\varepsilon$, oppure dalla formula

$$d\sigma_0 \frac{dI}{\varepsilon}. \tag{95,17}$$

In effetti, invece, per ω sufficientemente piccoli la probabilità di radiazione non è piccola, e la probabilità di emissione di due o piú

fotoni non è minore ma maggiore della probabilità di emissione di un fotone solo. A queste condizioni l'espressione (95,17) rimane valida, ma l'intensità classica dI determinerà non la probabilità di emissione di un fotone, ma il numero medio dei fotoni emessi

$$d\bar{n} = \frac{dI}{\omega}, \tag{95,18}$$

oppure, in un intervallo finito di frequenze,

$$\bar{n} = \int\limits_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} \frac{dI}{\omega}. \tag{95,19}$$

Poiché i fotoni molli vengono emessi in modo statisticamente indipendente (questo è valido nelle approssimazioni di tutti gli ordini della teoria delle perturbazioni), allora al processo di emissione multipla si può applicare la formula di Poisson: la probabilità $w(n)$ di emissione di n fotoni si esprime attraverso il numero medio $\bar{n}$ mediante la formula

$$w(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}. \tag{95,20}$$

Rappresentiamo la sezione d'urto del processo di diffusione con emissione di fotoni nella forma

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot w(n). \tag{95,21}$$

Poiché $\sum w(n) = 1$, allora $d\sigma_0$ rappresenta la sezione d'urto totale di diffusione accompagnata da una qualsiasi radiazione molle. Questo fatto è evidente da considerazioni classiche; secondo la teoria delle perturbazioni $d\sigma_0$ è la sezione d'urto di diffusione elastica pura. Ma la teoria delle perturbazioni è qui inapplicabile. Si ha quindi che $d\sigma_0$, calcolata secondo la teoria delle perturbazioni come sezione d'urto di diffusione elastica, tiene conto, in effetti, dell'emissione di tutti i fotoni molli. Per quanto riguarda la sezione d'urto di diffusione elastica pura, essa è, in effetti, nulla: per $\omega_1 \to 0$ il numero medio $\bar{n} \to \infty$, e secondo la (95,20) la probabilità di emissione di un numero finito di fotoni si annulla[1]).

PROBLEMI[2])

1. Trovare la distribuzione spettrale della radiazione di frenamento di quanti molli da parte di un elettrone ultrarelativistico diffuso su un nucleo.

Soluzione. L'integrazione in do_k della formula (95,8) dà

$$d\sigma = \alpha K(\xi) \frac{d\omega}{\omega} d\sigma_0, \tag{1}$$

---

[1]) Per un esame piú dettagliato torneremo su questo problema nel cap. 12 in relazione con il problema delle correzioni radiative.

[2]) Le applicazioni qui riportate della formula (95,7) sono di *V. N. Bayer* e *V. M. Galitskij* (1964).

dove

$$K(\xi)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2\xi^2+1}{\xi\sqrt{\xi^2+1}}\ln\left(\xi+\sqrt{\xi^2+1}\right)-1\right],\quad \xi=\frac{|\boldsymbol{p}|}{m}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

($\boldsymbol{p}$ è l'impulso, θ l'angolo di diffusione dell'elettrone). Nel caso ultrarelativistico il ruolo principale è svolto dalla regione degli angoli

$$\frac{m^2\omega}{\varepsilon^3}\ll\theta\ll\frac{m}{\varepsilon} \tag{3}$$

(il limite inferiore è la condizione (95,10), mentre per il limite superiore vedi piú avanti). Inoltre $\xi\approx\varepsilon\theta/2m\ll 1$, cosí che

$$K(\xi)\approx\frac{8}{3\pi}\xi^2,$$

e la sezione d'urto di diffusione elastica sul nucleo (vedi la formula (81,10)) è

$$d\sigma_0\approx 4Z^2r_e^2\frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{do}{\theta^4}. \tag{4}$$

L'integrale

$$d\sigma_\omega=\frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\int\frac{d\theta}{\theta}$$

diverge logaritmicamente; esso viene troncato inferiormente in $\theta\sim m^2\omega/\varepsilon^3$ e superiormente in $\xi\sim 1$, cioè in $\theta\sim m/\varepsilon$ (per $\xi\to\infty$

$$K\approx\frac{4}{\pi}\ln\xi,$$

e quindi l'integrale converge). In tal modo, con precisione logaritmica troviamo

$$d\sigma_\omega=\frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\ln\frac{\varepsilon^2}{m\omega} \tag{5}$$

in accordo con la parte logaritmica della formula (95,17) (nella quale occorre porre $\varepsilon\approx\varepsilon'$). Per raggiungere una precisione non logaritmica si deve uscire fuori dalla regione quasi-classica.

2. Per l'urto di due elettroni ultrarelativistici determinare (nel sistema del baricentro) la sezione d'urto di emissione simultanea di due fotoni molli in direzioni opposte, ad angoli piccoli rispetto agli impulsi degli elettroni.

Soluzione. I fotoni che emergono in direzioni opposte vengono emessi da elettroni differenti, e ciascun elettrone emette fotoni nella direzione del proprio moto. La sezione d'urto di emissione simultanea è

$$d\sigma=d\sigma_0\cdot\alpha K(\xi)\frac{d\omega_1}{\omega_1}\cdot\alpha K(\xi)\frac{d\omega_2}{\omega_2},\qquad \xi=\frac{\varepsilon}{m}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}, \tag{6}$$

dove ε è l'energia di ciascuno degli elettroni, θ l'angolo di diffusione nel sistema del baricentro, uguale per ambedue gli elettroni (poiché i fotoni vengono emessi in direzioni chiaramente differenti, non occorre introdurre nella sezione d'urto il fattore 1/2). La sezione d'urto di diffusione elastica degli elettroni ad angoli piccoli nel sistema del baricentro nel caso ultrarelativistico coincide con la (4) (cfr. la (82,11)). A differenza della (1) la sezione (6) si comporta per $\theta\to 0$ come $\theta\,d\theta$, e quindi l'integrale converge. Da una parte questa circostanza permette di integrare fino a $\theta=0$ (senza preoccuparsi di una possibile violazione della condizione di applicabilità del metodo). Dall'altra, il contributo principale nella

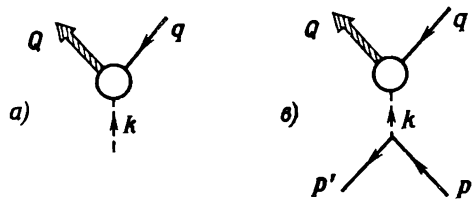
sezione d'urto integrale proviene ora dalla regione $\theta \sim m/\varepsilon$ (e non dalla regione $\theta \ll m/\varepsilon$), e quindi occorre usare l'espressione esatta (2). Integrando la sezione d'urto sugli angoli di diffusione otteniamo il risultato:

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{2}{\pi}\left[5+\frac{7}{2}\zeta(3)\right] r_e^2\alpha^2 \frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2} = 5{,}9 r_e^2\alpha^2 \frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2}$$

(ζ è la funzione di Riemann; $\zeta(3) = 1{,}202$).

§ 96. *Metodo dei fotoni equivalenti*

Confrontiamo i due processi descritti dai diagrammi:



(96,1)

(i cerchi rappresentano convenzionalmente tutta la parte interna del diagramma). Il diagramma *a*) rappresenta l'urto di un fotone k ($k^2 = 0$) con una particella avente 4-impulso q (e massa m; $q^2 = m^2$). A seguito dell'urto si forma un sistema (una particella o un gruppo di particelle) avente impulso totale Q. Il diagramma *b*) rappresenta l'urto di quella stessa particella q con un'altra particella il cui 4-impulso è p e la massa M ($p^2 = M^2$). A seguito dell'urto quest'ultima particella acquista il 4-impulso p' e si forma lo stesso sistema di prima Q. Il secondo processo si può considerare come l'urto della particella q con il fotone virtuale emesso dalla particella p, il cui impulso è $k = p - p'$ ($k^2 < 0$). Se inoltre $|k^2|$ è piccolo, allora il fotone virtuale differisce poco da un fotone reale. È evidente che questa situazione può crearsi in urti di particelle molto veloci: il campo elettromagnetico di una particella che si muove ad una velocità $v \approx 1$ è quasi trasversale e quindi vicino, per le sue proprietà, al campo di un'onda luminosa. A queste condizioni la sezione d'urto del processo *b*) può esprimersi attraverso la sezione d'urto del processo *a*)[1].

Considereremo quindi la particella M ultrarelativistica: la sua energia (nel sistema in quiete di m) è $\varepsilon \gg M$. Se le masse delle particelle collidenti m e M sono differenti, allora per fissare le idee, assumeremo che $m < M$.

---

[1]) Il metodo che andiamo esponendo è stato elaborato da *K. Weizsäcker* e *E. J. Williams* (1934); l'idea base di questo metodo era stata enunciata precedentemente da *E. Fermi* (1924).

L'ampiezza del processo *a*) (con partecipazione di un fotone reale) si può rappresentare nella forma

$$M_{fi}^{(r)} = -e\sqrt{4\pi}\,(e_\mu J^\mu), \tag{96,2}$$

dove e_μ è il 4-vettore polarizzazione del fotone, e J^μ la corrente di transizione associata al vertice (cerchietto) del diagramma. L'ampiezza del processo *b*) ha la forma

$$M_{fi} = Ze^2 \frac{4\pi}{k^2}\,(j_\mu J^\mu), \tag{96,3}$$

dove j_μ è la corrente di transizione della particella m (il vertice in basso del diagramma), Ze la carica di questa particella. La corrente J è funzione di $k = Q - q$ e quindi differente nei due casi: $k^2 = 0$ nella (96,2) e $k^2 \neq 0$ nella (96,3). Ma se nel secondo caso

$$|\,k^2\,| \ll m^2, \tag{96,4}$$

allora anche qui si può prendere J per $k^2 = 0$.

La variazione dell'impulso della particella M per l'emissione del fotone virtuale, $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{k}$, è piccola rispetto al valore iniziale dell'impulso $|\,\boldsymbol{p}\,| \approx \varepsilon$; perciò nella corrente di transizione j si può porre $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$. In altre parole, consideriamo il moto della particella M come rettilineo e uniforme. Poiché tale moto è quasi-classico, la corrente corrispondente non dipende dallo spin della particella[1]):

$$j^\mu = 2p^\mu. \tag{96,5}$$

La condizione di trasversalità della corrente ($jk = 0$) dà ora $\varepsilon\omega - p_x k_x = 0$, dove l'asse x è stato scelto in direzione di $\boldsymbol{p}$. Da qui troviamo

$$\omega = vk_x, \tag{96,6}$$

dove $v = p_x/\varepsilon$ è la velocità della particella M. Poiché

$$-k^2 = -\omega^2 + k_x^2 + \boldsymbol{k}_\perp^2 \approx \omega^2(1 - v^2) + \boldsymbol{k}_\perp^2 \tag{96,7}$$

($\boldsymbol{k}_\perp$ è la componente del vettore $\boldsymbol{k}$ trasversale rispetto all'asse x), allora la condizione (96,4) è equivalente alla disuguaglianza $|\,\boldsymbol{k}_\perp\,| \ll m$ e alla disuguaglianza notevolmente piú debole per ω: $\omega \ll m/\sqrt{1 - v^2}$.

Dalla condizione di trasversalità della corrente J ($Jk = 0$) e usando la (96,6) discende

$$J_0 = \frac{J_x}{v} + \frac{\boldsymbol{J}_\perp \boldsymbol{k}_\perp}{\omega}.$$

---

[1]) Se le funzioni d'onda sono normalizzate a una particella per unità di volume, allora $j^\mu = (1, v)$, dove v è la velocità. Noi abbiamo convenuto di omettere nelle funzioni d'onda il fattore di normalizzazione $1/\sqrt{2\varepsilon}$. In relazione a questo in j^μ occorre introdurre il fattore supplementare 2ε e si arriva cosí all'espressione (96,5).

Quindi per il prodotto scalare jJ otteniamo

$$jJ = 2(J_0\varepsilon - J_x p_x) \approx 2\frac{\varepsilon}{\omega}\left(\boldsymbol{k}_\perp \boldsymbol{J}_\perp + \frac{\omega M^2}{\varepsilon^2} J_x\right). \qquad (96,8)$$

Sviluppiamo il prodotto Je nella (96,2) scegliendo il 4-vettore polarizzazione del fotone reale nel gauge trasversale tridimensionale: $ek = -e\boldsymbol{k} = 0$, da cui $e_x \approx -\boldsymbol{e}_\perp \boldsymbol{k}_\perp/\omega$. Allora

$$Je = -\boldsymbol{e}_\perp\left(\boldsymbol{J}_\perp - \frac{\boldsymbol{k}_\perp}{\omega} J_x\right). \qquad (96,9)$$

Confrontiamo le espressioni (96,8) e (96,9). Esse risultano proporzionali tra loro se è possibile trascurare il secondo termine tra parentesi. Poiché la corrente J è relativa al cappio in alto del diagramma (96,1b), essa non è legata con la direzione di $\boldsymbol{p}$; perciò J_x e $\boldsymbol{J}_\perp$ devono essere considerate quantità dello stesso ordine di grandezza. La legittimità della omissione citata richiede, quindi, l'osservanza delle condizioni $|\boldsymbol{k}_\perp| \ll \omega$ e $\omega \ll \varepsilon^2 |\boldsymbol{k}_\perp|/M^2$; queste condizioni non contraddicono le condizioni precedenti già imposte su $\boldsymbol{k}_\perp$ e ω.

Assumendo che nella (96,9) il fotone è polarizzato nel piano x, $\boldsymbol{k}$ (cosicché $\boldsymbol{e}_\perp \parallel \boldsymbol{k}_\perp$), e notando che in forza delle condizioni poste $\boldsymbol{e}_\perp^2 \approx \boldsymbol{e}^2 = 1$, otteniamo ora

$$M_{fi} = M_{fi}^{(r)} \frac{Ze\sqrt{4\pi}}{-k^2} \frac{2\varepsilon}{\omega} |\boldsymbol{k}_\perp|. \qquad (96,10)$$

Secondo quanto detto precedentemente si suppongono inoltre soddisfatte le condizioni

$$|\boldsymbol{k}_\perp| \ll \omega \ll m\gamma, \qquad (96,11)$$

$$\frac{\omega}{\gamma^2} \ll |\boldsymbol{k}_\perp| \ll m, \qquad (96,12)$$

dove per brevità si è indicato

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{M} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Da qui si può trovare il legame tra le rispettive sezioni d'urto. Secondo la formula generale (65,18) (nel sistema in quiete della particella m) abbiamo

$$d\sigma_r = |M_{fi}^{(r)}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{1}{4m\omega} d\rho_Q,$$

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{1}{4m\varepsilon} \frac{d^3p'}{2\varepsilon(2\pi)^3} d\rho_Q,$$

dove $d\rho_Q$ sono i pesi statistici delle particelle Q. Usando la (96,10) e la (96,7) troviamo

$$d\sigma = d\sigma_r \cdot n(\boldsymbol{k})\, d^3p', \qquad (96,13)$$

dove

$$n(\boldsymbol{k}) = \frac{Z^2e^2}{\pi^2} \frac{k_\perp^2}{\omega\left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2}. \tag{96,14}$$

Ricordiamo che $d\sigma_r$ è la sezione d'urto del processo *a*), dovuto all'urto di un fotone reale con una particella in quiete, in cui si forma il sistema di particelle Q di impulsi appartenenti a determinati intervalli. La sezione $d\sigma$, invece, è relativa al processo *b*), nel quale quello stesso sistema Q si forma nell'urto di una particella veloce (di massa M) con la medesima particella in quiete; in questo processo la particella veloce perde l'impulso $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{k}$ rimanendo sempre nell'intervallo d^3p' dei valori di $\boldsymbol{p}'$. Il fattore $n(\boldsymbol{k})$ nella (96,13) può essere interpretato come la densità (nello spazio k) del numero di fotoni, ai quali è equivalente il campo elettromagnetico di una particella veloce.

L'integrazione in d^3p' è equivalente all'integrazione in $d^3k = d\omega\, d^2k_\perp$. Integrando in $d^2k_\perp$ otteniamo la sezione del processo, in cui l'energia totale E del sistema di particelle Q cade in un determinato intervallo $dE = d\omega$ ($E - m = \varepsilon - \varepsilon' = \omega$, dove ε e ε' sono l'energia iniziale e finale della particella M). L'integrazione rispetto alle direzioni di $\boldsymbol{k}_\perp$ significa eseguire la media sulle direzioni della polarizzazione del fotone incidente (e simultaneamente moltiplicare per 2π). Dopo questo otteniamo

$$d\sigma = n(\omega)\, d\sigma_r\, d\omega, \tag{96,15}$$

dove

$$n(\omega) = \int n(\boldsymbol{k})\, 2\pi k_\perp\, dk_\perp = \frac{2Z^2e^2}{\pi\omega} \int \frac{k_\perp^3\, dk_\perp}{\left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2}.$$

L'integrale in $dk_\perp$ per grandi $k_\perp$ diverge. La divergenza, però, è solo logaritmica. Questa circostanza permette (nei limiti dell'applicabilità del metodo esposto) di ottenere la risposta in approssimazione logaritmica: si suppone che sia grande non solo l'argomento del logaritmo, ma anche il logaritmo stesso. Con questa precisione è sufficiente porre come limite superiore d'integrazione $k_{\perp\,\max} \sim m$, cioè il limite superiore della disuguaglianza (96,12). Integrando otteniamo per la distribuzione spettrale dei fotoni equivalenti (in unità ordinarie)

$$n(\omega)\, d\omega = \frac{2}{\pi} Z\alpha \ln \frac{\gamma mc^2}{\hbar\omega} \frac{d\omega}{\omega}. \tag{96,16}$$

L'approssimazione assunta significa che il coefficiente numerico nell'argomento del logaritmo rimane indeterminato: l'introduzione di tale coefficiente significherebbe l'aggiunta al grande logaritmo di una quantità relativamente piccola (~ 1) e costituirebbe una trasgressione del limite di precisione ammesso.

PROBLEMI

1. Trovare la sezione d'urto di radiazione di frenamento nell'urto di un elettrone veloce con un nucleo, partendo dalla sezione d'urto di diffusione di fotone su elettrone.

Soluzione. Nel sistema di riferimento K_1, in cui l'elettrone prima dell'urto era in quiete, il processo si può considerare come la diffusione sull'elettrone di fotoni equivalenti del campo del nucleo[1]). Secondo la (86,10) la sezione di diffusione di un elettrone su un elettrone nel sistema K_1 è

$$d\sigma_{\text{diff}}(\omega_1, \omega_1') = \pi r_e^2 \frac{m\, d\omega_1'}{\omega_1^2}\left[\frac{\omega_1}{\omega_1'} + \frac{\omega_1'}{\omega_1} + \left(\frac{m}{\omega_1'} - \frac{m}{\omega_1}\right)^2 - 2m\left(\frac{1}{\omega_1'} - \frac{1}{\omega_1}\right)\right], \quad (1)$$

dove ω_1 e ω_1' sono l'energia iniziale e finale del fotone in questo sistema. La sezione di radiazione di frenamento nel sistema K_1 è

$$d\sigma_{\text{rad}}(\omega_1') = \int d\omega_1 \cdot n(\omega_1)\, d\sigma_{\text{diff}}(\omega_1, \omega_1'), \quad (2)$$

dove $n(\omega_1)$ è la funzione (96,16). Per l'invarianza della sezione d'urto il passaggio al sistema di riferimento K, in cui è in quiete il nucleo, si riduce ad una trasformazione della frequenza ω_1'. Le frequenze ω_1' e ω' nei sistemi K_1 e K sono legate dalla formula di Doppler

$$\omega' = \gamma\omega_1'(1 - v\cos\theta_1), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (3)$$

dove θ_1 è l'angolo di diffusione nel sistema K_1. Questo stesso angolo lega ω_1' con ω_1 secondo la (86,8):

$$\frac{1}{\omega_1'} - \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{m}(1 - \cos\theta_1). \quad (4)$$

Dalla (3) e (4) troviamo

$$\omega_1' = \omega_1 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, \quad (5)$$

dove $\varepsilon = m\gamma$ e ε' sono l'energia iniziale e finale dell'elettrone nel sistema K ($\varepsilon - \varepsilon' = \omega'$). Sostituendo la (5) nella (1) otteniamo

$$d\sigma_{\text{diff}} = \pi r_e^2 \frac{m\, d\omega'}{\varepsilon\omega_1}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{m^2\omega'^2}{\varepsilon'^2\omega_1^2} - \frac{2m\omega'}{\omega_1\varepsilon'}\right).$$

Questa espressione va sostituita nella (2) e integrata in $d\omega_1$ per un dato ω' (cioè per una data ε') nei limiti tra

$$\omega_{1\max} = \frac{2\varepsilon\omega'}{m}, \quad \omega_{1\min} = \frac{m\omega'}{2\varepsilon'}$$

(questi valori si ottengono dalla (3) e (4) per $\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \pi$). A causa della rapida convergenza dell'integrale per grandi ω_1 il contributo principale in esso è dato dalla regione degli ω_1 nelle vicinanze del limite inferiore (cioè si può porre $\omega_{1\max} \to \infty$). Calcolando l'integrale con precisione logaritmica[2]) troviamo

$$d\sigma_{\text{rad}} = 4r_e^2\alpha Z \frac{d\omega'}{\omega'}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\right)\ln\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega'}.$$

---

[1]) La diffusione di fotoni virtuali su un nucleo (nel sistema di quiete del nucleo) viene esclusa dalla grande massa di quest'ultimo: la sezione d'urto di diffusione tende a zero con l'aumentare della massa della particella diffusore.

[2]) Questo significa che mediante un'integrazione per parti viene evidenziato il termine contenente il grande logaritmo, e gli altri termini vengono trascurati. Questa operazione si riduce a portare il logaritmo $\ln(\varepsilon/\omega_1)$ fuori dal segno di integrale per $\omega_1 = \omega_{1\min}$.

Per la validità di questo risultato, oltre la condizione $\varepsilon \gg m$ (elettrone ultrarelativistico), deve essere soddisfatta anche la condizione (96,11): le frequenze $\omega_1 \sim \omega_{1\min}$ essenziali nell'integrazione devono essere $\ll \varepsilon$. Da qui troviamo $\varepsilon - \varepsilon' = \omega' \ll \varepsilon\varepsilon'/m$. Con queste condizioni il risultato ottenuto coincide, come doveva essere, con precisione logaritmica con la formula (91,17).

2. Lo stesso per la radiazione di frenamento nella diffusione elettrone-elettrone.

Soluzione. In questo caso il fotone virtuale può venire diffuso sia sull'elettrone veloce che sull'elettrone di rinculo; i fotoni, equivalenti al campo di un elettrone, vengono diffusi sull'altro elettrone e viceversa. La diffusione dei fotoni virtuali sull'elettrone veloce dà la sezione d'urto $d\sigma^{(1)}_{\text{rad}}$, che coincide con la sezione d'urto di radiazione da parte di un elettrone diffuso su un nucleo a $Z = 1$.

La diffusione di fotoni virtuali sull'elettrone di rinculo dà la sezione di radiazione

$$d\sigma^{(2)}_{\text{rad}} = \int d\omega \cdot n(\omega)\, d\sigma_{\text{diff}}(\omega, \omega'),$$

dove $d\sigma_{\text{diff}}(\omega, \omega')$ è presa dalla (1) (con corrispondente cambiamento delle notazioni delle frequenze). Per la regione dei valori assunti da ω per un dato ω', abbiamo (cfr. la (4))

$$\omega' \leqslant \omega \leqslant \infty \qquad \text{per} \quad \omega' > \frac{m}{2};$$

$$\omega' \leqslant \omega \leqslant \frac{\omega'}{m - 2\omega'} \qquad \text{per} \quad \omega' < \frac{m}{2}.$$

Per $\omega' < m/2$ l'integrazione in $d\omega$ dà

$$d\sigma^{(2)}_{\text{rad}} = \frac{16}{3}\alpha r_e^2 \frac{d\omega'}{\omega'}\left(1 - \frac{\omega'}{m} + \frac{\omega'^2}{m^2}\right)\ln\frac{\varepsilon}{\omega'}$$

in accordo con la (94,4). Se, invece, $\omega' > m/2$, allora occorre distinguere il caso in cui $\omega' \sim m$ da quello in cui $\omega' \sim \varepsilon \gg m$. Nel primo di questi casi otteniamo

$$d\sigma^{(2)}_{\text{rad}} = \frac{3}{2}\alpha r_e^2 \frac{m\, d\omega'}{\omega'^2}\left(4 - \frac{m}{\omega'} + \frac{m^2}{4\omega'^2}\right)\ln\frac{\varepsilon}{m}$$

in accordo con la (94,3) (nell'argomento del logaritmo abbiamo sostituito secondo la precisione richiesta ε/ω' con ε/m). Nel caso, invece, in cui $\omega' \sim \varepsilon$ il metodo dei fotoni equivalenti non è applicabile par il calcolo di $d\sigma^{(2)}_{\text{rad}}$. La frequenza dei fotoni virtuali ω assume i valori a partire da ω', e per $\omega = \omega' \sim \varepsilon$, quindi, non è soddisfatta la condizione (96,11).

3. Determinare la sezione d'urto totale di produzione di una coppia nell'urto di un fotone con un nucleo, partendo dalla sezione d'urto di produzione di una coppia nell'urto di due fotoni.

Soluzione. L'energia del fotone nel sistema di quiete del nucleo (sistema K): $\omega = m\gamma$, $\gamma \gg 1$. Passiamo nel sistema di riferimento K_0 nel quale il nucleo si muove incontro al fotone con una velocità v_0 tale che

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2}} = \frac{\gamma}{2}.$$

In questo sistema l'energia del fotone è

$$\omega_0 = \omega\frac{1 - v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} \approx \frac{\omega}{2}\sqrt{1 - v_0^2} = m.$$

Calcoliamo la sezione d'urto cercata nel sistema K_0 come sezione d'urto di produzione di una coppia nei processi di collisione del fotone incidente ω_0 con i fotoni equivalenti del nucleo, di cui denoteremo le energie con ω':

$$\sigma = \int \sigma_{\gamma\gamma} n(\omega')\, d\omega',$$

dove $\sigma_{\gamma\gamma}$ è la sezione di produzione di una coppia da parte di due fotoni; essa è data dalla formula (1) ottenuta nel problema al § 88, nella quale ora occorre porre

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_0 \omega'}} = \sqrt{1 - \frac{m}{\omega'}}.$$

Passando dalla variabile ω' alla variabile v, abbiamo

$$\sigma = 2 r_e^2 \alpha Z \int_0^1 [v \ln [\gamma (1 - v^2)] \left\{ (3 - v^4) \ln \frac{1+v}{1-v} - 2v (2 - v^2) \right\} dv.$$

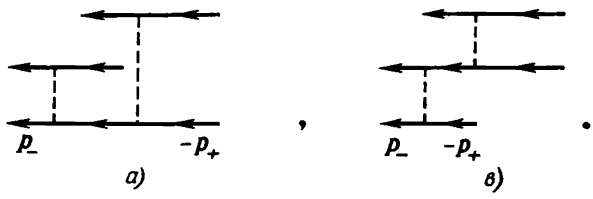
Se teniamo conto della convergenza nel limite superiore, allora l'integrazione si estende a tutta la regione dalla soglia di reazione $\omega' = m$ $(v = 0)$ fino a $\omega' = \infty$ $(v = 1)$ e viene eseguita con precisione logaritmica (cioè il logaritmo $\ln [\gamma (1 - v^2)]$ è sostituito con il suo valore in $v = 0$ e viene portato fuori dal segno di integrale). Come risultato otteniamo

$$\sigma = \frac{28}{9} \alpha Z^2 r_e^2 \ln \gamma$$

in accordo con la (92,8); la formula è valida per $\ln \gamma \gg 1$.

§ 97. *Produzione di coppie negli urti di particelle*

La produzione di una coppia elettronica nell'urto di due particelle cariche è descritta da diagrammi di due tipi:



(97,1)

Le due linee continue in alto corrispondono alle particelle collidenti, la linea in basso corrisponde alla coppia prodotta.

Esaminiamo nel caso ultrarelativistico l'urto di due particelle pesanti (nuclei). Il cambiamento dello stato di moto delle particelle stesse dovuto all'urto può essere trascurato, cioè si possono considerare le particelle come sorgenti di un campo esterno. Si hanno

corrispondentemente due diagrammi del primo tipo:

(97,2)

dove $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ sono gli « impulsi » delle trasformate di Fourier dei campi delle due particelle.

La sezione d'urto di produzione di una coppia, in questo caso, può essere determinata mediante il metodo dei fotoni equivalenti, sulla base della già nota sezione d'urto di produzione di una coppia da parte di un fotone diffuso su un nucleo. La sostituzione del campo di una delle particelle (diciamo, della prima) con uno spettro di fotoni equivalenti significa che nei diagrammi (97,2) le linee $q^{(1)}$ sono considerate linee di fotoni reali. L'insieme di questi due diagrammi diventa allora identico all'insieme dei diagrammi relativi alla produzione di una coppia da parte di un fotone diffuso sul nucleo *2*. Per ε_+, $\varepsilon_- \gg m$ la sezione d'urto dell'ultimo processo è data dalla formula (92,7). Moltiplicando questa espressione per lo spettro (96,16) dei fotoni equivalenti del primo nucleo, otteniamo (con precisione logaritmica) la sezione d'urto differenziale di produzione di una coppia nell'urto delle due particelle:

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \frac{d\varepsilon_+ \, d\varepsilon_-}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^4} \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right) \times$$
$$\times \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \ln \frac{m\gamma}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}, \qquad (97,3)$$

dove $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2} \gg 1$.

Qui si suppone che

$$m \ll \varepsilon_+, \qquad \varepsilon_- \ll m\gamma; \qquad (97,4)$$

la disuguaglianza $\gamma \gg 1$ è la condizione di applicabilità del metodo dei fotoni equivalenti. Nello stesso tempo, la regione determinata dalle disuguaglianze (97,4), coincide con la regione delle energie dell'elettrone e del positrone importanti nell'integrazione dell'espressione (97,3). Nell'integrazione in $d\varepsilon_+$ o in $d\varepsilon_-$ per una data somma $\varepsilon \equiv \varepsilon_+ + \varepsilon_-$ ($\gg m$) è essenziale la regione in prossimità del limite superiore; tralasciando i termini non contenenti il logaritmo grande otteniamo

$$d\sigma = \frac{56}{9\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \ln \frac{\varepsilon}{m} \ln \frac{m\gamma}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

L'integrale in $d\varepsilon$, preso sulla regione (97,4), diverge come il cubo del logaritmo, e ai limiti di questa regione diverge solo come il quadrato del logaritmo. In approssimazione logaritmica ($\ln \gamma \gg 1$),

quindi, la regione (97,4) è effettivamente la regione fondamentale, e l'integrale può essere calcolato nei limiti da m a $m\gamma$. Abbiamo

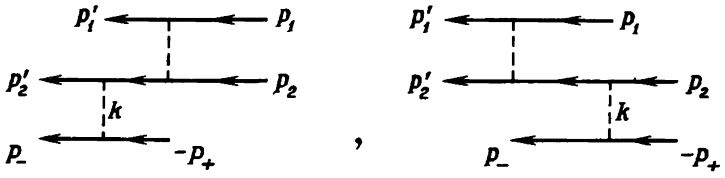
$$\int_1^\gamma \ln\xi(\ln\gamma - \ln\xi)\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{6}\ln^3\gamma,$$

e quindi la sezione d'urto totale di produzione di una coppia

$$\sigma = \frac{28}{27\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \ln^3 \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{97,5}$$

(*L. D. Landau, E. M. Lifšits*, 1934).

Esaminiamo ora il caso di velocità non relativistiche dei nuclei collidenti. In questo caso diventa importante la variazione del moto dei nuclei per effetto della loro interazione, e il contributo fondamentale nella sezione d'urto di produzione di una coppia è dato dai diagrammi del secondo tipo nella (97,1). I diagrammi di questo tipo sono quattro: i due diagrammi



(97,6)

e ancora due analoghi, nei quali il fotone virtuale k (che produce la coppia) viene emesso dal primo e non dal secondo nucleo[1]).

Supporremo che l'energia della coppia sia piccola rispetto all'energia cinetica del moto relativo dei nuclei nel sistema di riferimento del loro baricentro:

$$\varepsilon_+ + \varepsilon_- \ll \frac{Mv^2}{2} \tag{97,7}$$

(v è la velocità relativa iniziale, $M = M_1M_2/(M_1 + M_2)$ è la massa ridotta dei nuclei). In questo caso si può trascurare l'effetto di risposta della produzione della coppia sul moto dei nuclei. Se nei diagrammi (97,6) si elimina la linea elettrone-positrone, allora le parti restanti rappresentano l'emissione da parte delle particelle collidenti di un fotone virtuale di piccola frequenza ($\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-$). Torniamo cosí alla situazione esaminata nel § 95 per l'emissione di un fotone reale molle, e possiamo usare la formula (95,13) ottenuta

---

[1]) Notiamo che alla produzione di una coppia nell'urto di due elettroni corrispondono in totale 36 diagrammi: 2! 3! = 12 diagrammi del tipo *a*), che si ottengono uno dall'altro mediante permutazioni dei due elettroni iniziali e dei tre finali, e 2·2! 3! = 24 diagrammi del tipo *b*), che si ottengono analogamente dai due diagrammi (97,6).

per il caso non relativistico (con la differenza che al posto dell'ampiezza $\sqrt{4\pi}e^*$ del fotone reale comparirà ora il propagatore del fotone virtuale[1]). In tal modo, l'ampiezza di tutto il processo di produzione di una coppia si scrive nella forma

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} \frac{1}{\omega} \left(\frac{Z_1 e}{M_1} - \frac{Z_2 e}{M_2} \right) q^\lambda D_{\lambda\mu}(k) \left[-ie (\bar{u}_- \gamma^\mu u_+) \right], \qquad (97,8)$$

dove $q = (0, \boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{q} = M(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})$.

Come al solito, nel caso non relativistico il propagatore fotonico va scelto nel gauge (77,14). Dall'ampiezza (97,8) troviamo la sezione d'urto del processo:

$$d\sigma = d\sigma_{\text{diff}} \cdot e^4 \left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2} \right)^2 \times$$
$$\times \frac{d^3 p_+ d^3 p_-}{2\varepsilon_+ 2\varepsilon_- (2\pi)^6 \omega^2 (\omega^2 - \boldsymbol{k}^2)^2} (4\pi)^2 \, | \bar{u}_- \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{Q} u_+ |^2, \qquad (97,9)$$

dove

$$\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_-, \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} - \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{k} (\boldsymbol{q}\boldsymbol{k});$$

$d\sigma_{\text{diff}}$ è la sezione d'urto di diffusione elastica dei nuclei uno sull'altro (nel sistema del loro baricentro). Essa è data dalla formula di Rutherford[2])

$$d\sigma_{\text{diff}} = 4 (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{M^2 \, do}{q^4} \approx 4 (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{dq_y \, dq_z}{v^2 q^4} \qquad (97,10)$$

(l'ultima uguaglianza presuppone che siano piccole le deviazioni dei nuclei dalla direzione iniziale del loro moto: l'asse x). Sostituendo questa espressione nella (97,9) ed eseguendo la solita somma sulle polarizzazioni della coppia, otteniamo

$$d\sigma = (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{e^4}{v^2} \left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2} \right)^2 \times$$
$$\times \operatorname{Tr} \{ (\hat{p}_- + m) (\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{Q}) (\hat{p}_+ - m) (\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{Q}) \} \frac{d^3 p_+ d^3 p_- \, dq_y \, dq_z}{4\pi^4 \varepsilon_+ \varepsilon_- q^4 (\omega^2 - \boldsymbol{k}^2)^2 \omega^2}. \qquad (97,11)$$

Gli ulteriori calcoli si eseguono nell'approssimazione in cui tutti i logaritmi che compaiono nell'integrazione sono considerati

[1]) Nel caso non relativistico l'impulso del fotone è piccolo rispetto alla variazione dell'impulso delle particelle collidenti ($|\delta \boldsymbol{p}| \sim \omega/v$) e quindi può essere trascurato (rispetto a $\delta \boldsymbol{p}$) anche là dove non si può trascurare l'energia del fotone. Questo è tanto piú valido, nel caso considerato, per il fotone virtuale, per il quale il quadrato quadridimensionale $k^2 = (p_+ + p_-)^2 > 0$, e quindi $|\boldsymbol{k}| < \omega$. Con queste condizioni la differenza tra fotone reale e fotone virtuale scompare; questo giustifica l'uso della formula (95,13).

[2]) I diagrammi (97,6) sono rappresentati nell'ipotesi dell'approssimazione di Born per la diffusione dei nuclei. Tuttavia, poiché la formula di Rutherford è esatta (per l'interazione coulombiana), allora la validità dei risultati ottenuti non richiede, in realtà, l'osservanza della condizione di applicabilità dell'approssimazione di Born.

quantità grandi. Vediamo che in questa approssimazione il ruolo fondamentale è svolto dalle energie della coppia ε_+, $\varepsilon_- \gg m$ e dagli angoli θ tra $\boldsymbol{p}_+$ e $\boldsymbol{p}_-$ che cadono nella regione

$$\frac{m}{\varepsilon} \ll \theta \ll 1. \tag{97,12}$$

Trascurando i termini appropriati il calcolo della traccia nella (97,11) dà

$$\mathrm{Tr}\{\cdots\} = 16\left[(\varepsilon_+\varepsilon_- - \boldsymbol{p}_+\boldsymbol{p}_-)\left(\boldsymbol{q}^2 - \frac{(\boldsymbol{q}\boldsymbol{k})^2}{\omega^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 2(\boldsymbol{p}_+\boldsymbol{q})(\boldsymbol{p}_-\boldsymbol{q}) + \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{\omega^2}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{k})^2 - \frac{2\boldsymbol{q}\boldsymbol{k}}{\omega}(\varepsilon_+\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}_- + \varepsilon_-\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}_+)\right],$$

dove occorre porre $|\boldsymbol{p}_+| = \varepsilon_+$, $|\boldsymbol{p}_-| = \varepsilon_-$. Al denominatore, invece, abbiamo

$$\omega^2 - \boldsymbol{k}^2 \approx \varepsilon_+\varepsilon_-\theta^2 + m^2\frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-}.$$

Integrando rispetto alle direzioni di $\boldsymbol{p}_+$ e $\boldsymbol{p}_-$ per un dato angolo formato da queste direzioni, otteniamo

$$d\sigma = \frac{32}{3\pi^2}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2)\,d\varepsilon_+\,d\varepsilon_- \times$$
$$\times \frac{\theta^3\,d\theta}{\left[\theta^2 + \dfrac{m^2(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2}\right]^2}\frac{dq_y\,dq_z}{q^2}. \tag{97,13}$$

La forma della dipendenza da θ conferma la supposizione (97,12) e l'integrazione in $d\theta$ dà $\ln\dfrac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)}$. L'integrazione dell'ultimo fattore nella (97,13) viene eseguita nei limiti da $q_y = q_z = 0$ fino a $\sqrt{q_y^2 + q_z^2} \sim 1/R$, dove R è una quantità dell'ordine di grandezza del raggio dei nuclei (questo valore corrisponde alle distanze d'urto minime; vedi piú avanti); questa integrazione dà

$$\pi\ln(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)\,|\approx 2\pi\ln\frac{1}{Rq_x}.$$

D'altra parte, l'energia totale della coppia, uguale alla variazione dell'energia dei nuclei, è

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_+ + \varepsilon_-) = \frac{M}{2}(v'^2 - v^2) \approx Mv(v_x' - v_x) = vq_x,$$

da cui $q_x = \varepsilon/v$. Troviamo cosi

$$d\sigma = \frac{64}{3\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4m^2}{v^2}\left(\frac{Z_2}{M_2} - \frac{Z_1}{M_1}\right)^2\frac{\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2}{\varepsilon^4}\ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\varepsilon}\,d\varepsilon_+\,d\varepsilon_-,$$

e dopo l'integrazione in $d\varepsilon_+$ o in $d\varepsilon_-$ per una data somma ε,

$$d\sigma = \frac{2^7}{9\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4m^2}{v^2}\left(\frac{Z_2}{M_2}-\frac{Z_1}{M_1}\right)^2 \ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon}{m}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \qquad (97,14)$$

L'energia ε può essere messa in relazione con la distanza d'urto $\rho \sim v/\varepsilon$ (l'energia della coppia è dell'ordine di grandezza della frequenza corrispondente alla durata dell'urto). Perciò la divergenza logaritmica nell'integrazione in $d\varepsilon$ nella (97,14) significa un'uguale divergenza rispetto alle distanze d'urto. Questo significa che sono essenziali i grandi ρ (con ciò stesso si giustifica l'uso della sezione d'urto di diffusione (97,10) nel campo coulombiano puro del nucleo). In corrispondenza risulta essenziale la regione dei valori: $m \ll \varepsilon \ll \ll v/R$. L'integrazione della (97,14) dà la sezione d'urto totale di produzione di una coppia; come risultato definitivo troviamo (in unità ordinarie)

$$\sigma = \frac{16}{27\pi}(Z_1Z_2\alpha)^2 r_e^2\left(\frac{c}{v}\right)^2\left(\frac{Z_2m}{M_2}-\frac{Z_1m}{M_1}\right)^2 \ln^3\frac{\hbar v}{mc^2R} \qquad (97,15)$$

(*E. M. Lifšits*, 1935).

PROBLEMA

Scrivere l'espressione per la sezione di produzione di una coppia nell'urto di due nuclei veloci, corrispondente ai diagrammi (97,2).

Soluzione. L'ampiezza di reazione è

$$M_{fi} = e^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\bar{u}(p_-)\,\hat{A}^{(1)}(p_- - p)\,G(p)\,\hat{A}^{(2)}(p_+ + p)\,u(-p_+) + (1 \leftrightarrow 2),$$

dove $A^{(1)}(q)$, $A^{(2)}(q)$ sono i campi esterni creati dal primo e dal secondo nucleo il termine non scritto si ricava dal primo permutando gli indici dei nuclei.

Il potenziale $A^\mu = (A_0, \boldsymbol{A})$, creato da una particella classica in moto uniforme con la velocità $\boldsymbol{v}$, soddisfa le equazioni

$$\Box A_0 = -4\pi Ze\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t-\boldsymbol{r}_0),$$
$$\Box \boldsymbol{A} = -4\pi Ze\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t-\boldsymbol{r}_0).$$

Le trasformate di Fourier sono

$$A_0(\boldsymbol{k},\omega) = -\frac{8\pi^2Ze}{\omega^2-\boldsymbol{k}^2}\,e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_0}\delta(\omega-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}),$$

e analogamente per $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k},\omega)$. In forma quadridimensionale

$$A^\mu(q) = -\frac{8\pi^2Ze}{q^2}\,e^{iqx_0}U^\mu\delta(Uq),$$

dove U è la 4-velocità della particella, e il 4-vettore $x_0 = (0, \boldsymbol{r}_0)$. Se il nucleo *1* si trova in quiete nel centro delle coordinate ($\boldsymbol{r}_0^{(1)} = 0$), allora $\rho \equiv \boldsymbol{r}_0^{(2)}$ è il vettore distanza d'urto (nel piano perpendicolare alla direzione del moto del nucleo *2*).

Ora l'ampiezza è

$$M_{fi} = 4Z_1Z_2e^4\bar{u}(p_-)\,Qu(-p_+),$$
$$Q = \hat{U}^{(1)}(\hat{I}+I_m)\,\hat{u}^{(2)} + \hat{U}^{(2)}(\hat{I}'+I'_m)\,\hat{U}^{(1)},$$
$$\bar{Q} = \hat{U}^{(2)}(\hat{I}^*+I_m^*)\,\hat{u}^{(1)} + \hat{U}^{(1)}(\hat{I}'^*+I_m'^*)\,\hat{U}^{(2)},$$

dove I, I' sono gli integrali quadrivettoriali:

$$I = \int p \frac{e^{-i(p_+ + p)\rho} \delta [U^{(1)} (p_- - p)] \delta [U^{(2)} (p_+ + p)]}{(p_- - p)^2 (p^2 + m^2) (p_+ + p)^2} d^4p,$$

$$I' = \int p \frac{e^{-i(p_- - p)\rho} \delta [U^{(1)} (p_+ + p)] \delta [U^{(2)} (p_- - p)]}{(p_- - p)^2 (p^2 + m^2) (p_+ + p)^2} d^4p,$$

e I_m, I'_m si ottengono sostituendo sotto il segno di integrale p con m.

La probabilità di produzione di una coppia nell'urto per una data distanza d'urto è

$$dw = \frac{|M_{fi}|^2}{2\varepsilon_+ 2\varepsilon_-} \frac{d^3p_+}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_-}{(2\pi)^3},$$

e dopo la sommatoria sulle polarizzazioni della coppia

$$dw = \frac{(Z_1 Z_2 e^4)^2}{(2\pi)^4 \varepsilon_+ \varepsilon_-} \operatorname{Tr} \{(\hat{p}_- + m) Q (\hat{p}_+ - m) \bar{Q}\} d^3p_+ d^3p_-.$$

La sezione d'urto si ottiene integrando dw in $d^2\rho$[1]).

§ 98. *Emissione di un fotone da parte di un elettrone nel campo di un'onda elettromagnetica intensa*

L'applicabilità della teoria delle perturbazioni ai processi di interazione di un elettrone con il campo di radiazione presuppone (oltre alla piccolezza della costante di accoppiamento α) anche una sufficiente debolezza dell'intensità di questo campo. Se a è l'ampiezza del 4-potenziale classico del campo elettromagnetico di un'onda, allora la quantità caratteristica, in questo senso, è il rapporto adimensionale invariante

$$\xi = \frac{e\sqrt{-a^2}}{m}. \tag{98,1}$$

In questo paragrafo noi esamineremo i processi di radiazione che hanno luogo nell'interazione di un elettrone con il campo di un'onda elettromagnetica intensa, per la quale ξ può avere qualsiasi valore. Il metodo usato è basato sul fatto che si tiene conto in modo preciso di questa interazione; l'interazione dell'elettrone con i nuovi fotoni emessi può considerarsi, come prima, una piccola perturbazione[2]).

Consideriamo un'onda monocromatica piana e, per fissare le idee, polarizzata circolarmente. Scriviamo il suo 4-potenziale nella forma

$$A = a_1 \cos \varphi + a_2 \operatorname{sen} \varphi, \qquad \varphi = kx, \tag{98,2}$$

[1]) Per i calcoli che seguono vedi L. D. Landau, E. M. Lifšits, Phys. Zs. Sowjet. 6, 244 (1934).

[2]) Uno studio sistematico dei diversi processi quantistici nel campo di un'onda monocromatica piana intensa si può trovare nei lavori: A. I. Nikišov, V. I. Ritus, ŽETF 46, 776, 1768 (1964); 47, 1130 (1964); 52, 1707 (1967); N. B. Narožnyj, A. I. Nikišov, V. I. Ritus, ŽETF 47, 930 (1964). In questi articoli (che noi utilizziamo nella nostra esposizione) sono studiati, in particolare, l'emissione di un fotone e la produzione di coppie nel campo di un'onda piana con varie polarizzazioni.

dove $k^\mu = (\omega, \boldsymbol{k})$ è il 4-vettore d'onda ($k^2 = 0$), e le 4-ampiezze a_1 e a_2 sono uguali in modulo e mutuamente ortogonali:

$$a_1^2 = a_2^2 \equiv a^2, \quad a_1 a_2 = 0.$$

Supponiamo che il potenziale sia gauge per la condizione di Lorentz, cosí che $a_1 k = a_2 k = 0$.

La funzione d'onda esatta per un elettrone nel campo di una onda elettromagnetica piana generica è stata trovata nel § 40 ed è data dalle formule (40,7-8). Cambiamo, tuttavia, la sua normalizzazione: imponiamo che ψ_p corrisponda alla densità spaziale media unitaria del numero di particelle, procedimento simile alla normalizzazione delle funzioni d'onda delle particelle libere secondo « una particella nell'unità di volume ». Poiché per la funzione (40,7) la densità media è $\bar{j}_0 = q_0/p_0$, allora per ottenere la normalizzazione richiesta occorre moltiplicarla per $\sqrt{p_0/q_0}$, occorre cioè sostituire nella (40,7) il fattore $1/\sqrt{2p_0}$ con $1/\sqrt{2q_0}$. Per un'onda con il 4-potenziale (98,2) otteniamo:

$$\psi_p = \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\hat{k}\hat{a}_1 \cos\varphi + \hat{k}\hat{a}_2 \operatorname{sen}\varphi)\right] \times$$
$$\times \frac{u(p)}{\sqrt{2q_0}} \exp\left\{-ie\frac{(a_1 p)}{(kp)}\operatorname{sen}\varphi + ie\frac{(a_2 p)}{(kp)}\cos\varphi - iqx\right\}, \qquad (98,3)$$

dove

$$q^\mu = p^\mu - e^2 \frac{a^2}{2(kp)} k^\mu. \qquad (98,4)$$

Secondo la (40,14) il 4-vettore q è il 4-impulso cinetico medio dell'elettrone; lo chiameremo quasi-impulso.

L'elemento della matrice S per la transizione dell'elettrone dallo stato ψ_p nello stato $\psi_{p'}$ con emissione di un fotone con 4-impulso $k^{\mu\prime} = (\omega', \boldsymbol{k}')$ e 4-vettore polarizzazione e' ha la forma

$$S_{fi} = -ie \int (\psi_{p'} \hat{e}' \psi_p) \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\omega'}} d^4x. \qquad (98,5)$$

L'espressione integranda nella (98,5) è una combinazione lineare delle quantità

$$e^{-i\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi},$$
$$\cos\varphi\, e^{-i\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi},$$
$$\operatorname{sen}\varphi\, e^{-i\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi}.$$

dove

$$\alpha_1 = e\left(\frac{a_1 p}{kp} - \frac{a_1 p'}{kp'}\right), \qquad \alpha_2 = e\left(\frac{a_2 p}{kp} - \frac{a_2 p'}{kp'}\right). \qquad (98,6)$$

Insieme con il fattore $\exp[i(k' + p' - p)x]$ queste quantità esprimono tutta la dipendenza da x dell'espressione integranda.

Sviluppiamole ora in serie di Fourier denotando i coefficienti dello sviluppo rispettivamente con B_s, B_{1s}, B_{2s}, ad esempio:

$$-i\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi = e^{-i\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_0)} = \sum^{\infty} B_s e^{-is\varphi}.$$

Questi coefficienti si esprimono attraverso le funzioni di Bessel secondo le formule

$$\begin{aligned} B_s &= J_s(z)\, e^{is\varphi_0}, \\ B_{1s} &= \frac{1}{2}\left[J_{s+1}(z)\, e^{i(s+1)\varphi_0} + J_{s-1}(z)\, e^{i(s-1)\varphi_0}\right], \\ B_{2s} &= \frac{1}{2i}\left[J_{s+1}(z)\, e^{i(s+1)\varphi_0} - J_{s-1}(z)\, e^{i(s-1)\varphi_0}\right], \end{aligned} \tag{98,7}$$

dove

$$z = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{\alpha_1}{z}, \quad \operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{\alpha_2}{z}.$$

Le funzioni B_s, B_{1s}, B_{2s} sono legate tra loro dalla relazione

$$\alpha_1 B_{1s} + \alpha_2 B_{2s} = sB_s, \tag{98,8}$$

che è una conseguenza della nota relazione per le funzioni di Bessel: $J_{s-1}(z) + J_{s+1}(z) = 2sJ_s(z)/z$.

L'elemento di matrice (98,5) assume quindi la forma

$$S_{fi} = \frac{1}{(2\omega' 2q_0 2q_0')^{1/2}} \sum_s M_{fi}^{(s)} (2\pi)^4 i\delta^{(4)}(sk+q-q'-k'), \tag{98,9}$$

dove

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(s)} = -e\sqrt{4\pi}\,\bar{u}(p')\Big\{ &\left(\hat{e}' - e^2 \frac{a_1^2 (ke')\hat{k}}{2(kp)(kp')}\right) B_s + \\ &+ e\left(\frac{\hat{a}_1 \hat{k} \hat{e}'}{2(kp')} + \frac{\hat{e}' \hat{k} \hat{a}_1}{2(kp)}\right) B_{1s} + e\left(\frac{\hat{a}_2 \hat{k} \hat{e}'}{2(kp')} + \frac{\hat{e}' \hat{k} \hat{a}_2}{2(kp)}\right) B_{2s}\Big\}\, u(p). \end{aligned} \tag{98,10}$$

In tal modo, l'elemento di matrice S_{fi} è una somma infinita di termini, a ciascuno dei quali corrisponde la legge di conservazione

$$sk + q = q' + k'. \tag{98,11}$$

Poiché

$$q^2 = q'^2 = m^2(1+\xi^2) \equiv m_*^2 \tag{98,12}$$

(cfr. la (40,15)), e $k^2 = k'^2 = 0$, allora l'uguaglianza (98 11) è possibile solo per $s \geqslant 1$. Il termine s-esimo della somma descrive l'emissione del fotone k' dovuto all'assorbimento dall'onda di s fotoni con 4-impulso k. Dalla forma dell'uguaglianza (98,11) è evidente che tutte le relazioni cinematiche che valgono per l'effetto Compton, varranno anche per i processi considerati se sostituiamo gli impulsi dell'elettrone con i quasi-impulsi q, e l'impulso del fotone incidente

con il 4-vettore sk. In particolare, per la frequenza del fotone emesso nel sistema di riferimento in cui l'elettrone, in media, si trova in quiete ($\boldsymbol{q} = 0$, $q_0 = m_*$), abbiamo

$$\omega' = \frac{s\omega}{1 + \frac{s\omega}{m_*}(1 - \cos\theta)}, \tag{98,13}$$

dove θ è l'angolo tra $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}'$ (cfr. la (86,8)). Si può dire che le frequenze ω' sono delle armoniche della frequenza ω.

Usando le notazioni da noi adottate (§ 65) l'ampiezza del processo di radiazione della s-esima armonica coincide con $M_{fi}^{(s)}$, e l'espressione

$$dW_s = |M_{fi}^{(s)}|^2 \frac{d^3k'd^3q'}{(2\pi)^6\, 2\omega' 2q_0 2q_0'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \tag{98,14}$$

dà la corrispondente probabilità differenziale (nell'unità di tempo e di volume)[1]).

La struttura dell'ampiezza (98,10) è simile alla struttura delle ampiezze di diffusione con onde piane. Perciò l'operazione di sommatoria sulle polarizzazioni delle particelle viene eseguita nel modo solito. Dopo la sommatoria sulle polarizzazioni dell'elettrone e del fotone finali e il calcolo della media sulle polarizzazioni dell'elettrone iniziale, si ottiene

$$dW_s = \frac{e^2m^2}{4\pi} \frac{d^3k'd^3q'}{q_0q_0'\omega'} \delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \times$$
$$\times \left\{ -2J_s^2(z) + \xi^2 \left(1 + \frac{(kk')^2}{2(kp)(kp')}\right)(J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2) \right\}. \tag{98,15}$$

Per l'integrazione dell'espressione (98,15) notiamo che per la simmetria assiale del campo di un'onda polarizzata circolarmente, la probabilità differenziale non dipende dall'azimut comune φ attorno alla direzione $\boldsymbol{k}$. Insieme con la presenza di una funzione δ questo fatto dà la possibilità di eseguire l'integrazione rispetto a tutte le variabili eccetto una; prendiamo per quest'ultima la quantità invariante $u = (kk')/(kp')$. Allora, dopo l'integrazione in $d^3k d\varphi\, d \times$ $\times (q_0' + \omega')$ abbiamo

$$\delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \frac{d^3q'd^3k'}{q_0'\omega'} \to \frac{2\pi\, du}{(1+u)^2}.$$

Effettivamente, nel sistema del baricentro (sistema in cui $s\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}' = 0$) l'integrazione detta dà $2\pi\, |\boldsymbol{q}'|\, d\cos\theta/E_s$, dove $E_s = s\omega + q_0 = \omega' + q_0'$. e θ è l'angolo tra $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{q}'$ (cfr. con la tra-

[1]) Notiamo il fatto che la normalizzazione delle funzioni ψ_p secondo l'unità di densità corrisponde alla normalizzazione secondo una funzione delta di $\boldsymbol{q}$ (cfr. la (40,17), dove il fattore q_0/p_0 nella parte destra dell'uguaglianza ora viene a mancare). Proprio per questo il numero di stati finali dell'elettrone deve misurarsi con l'element d^3q'.

sformazione (65,12)). D'altra parte, in questo stesso sistema

$$u = \frac{E_s}{q_0' - |q'| \cos\theta} - 1, \quad d\cos\theta = \frac{E_s\, du}{|q'|\,(1+u)^2}.$$

All'intervallo $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ corrisponde l'intervallo

$$0 \leqslant u \leqslant u_s \equiv \frac{E_s^2}{m_*^2} - 1 = \frac{2s\,(kp)}{m_*^2}$$

(nel fare le trasformazioni occorre tenere presente che $kp = kq$).

In tal modo, la probabilità totale di radiazione dall'unità di volume nell'unità di tempo è[1])

$$W = \sum_{s=1}^{\infty} W_s = \frac{e^2 m^2}{4q_0} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{u_s} \frac{du}{(1+u)^2} \Big\{ -4J_s^2(z) + \\ + \xi^2 \left(2 + \frac{u^2}{1+u}\right)(J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2) \Big\}, \qquad (98,16)$$

dove[2])

$$u = \frac{(kk')}{(kp')}, \quad u_s = 2s\frac{(kp)}{m_*^2}, \quad z = 2sm^2 \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{\frac{u}{u_s}\left(1 - \frac{u}{u_s}\right)}. \qquad (98,17)$$

Per $\xi \ll 1$ (condizione di applicabilità della teoria perturbativa) le espressioni integrande nella (98,16) possono essere scomposte in serie di potenze di ξ. Cosí, per il primo termine dello sviluppo di W si ottiene

$$W_1 \approx \frac{e^2 m^2}{4p_0} \xi^2 \int_0^{u_1} \left[2 + \frac{u^2}{1+u} - 4\frac{u}{u_1}\left(1 - \frac{u}{u_1}\right)\right] du = \\ = \frac{e^2 m^2}{4p_0} \xi^2 \left[\left(1 - \frac{4}{u_1} - \frac{8}{u_1^2}\right) \ln(1+u_1) + \\ + \frac{1}{2} + \frac{8}{u_1} - \frac{1}{2(1+u_1)^2}\right], \qquad (98,18)$$

e $u_1 \approx 2\,(kp)/m^2$. Come c'era da aspettarsi, questo risultato coincide con la formula di Klein — Nishina per la diffusione di un fotone su un elettrone: ponendo nella (98,18) — $a^2 = 4\pi/\omega$, $\xi^2 = 4\pi e^2/m^2\omega$ e dividendo per la densità del flusso incidente (65,14), si ritorna alla

---

[1]) Questa formula venne ottenuta anche da *I. I. Goldman* (1964).

[2]) Per calcolare z occorre preventivamente notare che $z^2 = (a_1 Q)^2 + (a_2 Q)^2 = a^2 Q^2$, dove $Q = q/(kq) - q'/(kq')$. Di questo è facile convincersi scegliendo un sistema di riferimento in cui $(a_1)_0 = (a_2)_0 = 0$, e i vettori $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, k sono diretti secondo gli assi x^1, x^2, x^3 e notando che in forza della relazione $kQ = 0$ sarà $Q_0 = Q_3$.

(86,16) (la sezione d'urto integrale di diffusione non dipende dalla polarizzazione iniziale del fotone)[1]).

Scriviamo anche l'espressione per la probabilità di emissione della seconda armonica (primo termine dello sviluppo di W_s $\xi \ll 1$):

$$W_2 \approx \frac{e^2 m^2 \xi^4}{p_0} \int_0^{u_2} \frac{du}{(1+u)^2} \frac{u}{u_2} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right) \left[2 + \frac{u^2}{1+u} - 4 \frac{u}{u_2} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right)\right] =$$

$$= \frac{e^2 m^2 \xi^4}{p_0} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3u_1} - \frac{4}{u_1^2} - \frac{2}{u_1^3} - \frac{1}{2(1+2u_1)} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2u_1} - \frac{3}{2u_1^2} - \frac{3}{u_1^3} - \frac{1}{u_1^4}\right) \ln(1+2u_1)\right]. \qquad (98,19)$$

In generale, il termine principale in W_s (per s non troppo grandi) è proporzionale a ξ^{2s}.

Soffermiamoci ora sul caso opposto: $\xi \gg 1$. Il parametro ξ si può rendere grande, ad esempio, diminuendo la frequenza ω per una data intensità del campo (è evidente che $\xi = eF/m\omega$, dove F è l'ampiezza dell'intensità del campo). È chiaro perciò che il caso $\xi \gg 1$, sostanzialmente, si riduce a processi in un campo costante omogeneo, le cui intensità $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ sono mutuamente perpendicolari e uguali in modulo (tale campo convenzionalmente lo chiameremo campo incrociato). La probabilità di radiazione in questo campo si può ottenere eseguendo il passaggio al limite $\xi \to \infty$, ma risulta piú semplice fare i calcoli direttamente per un campo costante, scegliendo il 4-potenziale nella forma

$$A^\mu = a_j^\mu \varphi, \quad \varphi = kx, \quad (ak) = 0 \qquad (98,20)$$

(in modo che $F_{\mu\nu} = k_\mu a_\nu - k_\nu a_\mu =$ costante). La funzione d'onda esatta di un elettrone in questo campo si ottiene sostituendo la (98,20) nelle (40,7-8):

$$\psi_p = \left[1 + e \frac{\hat{k}\hat{a}}{2(kp)} \varphi\right] \times$$

$$\times \frac{u(p)}{\sqrt{2p_0}} \exp\left\{-ie \frac{(ap)}{2(kp)} \varphi^2 + ie^2 \frac{a^2}{6(kp)} \varphi^3 - ipx\right\}. \qquad (98,21)$$

Il risultato che si ottiene mediante questa formula è esatto per la radiazione da parte di un elettrone in un campo incrociato per qualsiasi energia dell'elettrone. È notevole, tuttavia, il fatto che nel caso ultrarelativistico questo risultato (rappresentato in una forma adeguata, vedi piú avanti) è valido per la radiazione di un

---

[1]) Il valore indicato di a^2 corrisponde alla normalizzazione del 4-potenziale « secondo un fotone nell'unità di volume ». Per determinarlo occorre uguagliare ω all'energia di un campo classico (reale) col 4-potenziale (98,2).

elettrone non solo in un campo elettromagnetico incrociato, ma anche in qualsiasi campo costante omogeneo, ivi compreso un campo costante magnetico (che abbiamo studiato nel § 59).

Per precisare questa affermazione notiamo che lo stato della particella in un campo costante omogeneo generico è determinato da altrettanti numeri quantici che lo stato di una particella libera, e questi numeri quantici si possono sempre scegliere in modo che « allo spegnimento » del campo essi diventino i numeri quantici di una particella libera, cioè il suo 4-impulso p^μ ($p^2 = m^2$). In tal modo, lo stato di una particella in un campo costante sarà descritto dal 4-vettore costante p.

L'intensità totale di radiazione, essendo una quantità invariante, dipende solo dagli invarianti che si possono comporre con i 4-tensori costanti $F_{\mu\nu}$ e il 4-vettore p^μ[1]). Tenendo inoltre presente che $F_{\mu\nu}$ deve entrare nell'intensità solo insieme con la carica e, otteniamo tre invarianti adimensionali:

$$\chi^2 = -\frac{e^2}{m^6}(F_{\mu\nu}p^\nu)^2 = -\frac{e^2}{m^6}a^2(kp)^2,$$

$$f = \frac{e^2(F_{\mu\nu})^2}{m^4} \qquad g = \frac{e^2}{m^4}e_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\lambda\mu}F^{\nu\rho}. \tag{98,22}$$

In un campo incrociato $f = g \equiv 0$, mentre nel caso generale sono differenti da zero tutti e tre i parametri. Ma se l'elettrone è ultrarelativistico ($p_0 \gg m$), e il vettore $\boldsymbol{p}$ forma con i campi $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ angoli $\theta \gg m/p_0$, allora $\chi^2 \gg f$, g (in altre parole, per una particella ultrarelativistica per quasi tutte le direzioni di $\boldsymbol{p}$ qualsiasi campo è come se fosse incrociato). Se, inoltre, le intensità del campo $|\boldsymbol{E}|$, $|\boldsymbol{H}| \ll m^2/e$ ($=m^2c^3/e\hbar$), allora $|f|$, $|g| \ll 1$[2]). Con queste condizioni l'intensità, calcolata per un campo incrociato ed espressa attraverso l'invariante χ, varrà anche per la radiazione in un qualsiasi campo costante.

L'invariante χ si esprime attraverso le intensità $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ secondo la formula

$$\chi^2 = \frac{e^2}{m^6}\{(|\boldsymbol{pH}| + p_0\boldsymbol{E})^2 - (\boldsymbol{pE})^2\}.$$

Per un campo magnetico costante χ coincide con la quantità (59,3) introdotta nel § 59, e quindi i ragionamenti qui esposti forniscono un altro modo per ottenere i risultati del § 59[3]).

---

[1]) Ragionamenti analoghi possono venire fatti anche per l'intensità differenziale.

[2]) Notiamo che in questo caso nella quantità $(F_{\mu\nu}p^\nu)^2$, con la medesima precisione, si può considerare p come l'ordinario 4-impulso cinetico della particella.

[3]) Per i calcoli fatti con questo metodo vedi A. I. Nikišov, V. I. Ritus, ŽETF 46, 1768 (1964).

Capitolo XI

PROPAGATORI ESATTI E PARTI DI VERTICE

§ 99. *Operatori di campo nella rappresentazione di Heisenberg*

Finora, studiando alcuni processi concreti di elettrodinamica, noi ci siamo limitati alla prima approssimazione non nulla della teoria perturbativa. Passeremo ora allo studio degli effetti che insorgono se si tiene conto anche delle approssimazioni di ordine superiore. Questi effetti vengono chiamati *correzioni radiative*.

Una piú profonda comprensione della struttura delle approssimazioni di ordine superiore può essere raggiunta sulla base di uno studio preliminare di alcune proprietà generali di cui godono le ampiezze di diffusione esatte (cioè non sviluppate secondo le potenze di e^2). Nel § 73 abbiamo visto che i successivi termini della serie perturbativa si esprimono attraverso gli operatori di campo nella rappresentazione di interazione, operatori, cioè, la cui dipendenza temporale è determinata dall'hamiltoniano del sistema di particelle libere H_0. Le ampiezze di diffusione esatte, invece, si esprimono in modo piú conveniente attraverso gli operatori di campo non in tale rappresentazione, ma nella rappresentazione di Heisenberg, in cui la dipendenza dal tempo è determinata direttamente dall'hamiltoniano esatto del sistema delle particelle interagenti $H = H_0 + V$.

Seguendo la regola generale di composizione degli operatori di Heisenberg, abbiamo

$$\psi(x) \equiv \psi(t, \boldsymbol{r}) = e^{iHt}\psi(\boldsymbol{r})\, e^{-iHt} \tag{99,1}$$

e analogamente per $\overline{\psi}(x)$ e $A(x)$, dove $\psi(\boldsymbol{r}), \ldots$ sono operatori indipendenti dal tempo (operatori di Schrödinger)[1]. Notiamo subito che gli operatori di Heisenberg (per uguali istanti di tempo) soddisfano le stesse regole di commutazione degli operatori in rappresentazione di Schrödinger o in rappresentazione di interazione. Infatti, abbiamo, ad esempio,

$$\{\psi_i(t, \boldsymbol{r})\, \overline{\psi}_k(t, \boldsymbol{r}')\}_+ = e^{iHt}\{\psi_i(\boldsymbol{r})\, \overline{\psi}_k(\boldsymbol{r}')\}_+\, e^{-iHt} = \\ = \gamma^0_{ik}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{99,2}$$

[1]) In questo capitolo gli operatori con argomento temporale si riferiranno alla rappresentazione di Heisenberg; gli operatori in rappresentazione di interazione si distingueranno per l'indice supplementare int.

(cfr. la (76,6)). Analogamente, gli operatori $\psi(t, \boldsymbol{r})$ e $A(t, \boldsymbol{r}')$ sono mutuamente commutativi:

$$\{\psi_i(t, \boldsymbol{r}) A(t, \boldsymbol{r}')\}_- = 0$$

(per istanti di tempo differenti questo non è assolutamente piú vero!).

L'« equazione del moto », alla quale soddisfa l'operatore di Heisenberg ψ, può essere ricavata secondo la formula generale III (13,7):

$$-i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = H\psi(x) - \psi(x) H. \tag{99,3}$$

Per l'hamiltoniano le rappresentazioni di Schrödinger e di Heisenberg sono identiche, ed inoltre l'hamiltoniano si esprime attraverso gli operatori di campo allo stesso modo in ambedue queste rappresentazioni. Nel caso considerato, calcolando la parte destra nella (99,3), si può omettere nell'hamiltoniano la parte dipendente solo dall'operatore $A(x)$ (hamiltoniano del campo elettromagnetico libero), poiché questa parte commuta con $\psi(x)$. In accordo con la (21,13) e la (43,3), abbiamo

$$\begin{aligned} H = \int \psi^*(t, \boldsymbol{r})(\alpha \mathbf{p} + \beta m)\psi(t, \boldsymbol{r})\, d^3x + \\ + e \int \overline{\psi}(t, \boldsymbol{r}) \hat{A}(t, \boldsymbol{r}) \psi(t, \boldsymbol{r})\, d^3x = \\ = \int \overline{\psi}(t, \boldsymbol{r}) \{\gamma \mathrm{p} + m + e\hat{A}(t, \boldsymbol{r})\} \psi(t, \boldsymbol{r})\, d^3x. \end{aligned} \tag{99,4}$$

Calcolando il commutatore $\{H\psi(t, \boldsymbol{r})\}_-$ mediante la (99,2) ed eliminando la funzione delta integrando in d^3x, otteniamo

$$(\hat{\mathrm{p}} - e\hat{A} - m)\psi(t, \boldsymbol{r}) = 0. \tag{99,5}$$

Come ci si doveva aspettare, l'operatore $\psi(t, \boldsymbol{r})$ soddisfa un'equazione formalmente coincidente con l'equazione di Dirac.

L'equazione per l'operatore del campo elettromagnetico $A(t, \boldsymbol{r})$, invece, è a priori evidente dalla corrispondenza con il caso classico. Nelle condizioni in cui questo caso si realizza (grandi numeri di occupazione; vedi § 5), dopo avere mediato sullo stato del campo, l'equazione operatoriale deve divenire l'equazione classica di Maxwell per i potenziali II (30,2). È chiaro perciò, che l'equazione per l'operatore coincide nella forma con l'equazione di Maxwell, cioè (per un gauge generico) abbiamo

$$\partial^\nu \partial_\mu A^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\mu A^\nu(x) = -4\pi e j^\nu(x), \tag{99,6}$$

dove $j^\nu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$ è l'operatore di corrente, che soddisfa identicamente l'equazione di continuità[1])

$$\partial_\nu j^\nu(x) = 0. \tag{99,7}$$

Il fatto essenziale è che le equazioni (99,6) sono lineari in A^μ e j^μ, e quindi non sorge il problema dell'ordine di successione di questi operatori.

Analogamente alle corrispondenti equazioni per le funzioni d'onda, il sistema di equazioni operatoriali (99,6-7) è invariante per le trasformazioni di gauge

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x), \quad \psi(x) \to \psi(x)e^{ie\chi}, \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)e^{-ie\chi}, \tag{99,8}$$

dove $\chi(x)$ è un operatore reale generico, che commuta (per uguali istanti di tempo) con ψ[2]).

Stabiliamo ora la relazione tra gli operatori in rappresentazione di Heisenberg e in rappresentazione di interazione. Al fine di semplificare i ragionamenti è opportuno fare la seguente supposizione formale (che non influisce sul risultato finale): l'interazione $V(t)$ « viene accesa » adiabaticamente nell'intervallo da $t = -\infty$ a valori di tempo finiti. Allora per $t \to -\infty$ le due rappresentazioni, di Heisenberg e di Schrödinger, coincidono. Coincidono tra loro anche le corrispondent funzioni d'onda del sistema Φ e Φ_{int}:

$$\Phi_{\text{int}}(t = -\infty) = \Phi. \tag{99,9}$$

D'altra parte, la funzione d'onda nella rappresentazione di Heisenberg è indipendente dal tempo (tutta la dipendenza temporale è trasferita sugli operatori), mentre nella rappresentazione d'interazione per la dipendenza della funzione d'onda dal tempo abbiamo, secondo la (73,7),

$$\Phi_{\text{int}}(t) = S(t, -\infty)\,\Phi_{\text{int}}(-\infty), \tag{99,10}$$

dove[3])

$$S(t_2, t_1) = T\exp\left\{-i\int_{t_1}^{t_2} V(t')\,dt'\right\}. \tag{99,11}$$

---

[1]) Gli operatori $A^\mu_{\text{int}}(x)$, invece, che corrispondono al campo elettromagnetico libero, soddisfano a questa stessa equazione priva della parte destra:

$$\partial^\nu\partial_\mu A^\mu_{\text{int}}(x) - \partial^\mu\partial_\mu A^\nu_{\text{int}}(x) = 0. \tag{99,6a}$$

[2]) Sottolineiamo che qui si parla proprio degli operatori di Heisenberg ψ. Nella rappresentazione d'interazione la trasformazione di gauge dei potenziali elettromagnetici non interessa gli operatori ψ.

[3]) Notiamo le evidenti proprietà della matrice S:

$$S(t, t_1)\,S(t_1, t_0) = S(t, t_0),$$
$$S(t, t_0)\,S(t_0, t) = 1. \tag{99,11a}$$

Confrontando la (99,10) con la (99,9) troviamo la relazione

$$\Phi_{\text{int}}(t) = S(t, -\infty)\,\Phi, \tag{99,12}$$

che stabilisce il legame tra le funzioni d'onda nelle due rappresentazioni. Corrispondentemente, la formula di trasformazione degli operatori è

$$\psi(t, r) = S^{-1}(t, -\infty)\,\psi_{\text{int}}(t, r)\,S(t, -\infty) = \\ = S(-\infty, t)\,\psi_{\text{int}}(t, r)\,S(t, -\infty) \tag{99,13}$$

(analogamente per $\bar{\psi}$ e A).

Facciamo, per concludere, ancora un'osservazione generale. Abbiamo già ripetutamente fatto notare che nella teoria quantistica relativistica il significato fisico degli operatori di campo è assai limitato a causa del fatto che le fluttuazioni del vuoto hanno valori infiniti. Questo è a maggior ragione valido per gli operatori in rappresentazione di Heisenberg, i quali, di fatto, contengono anche le divergenze dovute all'interazione. I paragrafi 99-106 di questo capitolo sono dedicati all'esposizione della teoria formale, in cui i problemi della rimozione di questi infiniti non sono considerati e le operazioni vengono eseguite con tutte le quantità, come se esse fossero finite. I risultati ottenuti in tal modo hanno essenzialmente un valore euristico: essi permetteranno di chiarire piú profondamente il senso dell'analisi perturbativa; è possibile che essi continueranno a valere in una qualche forma, anche in una futura teoria libera da queste difficoltà[1]).

§ 100. *Propagatore fotonico esatto*

Il ruolo fondamentale nel formalismo della teoria esatta (cioè non sviluppata secondo le potenze di e^2) è svolto dai concetti di propagatori esatti[2]).

Il *propagatore fotonico esatto* (che noi denoteremo con la lettera in corsivo $\mathscr{D}$) è definito dalla formula

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x - x') = i\,\langle 0|\,\mathrm{T}A_\mu(x)\,A_\nu(x')\,|0\rangle, \tag{100,1}$$

nella quale $A_\mu(x)$ sono operatori di Heisenberg, a differenza della rappresentazione (77,1):

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0\,|\mathrm{T}A_\mu^{\text{int}}(x)\,A_\nu^{\text{int}}(x')\,|0\rangle, \tag{100,2}$$

---

[1]) Dopo tutto, il formalismo matematico qui sviluppato trova applicazione anche nella fisica statistica quantistica, dove le divergenze, caratteristiche della teoria dei campi, non compaiono affatto.

[2]) Questi concetti furono introdotti per la prima volta da *F. Dyson* (1949); a lui appartiene, fondamentalmente, anche la costruzione di tutto il formalismo esposto in questo capitolo.

in cui figuravano operatori in rappresentazione d'interazione. A differenza del propagatore esatto (100,1), la funzione (100,2) può essere chiamata *propagatore di fotoni liberi*.

In conseguenza dell'impossibilità di un calcolo esatto del valore medio (100,1), è impossibile ottenere un'espressione analitica per $\mathscr{D}_{\mu\nu}$, anche se la definizione (100,1) permette di stabilire alcune proprietà generali di questa funzione. Di questo ci occuperemo nel § 108, mentre ora ci dedicheremo al calcolo di $\mathscr{D}_{\mu\nu}$ secondo la teoria delle perturbazioni, mediante la tecnica dei diagrammi. Per fare questo è necessario esprimere $\mathscr{D}_{\mu\nu}$ attraverso gli operatori in rappresentazione d'interazione.

Sia dapprima $t > t'$. Usando la relazione tra $A(x)$ e $A_{\text{int}}(x)$ (cfr. la (99,13)), scriviamo

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(x') | 0\rangle =$$
$$= i\langle 0 | S(-\infty, t) A_\mu^{\text{int}}(x) S(t, -\infty) \times$$
$$\times S(-\infty, t') A_\nu^{\text{int}}(x') S(t', -\infty) | 0\rangle.$$

Usando la (99,11a), operiamo la sostituzione

$$S(t, -\infty) S(-\infty, t') = S(t, t'),$$
$$S(-\infty, t) = S(-\infty, +\infty) S(\infty, t).$$

Allora

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x') =$$
$$= i\langle 0 | S^{-1} [S(\infty, t) A_\mu^{\text{int}}(x) S(t, t') A_\nu^{\text{int}}(x') S(t', -\infty)] | 0\rangle, \quad (100,3)$$

dove per brevità

$$S \equiv S(+\infty, -\infty). \quad (100,4)$$

Poiché, secondo la definizione (99,11), $S(t_2, t_1)$ contiene solo operatori presi nell'intervallo di tempo tra t_1 e t_2, disposti in ordine cronologico, è evidente allora che tutti i fattori operatoriali compresi tra parentesi quadra nella (100,3) sono disposti in ordine decrescente di tempo da sinistra verso destra. Premettendo alla parentesi il simbolo di ordinamento cronologico T, noi possiamo quindi cambiare arbitrariamente l'ordine dei fattori, poiché l'operatore T si dispone automaticamente nell'ordine dovuto. Utilizzando questa proprietà, riscriviamo l'espressione tra parentesi nella forma

$$[\cdots] = T[A_\mu^{\text{int}}(x) A_\nu^{\text{int}}(x') S(\infty, t) S(t, t') S(t', -\infty)] =$$
$$= T[A_\mu^{\text{int}}(x) A_\nu^{\text{int}}(x') S].$$

In tal modo

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0 | S^{-1} T[A_\mu^{\text{int}}(x) A_\nu^{\text{int}}(x') S] | 0\rangle. \quad (100,5)$$

È facile convincersi in maniera analoga che questa formula è valida anche per $t < t'$.

Mostriamo ora che è possibile portare il fattore S^{-1} fuori dal segno di media nel vuoto sotto forma di un fattore di fase. A tal fine ricordiamo che la funzione d'onda di Heisenberg del vuoto Φ coincide con il valore $\Phi_{\text{int}}(-\infty)$ della funzione d'onda di questo stesso stato nella rappresentazione d'interazione (vedi la (99,9)). D'altra parte, secondo la (73,8) abbiamo

$$S\Phi_{\text{int}}(-\infty) \equiv S(+\infty, -\infty)\,\Phi_{\text{int}}(-\infty) = \Phi_{\text{int}}(+\infty).$$

Ma il vuoto costituisce uno stato rigorosamente stazionario; in esso non sono possibili processi spontanei di creazione di particelle. In altre parole, con lo scorrere del tempo il vuoto rimane vuoto; questo significa che $\Phi_{\text{int}}(+\infty)$ può differire da $\Phi_{\text{int}}(-\infty)$ solo per un fattore di fase $e^{i\alpha}$. Perciò

$$S\Phi_{\text{int}}(-\infty) = e^{i\alpha}\Phi_{\text{int}}(-\infty) = \langle 0 \| S \| 0\rangle\,\Phi_{\text{int}}(-\infty), \qquad (100,6)$$

oppure, eseguendo la coniugazione complessa e tenendo conto dell'unitarietà dell'operatore S, otteniamo

$$\Phi^*_{\text{int}}(-\infty)\,S^{-1} = \langle 0 | S | 0\rangle^{-1}\,\Phi^*_{\text{int}}(-\infty).$$

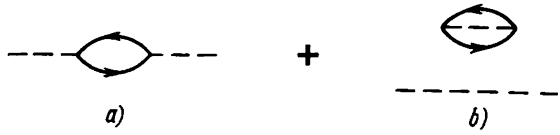
Da qui è chiaro che l'espressione (100,5) può essere riscritta nella forma

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\,\frac{\langle 0 | T A^{\text{int}}_{\mu}(x)\, A^{\text{int}}_{\nu}(x')\, S | 0\rangle}{\langle 0 | S | 0\rangle}. \qquad (100,7)$$

Sostituendo qui (al numeratore e al denominatore) lo sviluppo (73,10) per S ed eseguendo la media mediante il teorema di Wick (§ 78), noi otteniamo lo sviluppo di $\mathscr{D}_{\mu\nu}$ secondo le potenze di e^2.

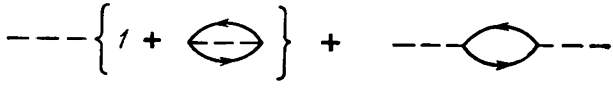
Al numeratore della (100,7) le espressioni sotto il segno di media differiscono dagli elementi di matrice considerati nel § 78, del tipo (78,1), solo per il fatto che al posto degli operatori « esterni » di creazione e di distruzione dei fotoni, compaiono in essi gli operatori $A^{\text{int}}_{\mu}(x)$ e $A^{\text{int}}_{\nu}(x')$. Poiché tutti i fattori dei prodotti sotto il segno di media stanno sotto il simbolo di ordinamento cronologico, allora le contrazioni di questi operatori con gli operatori « interni » $A^{\text{int}}(x_1)$, $A^{\text{int}}(x_2)$, . . . daranno come risultato i propagatori fotonici $D_{\mu\nu}$. In tal modo, i risultati della media verranno espressi da insiemi di diagrammi con due terminali esterni, costruiti secondo le regole esposte nel § 78, con la sola differenza che alle linee fotoniche esterne (come anche a quelle interne) corrisponderanno ora i propagatori $D_{\mu\nu}$ (al posto delle ampiezze e dei fotoni reali). In approssimazione di ordine zero, per $S = 1$, il numeratore dell'espressione (100,7) coincide semplicemente con $D_{\mu\nu}(x - x')$. I termini successivi non nulli saranno $\sim e^2$. Essi verranno espressi da insiemi di

diagrammi contenenti due terminali esterni e due vertici:

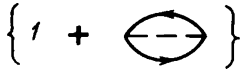


(100,8)

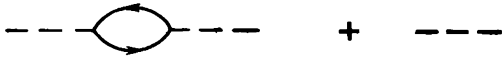
Il secondo di questi diagrammi è costituito da due parti non connesse tra di loro: una linea tratteggiata (alla quale corrisponde $-iD_{\mu\nu}$) e un cappio. Questa scomposizione del diagramma implica la separazione della corrispondente espressione analitica in due fattori indipendenti. Aggiungendo ai diagrammi (100,8) il diagramma dell'approssimazione zero (la linea — — — —) e « portando quest'ultimo fuori dalla parentesi », troveremo che, includendo i termini del secondo ordine, il numeratore della (100,7) è



L'espressione $\langle 0 \mid S \mid 0 \rangle$ al denominatore della (100,7) rappresenta l'ampiezza di « transizione » dal vuoto al vuoto. Il rispettivo sviluppo conterrà quindi solo diagrammi del tutto privi di terminali esterni. In approssimazione di ordine zero $\langle 0 \mid S \mid 0 \rangle = 1$; includendo i termini del secondo ordine otteniamo



Dividendo il numeratore per il denominatore, troviamo, con la stessa approssimazione, che la parentesi graffa si elide e rimane

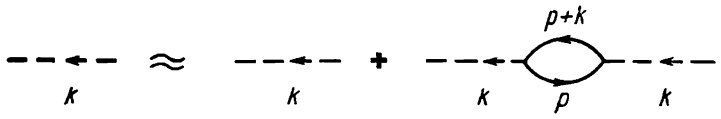


In tal modo, il diagramma con il cappio sconnesso viene a cadere. Questo risultato ha carattere generale. Riflettendo sul metodo di costruzione dei diagrammi, corrispondenti al numeratore e al denominatore della (100,7), non è difficile capire che il significato del denominatore $\langle 0 \mid S \mid 0 \rangle$ si riduce al fatto che a qualsiasi ordine della teoria delle perturbazioni il propagatore esatto $\mathscr{D}_{\mu\nu}$ sarà rappresentato solo da diagrammi che non contengono parti sconnesse.

Notiamo che i diagrammi senza terminali esterni (cappi) non hanno alcun senso fisico e quindi vanno trascurati anche indipendentemente dal fatto che essi vengono a cadere nella formazione del

propagatore $\mathscr{D}$. In effetti, di per se stessi questi cappi rappresentano le correzioni radiative all'elemento diagonale della matrice S per la transizione vuoto-vuoto. Ma secondo la (100,6) la somma di tutti questi cappi con l'unità, proveniente quest'ultima dall'approssimazione di ordine zero, dà come risultato soltanto un fattore di fase inessenziale, che non può riflettersi in alcun risultato fisico.

Il passaggio dalla rappresentazione delle coordinate alla rappresentazione degli impulsi viene eseguito nel modo solito. Cosí, nell'approssimazione del secondo ordine della teoria perturbativa il propagatore $-i\mathscr{D}_{\mu\nu}(k)$ (che noi rappresenteremo graficamente con una linea tratteggiata in grassetto) è dato dalla somma



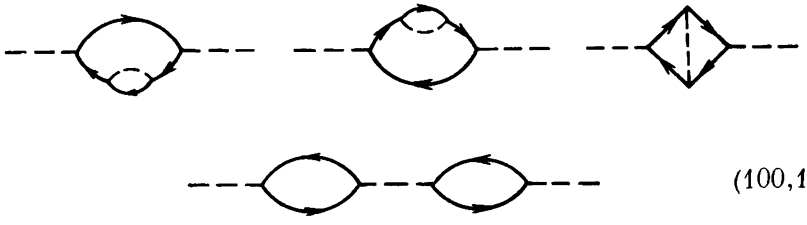
(100,9)

dove tutti i diagrammi vengono calcolati secondo le regole ordinarie (elencate nel § 78), con la sola differenza che alle linee fotoniche esterne, come anche a quelle interne, vengono associati i fattori $-iD_{\mu\nu}(k)$. La trascrizione analitica di questa formula dà quindi[1])

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(k) \approx D_{\mu\nu}(k) + \\ + ie^2 D_{\mu\lambda}(k) \int \operatorname{Tr} \gamma^\lambda G(p+k)\, \gamma^\rho G(p) \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_{\rho\nu}(k) \qquad (100,10)$$

(gli indici bispinoriali delle matrici γ e G, come al solito, sono stati omessi).

I termini delle successive approssimazioni si costruiscono in maniera analoga; essi sono rappresentati da gruppi di diagrammi con due terminali fotonici esterni e il necessario numero di vertici. Ad esempio, ai termini $\sim e^4$ corrispondono i seguenti diagrammi quattro vertici:

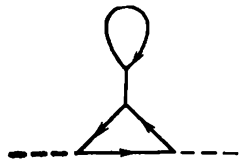


(100,11)

---

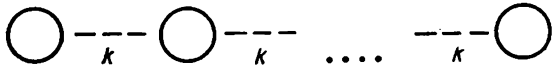
[1]) Nella determinazione dei segni non dimenticare il fattore -1, apportato dal cappio elettronico!

Quattro vertici ha anche il diagramma



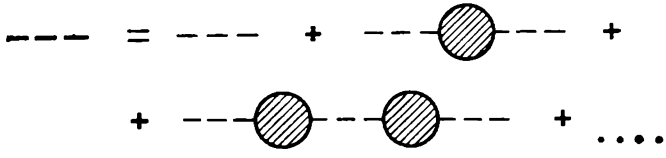
la cui parte superiore costituisce un cappio, formato da una linea elettronica « chiusa su se stessa »[1]). Questo cappio corrisponde alla contrazione $\bar{\psi}(x)\,\psi(x)$, cioè semplicemente al valore medio della corrente nel vuoto: $\langle 0 \mid j(x) \mid 0 \rangle$. Per definizione stessa di vuoto, però, questa quantità deve annullarsi identicamente, e questa identità non può, ovviamente, venire cambiata da alcuna correzione radiativa successiva a questo cappio[2]). Quindi, piú in generale, tutti i diagrammi con linee elettroniche « chiuse su se stesse » devono essere trascurati in qualsiasi approssimazione.

La parte di diagramma (« blocco »), racchiusa tra due linee fotoniche (esterne o interne), è generalmente chiamata *parte dell'autoenergia del fotone* (o *parte autoenergetica fotonica*). Nel caso generale tale blocco può venire scisso in parti connesse a due a due da una linea fotonica, ha cioè una struttura del tipo



dove i cerchietti indicano i blocchi non piú ulteriormente scomponibili con lo stesso procedimento; queste parti sono chiamate *compatte* (ad esempio, delle quattro parti dell'autoenergia del fotone al 4° ordine (100,11) sono compatte le prime tre).

Denotiamo con il simbolo $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$ la somma di tutte le parti autoenergetiche compatte (un insieme infinito); la funzione $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ è chiamata *operatore di polarizzazione*. Classificando i diagrammi secondo il numero delle parti compatte in essi contenute, si può rappresentare il propagatore esatto $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ in forma di serie



[1]) Notare la differenza dal cappio nel diagramma (100,8, *b*), formato da due linee elettroniche differenti.

[2]) Anche se un calcolo diretto dei diagrammi avrebbe portato ad integrali divergenti.

dove ad ogni cerchio tratteggiato viene messo in corrispondenza il fattore $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$. Analiticamente questa serie si scrive nella forma

$$\mathcal{D} = D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + \ldots =$$
$$= D\left\{1 + \frac{\mathcal{P}}{4\pi}\left[D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + \ldots\right]\right\} \qquad (100,12)$$

(gli indici tensoriali, per brevità, sono stati omessi). La serie tra parentesi quadra coincide nuovamente con la serie per $\mathcal{D}$. Abbiamo quindi

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\lambda}(k)\frac{\mathcal{P}^{\lambda\rho}(k)}{4\pi}\mathcal{D}_{\rho\nu}(k). \qquad (100,13)$$

Moltiplicando questa uguaglianza da sinistra per il tensore inverso $(D^{-1})^{\tau\mu}$ e da destra per $(\mathcal{D}^{-1})^{\nu\sigma}$ (e cambiando la notazione degli indici), otteniamo la (100,13) nella forma equivalente

$$\mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu} = D^{-1}_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi}\mathcal{P}_{\mu\nu}. \qquad (100,14)$$

Sottolineiamo che la rappresentazione di $\mathcal{D}$ nella forma (100,12) sottintende che dai diagrammi si possono evidenziare blocchi piú semplici, i quali vengono calcolati secondo le regole generali della tecnica dei diagrammi, mentre combinando i blocchi tra loro otteniamo le espressioni esatte per gli interi diagrammi. Il fatto che questa suddivisione dei diagrammi sia possibile costituisce una peculiarità importante (e per niente banale) della tecnica dei diagrammi. Essa è connessa al fatto che in un diagramma il coefficiente numerico comune è indipendente dall'ordine.

Questa stessa proprietà permette di usare la funzione $\mathcal{D}$ (presupponendola nota) al fine di semplificare i calcoli delle correzioni radiative alle ampiezze dei diversi processi di diffusione: invece di riconsiderare ogni volta da capo i diagrammi con le diverse correzioni alle linee fotoniche interne, noi possiamo sostituire semplicemente queste linee con linee in grassetto, associare cioè ad esse i propagatori $\mathcal{D}$ (invece di D), prendendoli nell'approssimazione richiesta.

Se la linea fotonica corrisponde ad un fotone reale (e non ad un fotone virtuale), cioè se essa è un terminale esterno dell'intero diagramma, allora, dopo l'introduzione in essa di tutte le correzioni di autoenergia, si otterrà una linea, detta di solito *linea esterna efficace*. Ad essa viene associata un'espressione che differisce dalla (100,13) per la sostituzione del fattore D con l'ampiezza di polarizzazione del fotone reale:

$$e_\mu + \mathcal{D}_{\mu\rho}(k)\frac{\mathcal{P}^{\rho\lambda}(k)}{4\pi}e_\lambda. \qquad (100,15)$$

Se invece si tratta della linea di un campo esterno, allora invece di e_μ occorre scrivere qui $A_\mu^{(e)}$.

Tutto quanto è stato detto nel § 77 a proposito della struttura tensoriale e della non univocità di gauge del propagatore approssimato $D_{\mu\nu}$, resta valido anche per la funzione esatta $\mathscr{D}_{\mu\nu}$. Restando nell'ambito delle rappresentazioni relativisticamente invarianti, scriviamo la forma generale di questa funzione come segue:

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(k) = \mathscr{D}(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \mathscr{D}^{(l)}(k^2)\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}; \qquad (100,16)$$

il primo termine corrisponde al gauge di Landau, mentre nel secondo termine $\mathscr{D}^{(l)}$ è una funzione di gauge arbitrario. La rappresentazione analoga per il propagatore approssimato ha la forma[1])

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + D^{(l)}(k^2)\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \qquad (100,17)$$

Osserviamo ora che la parte longitudinale del propagatore è legata alla parte longitudinale del 4-potenziale, priva di senso fisico, e quindi non partecipa all'interazione. Ne consegue che l'interazione non la modifica e si ha

$$\mathscr{D}^{(l)}(k^2) = D^{(l)}(k^2). \qquad (100,18)$$

Gli inversi dei tensori devono, per definizione, soddisfare alle uguaglianze

$$\mathscr{D}^{-1}_{\mu\nu}\mathscr{D}^{\lambda\nu} = \delta^\lambda_\mu, \quad D^{-1}_{\mu\nu}D^{\lambda\nu} = \delta^\lambda_\mu.$$

I tensori inversi dei tensori del tipo (100,16) e (100,17), in virtú della (100,18), hanno la forma

$$\mathscr{D}^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{\mathscr{D}}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{D^{(l)}}\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2},$$

$$D^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{D}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{D^{(l)}}\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}.$$

Da queste formule segue che l'operatore di polarizzazione costituisce un tensore trasversale

$$\mathscr{P}_{\mu\nu} = \mathscr{P}(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right), \qquad (100,19)$$

dove $\mathscr{P} = k^2 - 4\pi/\mathscr{D}$, oppure

$$\mathscr{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2\left(1 - \dfrac{\mathscr{P}(k^2)}{k^2}\right)}. \qquad (100,20)$$

In tal modo, l'operatore di polarizzazione è una quantità gauge-invariante (a differenza del propagatore fotonico).

[1]) La definizione di $D^{(l)}$ in questa formula non coincide con la definizione data nella formula (77,3).

§ 101. *Funzione di autoenergia del fotone*

Per un ulteriore studio delle proprietà di analicità del propagatore fotonico risulta utile introdurre, accanto all'operatore di polarizzazione, anche un'altra funzione ausiliare $\Pi_{\mu\nu}(k)$, chiamata *funzione di autoenergia del fotone* (*funzione autoenergetica del fotone*). La funzione $i\Pi_{\mu\nu}/4\pi$ è definita come la somma di tutte le parti di autoenergia del fotone (e non solo delle parti compatte). Rappresentando questa somma con un quadrato nel diagramma, esprimiamo il propagatore fotonico esatto mediante la somma

cioè

$$\mathscr{D}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + D_{\mu\lambda}\frac{\Pi^{\lambda\rho}}{4\pi}D_{\rho\nu}. \tag{101,1}$$

Ricavando da qui $\Pi_{\mu\nu}$ nella forma

$$\frac{1}{4\pi}\Pi_{\mu\nu} = D^{-1}_{\mu\lambda}\mathscr{D}^{\lambda\rho}D^{-1}_{\rho\nu} - D^{-1}_{\mu\nu}$$

e sostituendovi le (100,16-18) e quindi anche la (100,20), otteniamo

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right), \qquad \Pi = \frac{\mathscr{P}}{1-\mathscr{P}/k^2}. \tag{101,2}$$

È chiaro che $\Pi_{\mu\nu}$ (come anche $\mathscr{P}_{\mu\nu}$) è un tensore gauge-invariante.

L'utilità della quantità $\Pi_{\mu\nu}$ è legata alla forma che essa assume nella rappresentazione delle coordinate. Questa forma si trova facilmente notando che l'uguaglianza

$$\frac{1}{4\pi}\Pi_{\mu\nu}(k) = D^{-1}_{\mu\lambda}D^{-1}_{\rho\nu}\{\mathscr{D}^{\lambda\rho}(k) - D^{\lambda\rho}(k)\},$$

e tenendo conto della trasversalità del tensore $\mathscr{D}^{\lambda\rho} - D^{\lambda\rho}$ che segue dalla (100,18) nella rappresentazione delle coordinate, può essere scritta nella forma

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{4\pi}(\partial_\mu\partial_\lambda - g_{\mu\lambda}\partial_\sigma\partial^\sigma)(\partial'_\nu\partial'_\rho - g_{\nu\rho}\partial'_\sigma\partial'^\sigma)\times$$
$$\times\{\mathscr{D}^{\lambda\rho}(x-x') - D^{\lambda\rho}(x-x')\}.$$

Per realizzare la derivazione occorre operare qui la sostituzione

$$\mathscr{D}^{\lambda\rho}(x-x') - D^{\lambda\rho}(x-x') = i\langle 0|\mathrm{T}A^\lambda(x)A^\rho(x') -$$
$$- \mathrm{T}A^\lambda_{\mathrm{int}}(x)A^\rho_{\mathrm{int}}(x')|0\rangle. \tag{101,3}$$

Nel § 76 abbiamo visto che la derivazione del prodotto T richiede, in generale, una particolare attenzione a causa della sua disconti-

nuità. Ma la differenza, che sta nella (101,3) sotto il segno di media, è continua insieme con le sue derivate prime, poiché le regole di commutazione per le componenti degli operatori $A^\lambda(x)$ e $A^\lambda_{\text{int}}(x)$ (presi a tempi uguali) sono le stesse e i rispettivi « salti » si elidono (cfr. § 76). La derivazione della differenza (101,3) può, quindi, essere eseguita sotto il segno di ordinamento cronologico T. Usando la (99,6) e la (99,6a) otteniamo come risultato l'espressione voluta[1])

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x') = 4\pi i e^2 \langle 0 \,|\, \mathrm{T} j_\mu(x)\, j_\nu(x') \,|\, 0 \rangle. \qquad (101,4)$$

Questa forma mostra visivamente l'invarianza di gauge di $\Pi_{\mu\nu}$ dal momento che gli operatori di corrente sono gauge-invarianti.

Sulla base della (101,4) si può ottenere un'importante rappresentazione integrale di questa funzione.

Dalla (101,2) è chiaro che è sufficiente considerare la funzione scalare $\Pi = 1/3\Pi^\mu_\mu$. Nella rappresentazione delle coordinate

$$\Pi(x-x') = \frac{4\pi}{3} i e^2 \langle 0 \,|\, \mathrm{T} j_\mu(x)\, j^\mu(x') \,|\, 0 \rangle =$$

$$= \frac{4\pi}{3} i e^2 \begin{cases} \sum\limits_n \langle 0 \,|\, j_\mu(x) \,|\, n \rangle \langle n \,|\, j^\mu(x') \,|\, 0 \rangle & \text{per} \quad t > t', \\ \sum\limits_n \langle 0 \,|\, j_\mu(x') \,|\, n \rangle \langle n \,|\, j^\mu(x) \,|\, 0 \rangle & \text{per} \quad t < t', \end{cases} \qquad (101,5)$$

dove il simbolo n numera gli stati del sistema (campo elettromagnetico + campo elettropositronico)[2]). Poiché l'operatore della corrente $j(x)$ dipende da $x^\mu = (t, \boldsymbol{r})$, dipenderanno da x anche i suoi elementi di matrice. Questa dipendenza può essere stabilita in forma esplicita prendendo come stati $|\, n \rangle$ gli stati con valori determinati dell'energia-impulso totale.

La dipendenza degli elementi di matrice della corrente dal tempo, come per qualsiasi operatore di Heisenberg, è data dall'espressione

$$\langle n \,|\, j^\mu(t, \boldsymbol{r}) \,|\, m \rangle = \langle n \,|\, j^\mu(\boldsymbol{r}) \,|\, m \rangle\, e^{-i(E_m - E_n)t},$$

dove E_n, E_m sono le energie degli stati $|\, n \rangle$ e $|\, m \rangle$, e $j(\boldsymbol{r})$ è un operatore di Schrödinger.

Per determinare la dipendenza orbitale degli elementi di matrice consideriamo l'operatore $j(\boldsymbol{r})$ come un operatore ottenuto per effetto di una traslazione a distanza $\boldsymbol{r}$ dall'operatore $j(0)$. L'operatore di

---

[1]) I calcoli formali, analoghi a quelli riportati piú sopra, richiedono attenzione a causa della presenza delle divergenze, ricordate a pag. 509. In particolare, questo porta all'apparizione nel membro destro della (101,4) di divergenze supplementari dei cosiddetti termini di Schwinger. Noi non li scriveremo, poiché scompaiono durante la rinormalizzazione (vedi piú avanti, § 107) e non influiscono sui risultati successivi.

[2]) L'operatore della corrente conserva la carica; perciò gli stati $|\, n \rangle$, che vanno a combinarsi con il vuoto $|\, 0 \rangle$, possono contenere solo un ugual numero di elettroni e di positroni.

tale traslazione è $\exp(i\boldsymbol{r}\mathbf{P})$, dove $\mathbf{P}$ è l'operatore dell'impulso totale del sistema (vedi III (15,15)). Usando la regola generale di trasformazione degli elementi di matrice (vedi III (12,7)), troveremo, quindi, che

$$\langle n \mid \mathrm{j}^{\mu}(\boldsymbol{r}) \mid m\rangle = \langle n \mid e^{-i\boldsymbol{r}\mathbf{P}}\mathrm{j}^{\mu}(0)\, e^{i\boldsymbol{r}\mathbf{P}} \mid m\rangle = \langle n \mid \mathrm{j}^{\mu}(0) \mid m\rangle\, e^{i(P_m - P_n)\boldsymbol{r}}.$$

Unitamente alla formula precedente, questa relazione conduce all'espressione finale

$$\langle n \mid \mathrm{j}^{\mu}(t, \boldsymbol{r}) \mid m\rangle = \langle n \mid \mathrm{j}^{\mu}(0) \mid m\rangle\, e^{-i(P_m - P_n)x}. \qquad (101,6)$$

Notiamo anche che la matrice $\langle n \mid \mathrm{j}^{\mu}(0) \mid m\rangle$ è hermitiana (come pure l'intera matrice (101,6) dell'operatore hermitiano $\mathrm{j}^{\mu}(t, \boldsymbol{r})$), e che in virtú dell'equazione di continuità (99,7) essa soddisfa la condizione di trasversalità

$$(P_n - P_m)^{\mu} \langle n \mid \mathrm{j}_{\mu}(0) \mid m\rangle = 0. \qquad (101,7)$$

Torniamo ora al calcolo della funzione $\Pi(x - x')$. Sostituendo la (101,6) nella (101,5), abbiamo

$$\Pi(\xi) = \frac{4\pi i e^2}{3} \sum_n \langle 0 \mid \mathrm{j}_{\mu}(0) \mid n\rangle \langle n \mid \mathrm{j}^{\mu}(0) \mid 0\rangle\, e^{\mp i P_n \xi} \quad \text{per } \tau \gtrless 0, \qquad (101,8)$$

dove $x - x' = \xi = (\tau, \boldsymbol{\xi})$. Introduciamo la notazione

$$\rho(k^2) = -\frac{4\pi e^2}{3}(2\pi)^3 \sum_n \langle 0 \mid \mathrm{j}_{\mu}(0) \mid n\rangle \langle 0 \mid \mathrm{j}^{\mu}(0) \mid n\rangle^* \delta^{(4)}(k - P_n). \qquad (101,9)$$

La sommatoria è estesa a tutti i sistemi di fotoni reali e coppie elettroniche, che possono essere generati da un fotone virtuale di 4-impulso $k = (\omega, \boldsymbol{k})$ $(\omega > 0)$, e per ciascuno di tali sistemi la somma viene eseguita anche su tutte le variabili intrinseche (polarizzazione e impulsi delle particelle nel sistema del baricentro)[1]. Per effetto di questa somma la funzione ρ può dipendere solo da k, ed essendo uno scalare può, in definitiva, dipendere solo da k^2. In particolare, ρ non dipende dalla direzione di $\boldsymbol{k}$. Tenendo presente questa proprietà della funzione ρ, riscriviamo la (101,8) nella forma

$$\Pi(\xi) = -i \int_0^{\infty} d\omega \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rho(k^2)\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi} - i\omega|\tau|} =$$

$$= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty}\!\!\int d\omega d(\mu^2)\, \delta(\mu^2 - k^2)\, \rho(\mu^2)\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi} - i\omega|\tau|}.$$

---

[1]) Questa definizione degli stati $\mid n\rangle$ è, evidentemente, identica alla definizione di essi come stati per i quali sono differenti da zero gli elementi di matrice $\langle 0 \mid j \mid n\rangle$ di un operatore con parità di carica dispari.

Il passaggio alla rappresentazione degli impulsi si realizza sostituendo nell'espressione ottenuta la formula

$$e^{-i\omega|\tau|} = 2i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0\tau} \frac{1}{k_0^2 - \omega^2 + i0} \frac{dk_0}{2\pi} \tag{101,10}$$

(vedi § 77, pag. 358) e si ottiene

$$\Pi(k^2) = \int_0^{\infty} d(\mu^2) \int_0^{\infty} d(\omega^2)\, \delta(\mu^2 + k^2 - \omega^2) \frac{\rho(\mu^2)}{k_0^2 - \omega^2 + i0},$$

cioè, in definitiva

$$\Pi(k^2) = \int_0^{\infty} \frac{\rho(\mu^2)\, d\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i0}. \tag{101,11}$$

Il coefficiente ρ in questa rappresentazione integrale è chiamato *densità spettrale* della funzione $\Pi(k^2)$. Esso gode delle proprietà:

$$\begin{aligned} \rho(k^2) &= 0 \quad \text{per} \quad k^2 < 0, \\ \rho(k^2) &> 0 \quad \text{per} \quad k^2 > 0. \end{aligned} \tag{101,12}$$

Infatti, il 4-impulso k del fotone virtuale che può generare un sistema di particelle reali è necessariamente del genere tempo (k^2 coincide con il quadrato dell'energia totale delle particelle nel sistema del baricentro). In virtú della condizione di trasversalità (101,7) abbiamo

$$P_n^{\mu} \langle 0 | j_{\mu}(0) | n \rangle = 0.$$

Ma il 4-vettore $\langle 0 | j | n \rangle$, essendo ortogonale al 4-vettore del genere tempo (P_n), è del genere spazio, cioè

$$\langle 0 | j_{\mu}(0) | n \rangle \langle 0 | j^{\mu}(0) | n \rangle^* < 0,$$

e perciò, secondo la definizione (101,9), $\rho > 0$.

§ 102. Propagatore elettronico esatto

Analogamente al propagatore fotonico, il propagatore elettronico esatto è definito dalla formula

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i \langle 0 | T\psi_i(x) \bar{\psi}_k(x') | 0 \rangle \tag{102,1}$$

(i, k sono indici bispinoriali), che differisce dalla definizione (76,1) del propagatore di particelle libere

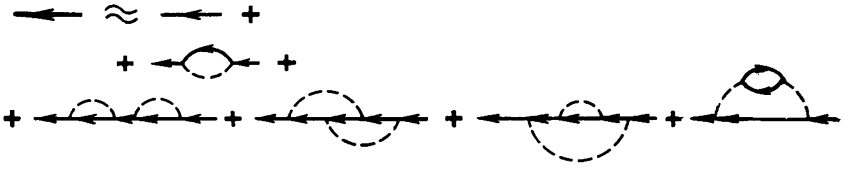
$$G_{ik}(x - x') = -i \langle 0 | T\psi_i^{\text{int}}(x) \bar{\psi}_k^{\text{int}}(x') | 0 \rangle \tag{102,2}$$

per la sostituzione degli operatori ψ in rappresentazione di interazione con i relativi operatori di Heisenberg.

Gli stessi ragionamenti fatti nella deduzione della (100,7) permettono di porre $\mathcal{G}_{ik}$ nella forma

$$\mathcal{G}_{ik}(x-x') = -i\frac{\langle 0 \mid T\psi_i^{\text{int}}(x)\,\bar{\psi}_k^{\text{int}}(x')\,S \mid 0\rangle}{\langle 0 \mid S \mid 0\rangle}. \qquad (102,3)$$

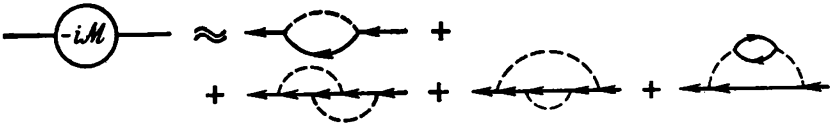
Lo sviluppo di questa espressione in potenze di e^2 conduce alla rappresentazione della funzione $\mathcal{G}$ sotto forma di un insieme di diagrammi con due linee elettroniche esterne e con un certo numero di vertici. Anche qui il ruolo del denominatore della (102,3) si riduce nuovamente alle necessità di considerare solamente i diagrammi senza « cappi nel vuoto » isolati. Ad esempio, con approssimazione fino ai termini $\sim e^4$, la rappresentazione grafica del propagatore $\mathcal{G}$ (linea continua in grassetto) ha la forma[1])



(102,4)

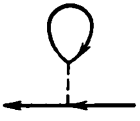
Alla linea continua in grassetto viene associata (nella rappresentazione degli impulsi) la funzione $i\mathcal{G}(p)$, a tutte le linee continue e tratteggiate nei diagrammi nella parte destra dell'uguaglianza vengono associati i propagatori delle particelle libere iG e $-iD$ rispettivamente.

Il blocco racchiuso tra due linee elettroniche è chiamato *parte di autoenergia dell'elettrone* (o *parte autoenergetica elettronica*). Come già nel caso dei fotoni, la parte di autoenergia è detta *compatta*, se essa non può venire ulteriormente scomposta in due altre parti di autoenergia mediante il taglio di una linea elettronica. Denotiamo la somma di tutte le possibili parti compatte con $-i\mathcal{M}_{ik}$; la funzione $\mathcal{M}_{ik}(p)$ è chiamata *operatore di massa*. Cosí ad esempio, con approssimazione fino ai termini $\sim e^4$



(102,5)

[1]) Come abbiamo già spiegato nel § 100, non occorre considerare nemmeno i diagrammi con « cappi » che qui comparirebbero già al secondo ordine:



Con una somma del tutto analoga a quella eseguita per deduzione della (100,13), otteniamo

$$\mathcal{G}(p) = G(p) + G(p)\,\mathcal{M}(p)\,\mathcal{G}(p) \tag{102,6}$$

(omettiamo gli indici bispinoriali) oppure, per le matrici inverse,

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{M}(p) = \hat{p} - m - \mathcal{M}(p). \tag{102,7}$$

Nel § 99 abbiamo già notato che gli operatori di Heisenberg ψ (contrariamente agli operatori ψ nella rappresentazione d'interazione) cambiano per la trasformazione di gauge dei potenziali elettromagnetici. Insieme ad essi risulta gauge-non invariante anche il propagatore elettronico esatto $\mathcal{G}$. Chiariamo la legge della trasformazione di gauge in questo caso (*L. D. Landau, I. M. Khalatnikov*, 1952).

È a priori evidente che la variazione di $\mathcal{G}$ per la trasformazione di gauge deve esprimersi attraverso quella stessa quantità $D^{(l)}$ che viene ad aggiungersi, in seguito a questa trasformazione, al propagatore fotonico. Né potrebbe essere diversamente dal momento che nel calcolo di $\mathcal{G}$, secondo i diagrammi della teoria delle perturbazioni, ogni termine della serie si esprime attraverso le funzioni D, e nessun'altra quantità elettromagnetica compare in essi. Questa circostanza può servire per semplificare i calcoli: circa le proprietà dell'operatore generico χ nella trasformazione (99,8) è possibile fare qualsiasi supposizione particolare, ferma restando la sola condizione che la risposta dev'essere espressa attraverso $D^{(l)}$.

Per effetto della trasformazione (99,8) i propagatori $\mathcal{D}$ (100,1) e $\mathcal{G}$ (102,1) diventano

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_{\mu\nu} \to i\,\langle 0\,|\,\mathrm{T}\,[\mathrm{A}_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x)]\,[\mathrm{A}_\nu(x') - \partial'_\nu\chi(x')]\,|\,0\rangle,\\ \mathcal{G}_{ik} \to -i\,\langle 0\,|\,\mathrm{T}\psi_i(x)\,e^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x')}\overline{\psi}_k(x')\,|\,0\rangle.\end{gathered} \tag{102,8}$$

Supponiamo che gli operatori χ soddisfino il teorema di Wick, cioè i loro prodotti vengono mediati a coppie, indipendentemente da tutti i rimanenti operatori che compaiono nel prodotto T; questa supposizione è del tutto naturale poiché in virtú dell'invarianza di gauge il « campo » degli χ non partecipa assolutamente all'interazione. Supponiamo che inoltre si annulli il valore medio nel vuoto dello stesso operatore χ: $\langle 0\,|\,\chi\,|\,0\rangle = 0$. Allora nella (102,8) i termini contenenti χ si separano e si ottiene

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \to \mathcal{D}_{\mu\nu} + i\,\langle 0\,|\,\mathrm{T}\partial_\mu\chi(x)\cdot\partial'_\nu\chi(x')\,|\,0\rangle, \tag{102,9}$$

$$\mathcal{G}_{ik} \to \mathcal{G}_{ik}\,\langle 0\,|\,\mathrm{T}e^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x')}\,|\,0\rangle. \tag{102,10}$$

La prima di queste trasformazioni si può scrivere nella forma[1])

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x') \to \mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x') + \partial_\mu \partial'_\nu d^{(l)}(x-x'), \qquad (102,11)$$

dove

$$d^{(l)}(x-x') = i\langle 0 \,|\, \mathrm{T}\chi(x)\,\chi(x') \,|\, 0\rangle. \qquad (102,12)$$

Da qui si vede che $d^{(l)}$ determina la variazione della parte longitudinale del propagatore fotonico $\mathscr{D}^{(l)}$ per effetto della trasformazione di gauge.

Sviluppando ora la quantità

$$B \equiv \langle 0 \,|\, \mathrm{T} e^{ie\chi(x)} e^{-ie\chi(x')} \,|\, 0\rangle \qquad (102,13)$$

secondo le potenze di e ed eseguendo quindi la media, applicando il teorema di Wick, si può esprimere ciascun termine dello sviluppo attraverso $d^{(l)}$. Questo calcolo si semplifica notevolmente se si nota che il risultato non può dipendere dalla non commutatività degli operatori $\chi(x)$ e $\chi(x')$; questo perché la loro permutazione porterà solo allo scambio degli argomenti x e x' nella funzione, chiaramente pari, $d^{(l)}(x-x')$[2]). Se si presuppone la commutatività di $\chi(x)$ e $\chi(x')$, la moltiplicazione degli esponenti operatoriali nella (102,13) si riduce alla somma degli esponenti stessi (e il segno di ordinamento cronologico può essere tralasciato):

$$B = \langle 0 \,|\, e^{i\varphi} \,|\, 0\rangle, \quad \varphi = e\,[\chi(x) - \chi(x')].$$

Nello sviluppo di questa espressione i termini di potenza dispari, effettuando la media, si annullano e rimane quindi

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \langle 0 \,|\, \varphi^{2n} \,|\, 0\rangle.$$

Inoltre, abbiamo

$$\langle 0 \,|\, \varphi^{2n} \,|\, 0\rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} \langle 0 \,|\, \varphi^2 \,|\, 0\rangle\,;$$

il coefficiente a destra è il numero delle differenti contrazioni di coppie che si possono realizzare con $2n$ operatori φ (cioè il numero dei modi possibili con i quali si possono unire a due a due $2n$ punti

[1]) Il passaggio dalla (102,9) alla (102,11) è possibile solo se la funzione $d^{(l)}$ e la sua derivata in t siano discontinue per $t = t'$. Nel caso contrario i secondi termini di queste espressioni si differirebbero in termini di funzione δ (cfr. la (76,2)). Nello spazio d'impulso questa condizione equivale alla supposizione che $d^{(l)}(q)$ decresce piú rapidamente quando $|q^2| \to \infty$ che secondo la legge $1/q^2$.

[2]) Le proprietà di commutazione di $\chi(x)$ e $\chi(x')$ sono certamente essenziali per la forma della funzione stessa $d^{(l)}(x-x')$. Sottolineiamo a questo proposito che, presupponendo per l'operatore $\chi(x)$ la forma (102,9), noi consideriamo con ciò solo quelle trasformazioni di gauge che non rompono l'omogeneità spazio-temporale, cioè tali per cui la funzione $\mathscr{D}$ continua a dipendere solo dalla differenza $x - x'$ (nel caso generale di trasformazioni generiche questa proprietà può venire a cadere).

numerati)[1]). Da qui

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \langle 0 | \varphi^2 | 0 \rangle \right)^n = \exp \frac{\langle 0 | \varphi^2 | 0 \rangle}{2}.$$

Infine, tenendo conto del fatto che

$$\langle 0 | \varphi^2 | 0 \rangle = -e^2 \langle 0 | \chi^2(x) + \chi^2(x') - 2\chi(x)\chi(x') | 0 \rangle = \\ = 2ie^2 [d^{(l)}(0) - d^{(l)}(x - x')],$$

troviamo la seguente formula per la trasformazione di $\mathcal{G}$, se $\mathcal{D}$ si trasforma secondo la (102,11):

$$\mathcal{G}(x - x') \to \mathcal{G}(x - x') \exp \{ie^2 [d^{(l)}(0) - d^{(l)}(x - x')]\}. \qquad (102,14)$$

In questa formula compaiono i propagatori nella rappresentazione delle coordinate. Nel caso generale non è possibile realizzare sulla base di essa il passaggio alle trasformate di Fourier, non si può cioè esprimere la variazione del propagatore $\mathcal{G}(p)$ nella rappresentazione degli impulsi attraverso la variazione del propagatore $\mathcal{D}(p)$. Tale passaggio è, tuttavia, possibile per una trasformazione di gauge infinitesima. Denotando per maggiore chiarezza la quantità piccola $d^{(l)}$ con $\delta d^{(l)}$, per la variazione della funzione $\mathcal{G}$ dalla (102,14) otteniamo

$$\delta\mathcal{G}(x - x') = ie^2 \mathcal{G}(x - x') [\delta d^{(l)}(0) - \delta d^{(l)}(x - x')]. \qquad (102,15)$$

Per le componenti di Fourier[2])

$$\delta\mathcal{G}(p) = ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta d^{(l)}(q) [\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p - q)]. \qquad (102,16)$$

La quantità $\delta d^{(l)}(q)$ è connessa con la variazione della funzione $\mathcal{D}^{(l)}$ dalla relazione

$$\delta\mathcal{D}^{(l)}(q) = q^2 \delta d^{(l)}(q). \qquad (102,17)$$

---

[1]) Infatti, scegliamo un modo per eseguire la media. Se ora facciamo tutti i possibili scambi dei punti, otterremo $(2n)!$ termini. Tra di essi, tuttavia, ci sono termini ridondanti: a) non portano a nuove contrazioni gli scambi dei punti all'interno delle coppie; il loro numero è 2^n; b) non significano niente gli scambi delle coppie stesse; il loro numero è $n!$. Dividendo $(2n)!$ per 2^n e per $n!$, otteniamo il numero indicato nel testo.

[2]) Se la funzione $f(x) = f_1(x) f_2(x)$, allora le relative componenti di Fourier sono:

$$f(p) = \int f(x) e^{ipx} d^4x = \int\int\int d^4x \frac{d^4q_1 d^4q_2}{(2\pi)^8} e^{ix(p - q_1 - q_2)} f_1(q_1) f_2(q_2) = \\ = \int \frac{d^4q_1 d^4q_2}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p - q_1 - q_2) f_1(q_1) f_2(q_2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} f_1(q) f_2(p - q).$$

Nel passaggio dalla (102,15) alla (102,16) si è tenuto conto anche che

$$f(x = 0) = \int f(q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

Per il propagatore elettronico si potrebbe ricavare una rappresentazione integrale analoga alla formula (101,11). La deduzione di tale rappresentazione è basata sulle espressioni

$$\psi_{nm}(x) = \psi_{nm}(0)\, e^{-i(P_m - P_n)x} \tag{102,18}$$

per gli elementi di matrice dell'operatore ψ, analoghe alle espressioni (101,6) usate nel § 101 per gli elementi di matrice della corrente. Contrariamente a quanto avviene per la corrente, però, gli operatori ψ non sono gauge-invarianti. Perciò anche la dipendenza dalle coordinate della forma (102,18) non ha carattere generale, ma è valida solo in un determinato gauge. Di conseguenza, è valida solo in un determinato gauge anche la rappresentazione integrale del propagatore basata sulla (102,18). La causa fisica profonda di questa situazione sta nel fatto che l'uguaglianza a zero della massa del fotone porta alla catastrofe infrarossa (§ 95). In conseguenza di ciò, l'elettrone nel processo d'interazione emette un numero infinito di quanti « molli », cosa che, in notevole misura, priva di senso il propagatore « ad una particella » (102,1).

§ 103. *Operatore di vertice*

Nei diagrammi complessi si può mettere in evidenza, oltre alle parti di autoenergia, anche blocchi di altro tipo non riconducibili alle parti menzionate. Ad una categoria importante di tali blocchi si arriva considerando la funzione

$$K^{\mu}_{ik}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0 \,|\, \mathrm{T}A^{\mu}(x_1)\, \psi_i(x_2)\, \overline{\psi}_k(x_3) \,|\, 0 \rangle \tag{103,1}$$

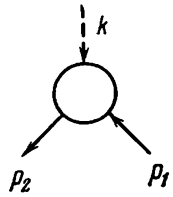
con un indice quadrivettoriale e due indici bispinoriali; in virtú dell'omogeneità del continuo spazio-temporale, questa funzione dipende solo dalle differenze degli argomenti x_1, x_2, x_3. Espressa attraverso gli operatori in rappresentazione d'interazione la funzione K ha la forma

$$K^{\mu}_{ik}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\langle 0 \,|\, \mathrm{T}A^{\mu}_{\mathrm{int}}(x_1)\, \psi^{\mathrm{int}}_i(x_2)\, \overline{\psi}^{\mathrm{int}}_k(x_3)\, \mathrm{S} \,|\, 0 \rangle}{\langle 0 \,|\, \mathrm{S} \,|\, 0 \rangle}. \tag{103,2}$$

Il passaggio alla rappresentazione degli impulsi è realizzato dalla formula

$$(2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p_1 + k - p_2)\, K^{\mu}_{ik}(p_2, p_1; k) =$$
$$= \int\!\!\int\!\!\int K^{\mu}_{ik}(x_1, x_2, x_3)\, e^{-ikx_1 + ip_2x_2 - ip_1x_3} d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3, \tag{103,3}$$

Nella tecnica dei diagrammi alle funzioni K^{μ}_{ik} corrispondono blocchi (« *a tre gambe* ») del tipo



(103,4)

con tre terminali (uno fotonico e due elettronici), i cui impulsi sono legati dalla legge di conservazione

$$p_1 + k = p_2. \tag{103,5}$$

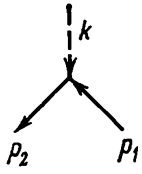
Il termine di ordine zero nello sviluppo di questa funzione si annulla, mentre il termine del primo ordine nella rappresentazione delle coordinate è

$$K^{\mu}(x_1, x_2, x_3) = e \int G(x_2 - x)\, \gamma_{\nu} G(x - x_3) \cdot D^{\nu\mu}(x_1 - x)\, d^4x$$

oppure, nella rappresentazione degli impulsi

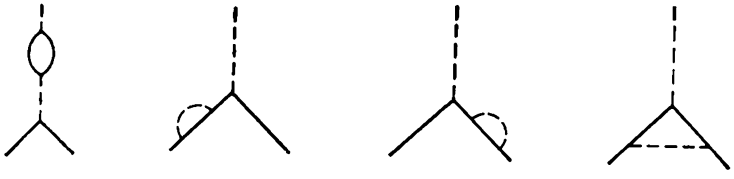
$$K^{\mu}(p_2, p_1; k) = eG(p_2)\, \gamma_{\nu} G(p_1) \cdot D^{\nu\mu}(k) \tag{103,6}$$

(gli indici bispinoriali sono stati omessi); il diagramma relativo è



(103,7)

Passando alle approssimazioni successive i diagrammi si complicano per l'aggiunta di nuovi vertici. Non tutti i diagrammi che si ottengono danno, però, qualcosa di essenzialmente nuovo. Cosí ad esempio, al terzo ordine si hanno i seguenti diagrammi



(103,8)

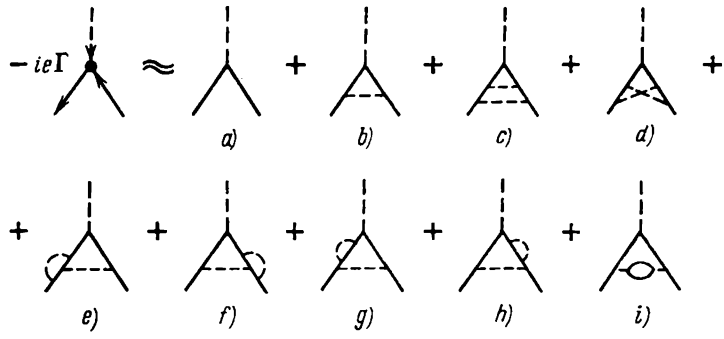
I primi tre si possono dividere (tagliando o una linea fotonica od una elettronica) in un vertice semplice (103,7) e in una parte di autoenergia del secondo ordine; per il quarto diagramma tale scom-

posizione è impossibile. Questa situazione ha carattere generale. Le correzioni del primo tipo portano semplicemente alla sostituzione nella (103,6) dei fattori G e D con i propagatori esatti $\mathcal{G}$ e $\mathcal{D}$. La somma dei rimanenti termini dello sviluppo porterà ad una nuova quantità che andrà a sostituire il fattore γ^μ nella (103,6). Denotando questa quantità con Γ^μ, abbiamo cosí per definizione

$$K^\mu(p_2, p_1; k) = \{i\mathcal{G}(p_2)[-ie\Gamma_\nu(p_2, p_1; k)]\, i\mathcal{G}(p_1)\}[-i\mathcal{D}^{\nu\mu}(k)]. \tag{103,9}$$

Un blocco unito alle altri parti del diagramma mediante una linea fotonica e due linee elettroniche è chiamato *parte di vertice*, se questo blocco non è ulteriormente scomponibile in parti che siano unite tra di loro solo da una linea (fotonica o elettronica). La quantità Γ^μ rappresenta la somma di tutto l'insieme (infinito) delle parti di vertice, ivi incluso anche il vertice semplice γ^μ; essa è chiamata *operatore di vertice* (oppure *funzione di vertice*).

Riportiamo tutti i diagrammi dell'operatore di vertice fino al quinto ordine:



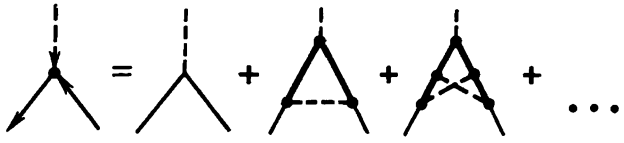
(103,10)

(l'operatore di vertice esatto $-ie\Gamma$ viene rappresentato con un grosso punto nero).

L'operatore Γ (come anche l'operatore del vertice semplice γ) ha due indici matriciali (bispinoriali) e un indice quadrivettoriale; esso è funzione di due impulsi elettronici (p_1 e p_2) e di un impulso fotonico (k). Questi tre impulsi non possono, tuttavia, riferirsi tutti simultaneamente a particelle reali: il diagramma (103,4) preso isolatamente (non come parte di un diagramma piú complesso) corrisponderebbe all'assorbimento di un fotone da parte di un elettrone libero; tale processo non è, però, compatibile, con la legge di conservazione dell'energia-impulso di particelle reali. Quindi, almeno uno dei tre terminali del diagramma deve riferirsi ad una particella virtuale (oppure ad un campo esterno).

Le parti di vertice si possono ulteriormente suddividere in due categorie: *irriducibili* e *riducibili*. Irriducibili sono chiamate quelle parti di vertice che non contengono correzioni di autoenergia alle linee interne e in cui non si possono evidenziare parti che rappresentino correzioni (di ordine inferiore) ai vertici interni. In tal modo, dei diagrammi (103,10) sono irriducibili solo *b*) e *d*) (senza contare il vertice semplice *a*)). I diagrammi *g*), *h*), *i*) contengono parti di autoenergia; nel diagramma *c*) delle due linee tratteggiate parallele quella superiore può essere considerata come una correzione al vertice in alto, e le linee tratteggiate laterali nei diagrammi *e*), *f*) come correzioni ai vertici laterali.

Sostituendo nei diagrammi irriducibili le linee interne con analoghe linee in grassetto e i vertici con punti in nero (sostituendo, cioè, i propagatori approssimati D, G con i propagatori esatti $\mathscr{D}$, $\mathscr{G}$ e gli operatori approssimati dei vertici γ con gli operatori esatti Γ[1]), si otterrà, evidentemente, l'insieme di tutte le parti di vertice possibili. In tal modo, lo sviluppo dell'operatore di vertice può essere rappresentato nella forma

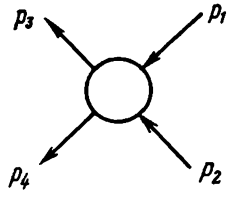


(103,11)

Questa uguaglianza rappresenta un'equazione integrale rispetto a Γ con un numero infinito di termini nel membro destro.

Da quanto esposto risulta chiaro il principio generale di composizione delle espressioni esatte per i blocchi dei diagrammi con un numero arbitrario di terminali. Essi vengono costruiti come valori medi nel vuoto di prodotti T di operatori di Heisenberg: un operatore $\overline{\psi}(x)$ per ciascun elettrone iniziale, un operatore $\psi(x)$ per ciascun elettrone finale, e $A(x)$ per ciascun fotone.

Riportiamo ancora un esempio: i diagrammi del tipo



(103,12)

---

[1]) I diagrammi che si ottengono in questo modo sono chiamati diagrammi *scheletro*.

con quattro terminali elettronici (« blocchi elettronici a quattro gambe »). A tali diagrammi si arriva considerando la funzione

$$K_{ik,\,lm}(x_1, x_2; x_3, x_4) = \langle 0 \,|\, \mathrm{T}\psi_i(x_1)\psi_k(x_2)\overline{\psi}_l(x_3)\overline{\psi}_m(x_4) \,|\, 0\rangle \qquad (103,13)$$

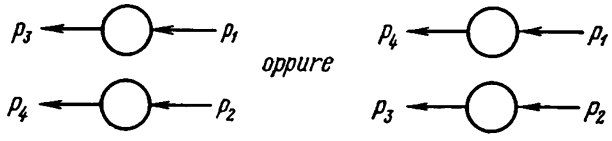
(dipendente, come è ovvio, solo dalle differenze tra i quattro argomenti). Rappresentiamo le relative trasformate di Fourier nella forma

$$\int K_{ik,\,lm}(x_1, x_2; x_3, x_4)\, e^{i(p_3x_1+p_4x_2-p_1x_3-p_2x_4)}\, d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 =$$
$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)\, K_{ik,\,lm}(p_3, p_4; p_1, p_2), \qquad (103,14)$$

dove

$$K_{ik,\,lm}(p_3, p_4; p_1, p_2) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1-p_3)\, \mathcal{G}_{il}(p_1)\, \mathcal{G}_{km}(p_2) -$$
$$-(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2-p_3)\, \mathcal{G}_{im}(p_1)\, \mathcal{G}_{kl}(p_2) +$$
$$+\mathcal{G}_{in}(p_3)\, \mathcal{G}_{kr}(p_4)\, [-i\Gamma_{nr,\,st}(p_3, p_4; p_1, p_2)]\, \mathcal{G}_{sl}(p_1)\, \mathcal{G}_{tm}(p_2). \qquad (103,15)$$

Nell'ultima espressione i primi due termini escludono dalla definizione della funzione $\Gamma(p_3, p_4; p_1, p_2)$ i diagrammi separabili in due parti tra loro non connesse aventi ciascuno due terminali esterni:



Nel terzo termine i fattori $\mathcal{G}$ escludono dalla definizione di Γ quelle parti del diagramma che rappresentano correzioni alle linee elettroniche esterne.

Notiamo anche che per le proprietà del prodotto cronologico di operatori fermionici ψ le funzioni $\Gamma(p_3, p_4; p_1, p_2)$ godono delle proprietà di antisimmetria

$$\Gamma_{ik,\,lm}(p_3, p_4; p_1, p_2) = -\Gamma_{ki,\,lm}(p_4, p_3; p_1, p_2) =$$
$$= -\Gamma_{ik,\,ml}(p_3, p_4; p_2, p_1). \qquad (103,16)$$

Se gli impulsi p_1, p_2, p_3, p_4 sono relativi a particelle reali, allora i diagrammi non separabili (103,12) rappresentano il processo di diffusione tra due elettroni. L'ampiezza di questo processo si ottiene associando ai terminali esterni del diagramma le ampiezze d'onda delle particelle (invece dei propagatori $\mathcal{G}$) [1]:

$$iM_{fi} = \overline{u}_i(p_3)\, \overline{u}_k(p_4)\, i\Gamma_{ik,\,lm}(p_3, p_4; p_1, p_2)\, u_l(p_1)\, u_m(p_2). \qquad (103,17)$$

[1]) Vedremo in seguito (§ 107) che nella composizione delle ampiezze di processi reali non è necessario tenere conto delle parti di autoenergia nei terminali liberi del diagramma.

In virtú della (103,16) quest'ampiezza gode automaticamente della necessaria antisimmetria rispetto agli scambi di elettroni.

§ 104. *Equazioni di Dyson*

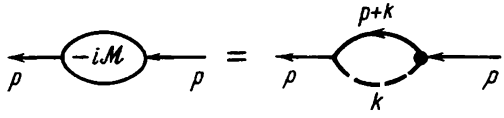
I propagatori esatti e la parte di vertice sono legati tra loro da relazioni integrali determinate. L'origine di queste diventa particolarmente chiara sulla base del metodo dei diagrammi.

Il concetto introdotto al paragrafo precedente di irriducibilità o di riducibilità interessa non solo le parti di vertice, ma anche qualsiasi altro diagramma (o sottodiagrammi). Esaminiamo da questo punto di vista i diagrammi elettronici autoenergetici compatti.

È facile intuire che di tutti gli infiniti diagrammi di questo tipo solo uno è irriducibile: il diagramma del secondo ordine

Ogni operazione per rendere piú complesso questo diagramma può considerarsi come l'introduzione di successive correzioni alle sue linee interne (elettronica o fotonica) oppure ad uno dei suoi vertici. È anzi importante notare, a questo proposito, che, grazie all'evidente simmetria del diagramma, tutte le correzioni ai vertici possono essere assegnate soltanto ad uno (qualsiasi) di essi[1]).

In tal modo, poiché di tutte le parti di autoenergia dell'elettrone « compatte » solo una è irriducibile, l'insieme di tutte queste parti (cioè l'operatore di massa $\mathscr{M}$) sarà rappresentato in tutto da un diagramma « scheletro »:



(104,1)

---

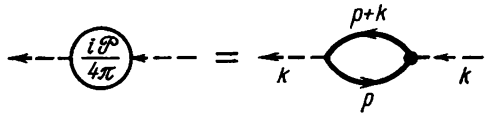
[1]) Per maggiore chiarezza sottolineiamo che sebbene introducendo le correzioni solo in uno dei vertici si ottenga tutto l'insieme di diagrammi richiesto, la struttura del blocco correttivo è, per ciascun determinato diagramma, in generale differente a seconda del vertice a cui esso viene assegnato. Ad esempio:

dove per uno stesso diagramma sono stati racchiusi in un quadrato i blocchi che svolgono il ruolo di parte di vertice riferiti al vertice destro o sinistro del diagramma stesso.

In forma analitica questa uguaglianza grafica dà[1])

$$\mathscr{M}(p) = G^{-1}(p) - \mathscr{G}^{-1}(p) =$$
$$= -ie^2 \int \gamma^\nu \mathscr{G}(p+k)\,\Gamma^\mu(p+k,\, p;\, k)\cdot \mathscr{D}_{\mu\nu}(k)\,\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \qquad (104,2)$$

Un'espressione analoga può essere scritta anche per l'operatore di polarizzazione $\mathscr{P}$. Anche tra le parti di autoenergia compatte del fotone solo una è irriducibile, e quindi $\mathscr{P}$ può anch'esso venire rappresentato mediante un solo diagramma « scheletro »:



(104,3)

L'uguaglianza analitica corrispondente è

$$\frac{\mathscr{P}_{\mu\nu}(k)}{4\pi} = D^{-1}_{\mu\nu}(k) - \mathscr{D}^{-1}_{\mu\nu}(k) =$$
$$= ie^2\,\mathrm{Tr}\int \gamma_\mu \mathscr{G}(p+k)\,\Gamma_\nu(p+k,\, p;\, k)\,\mathscr{G}(p)\,\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \qquad (104,4)$$

(gli indici bispinoriali nella (104,2) e nella (104,4) sono stati omessi).

Le relazioni (104,2) e (104,4) sono chiamate *equazioni di Dyson*. È possibile ottenere queste relazioni anche mediante un calcolo analitico diretto.

Ad esempio, per dedurre l'equazione (104,2) consideriamo la quantità

$$(\hat{\mathrm{p}} - m)_{il}\,\mathscr{G}_{lk}(x - x') = -i\,(\hat{\mathrm{p}} - m)_{il}\,\langle 0\,|\,\mathrm{T}\psi_l(x)\,\overline{\psi}_k(x')\,|\,0\rangle$$

($\mathrm{p} = i\partial$ è l'operatore di derivazione rispetto a x). Il calcolo di questa quantità può effettuarsi mediante la (99,5) esattamente allo stesso modo seguíto nel § 76 per ricavare l'equazione (76,7) per il propagatore di particelle libere. Il risultato che si ottiene è

$$(\hat{\mathrm{p}} - m)_{il}\,\mathscr{G}_{lk}(x - x') =$$
$$= -ie\gamma^\nu_{il}\,\langle 0\,|\,\mathrm{T}A_\nu(x)\,\psi_l(x)\,\overline{\psi}_k(x')\,|\,0\rangle + \delta_{ik}\delta^{(4)}(x - x');$$

il termine con la funzione delta a secondo membro di questa uguaglianza è lo stesso che compare nella (76,7), poiché le relazioni di commutazione per $t = t'$ sono uguali per gli operatori ψ in rappresentazione di Heisenberg e in rappresentazione d'interazione. Il primo termine, invece, è $-ie\gamma_\nu K^\nu_{lk}(x,\, x,\, x')$, e quindi si può scrivere

[1]) Se nella formula (104,1) la parte di vertice esatta è riferita al vertice sinistro, nella (104,2) i fattori γ e Γ si scambieranno il posto. È ovvio che le due forme dell'equazione sono sostanzialmente equivalenti.

(tralasciando nuovamente gli indici bispinoriali)

$$(\hat{p}-m)\mathcal{G}(x-x')=-ie\gamma^{\mu}K_{\mu}(x,x,x')+\delta^{(4)}(x-x'). \quad (104,5)$$

Per eseguire il passaggio alle componenti di Fourier notiamo che, integrando la formula (103,3) rispetto a $d^4kd^4p_2/(2\pi)^8$, otteniamo

$$\int K^{\mu}(p+k,p;k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}=\int K^{\mu}(0,0,x_3)e^{-ipx_3}d^4x_3=$$

$$=\int K^{\mu}(x,x,x')e^{ip(x-x')}d^4(x-x'), \quad (104,6)$$

da dove si vede che l'integrale a secondo membro rappresenta la trasformata di Fourier della funzione $K^{\mu}(x,x,x')$. In tal modo, trasformando secondo Fourier i due membri dell'equazione (104,5), usando quindi la definizione (103,9) e ricordando che $\hat{p}-m=$ $=G^{-1}(p)$, otteniamo

$$G^{-1}(p)\mathcal{G}(p)=1-ie^2\int\gamma^{\nu}\mathcal{G}(p+k)\Gamma^{\mu}(p+k,p;k)\mathcal{G}(p)\cdot D_{\mu\nu}(k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}.$$

Infine, moltiplicando questa uguaglianza a destra per $\mathcal{G}^{-1}(p)$, arriviamo di nuovo all'equazione (104,2).

§ 105. *Identità di Ward*

L'invarianza di gauge ha come conseguenza l'esistenza di una nuova relazione, piú semplice dell'equazione di Dyson, tra il propagatore fotonico e la parte di vertice.

Al fine di ricavare questa relazione operiamo la trasformazione di gauge (99,8), supponendo $\chi(x)\equiv\delta\chi(x)$ una funzione infinitesima semplice (non operatoriale) delle 4-coordinate x. Allora il propagatore elettronico varierà della quantità

$$\delta\mathcal{G}(x,x')=ie\mathcal{G}(x-x')[\delta\chi(x)-\delta\chi(x')]. \quad (105,1)$$

Sottolineiamo che una trasformazione di gauge di questo tipo viola l'omogeneità del continuo spazio-temporale, talché la funzione $\delta\mathcal{G}$ dipende ora dagli argomenti x e x' separatamente, e non solo dalla differenza $x-x'$. Lo sviluppo secondo Fourier di questa funzione deve effettuarsi rispetto a x e x' separatamente. In altre parole, nella rappresentazione degli impulsi $\delta\mathcal{G}$ è funzione di due 4-impulsi:

$$\delta\mathcal{G}(p_2,p_1)=\int\int\delta\mathcal{G}(x,x')e^{ip_2x-ip_1x'}d^4xd^4x'.$$

Sostituendo qui la (105,1) e integrando rispetto a $d^4xd^4\xi$ oppure rispetto a $d^4\xi d^4x'$ ($\xi=x-x'$), otteniamo

$$\delta\mathcal{G}(p+q,p)=ie\delta\chi(q)[\mathcal{G}(p)-\mathcal{G}(p+q)]. \quad (105,2)$$

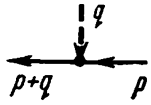
D'altra parte, applicando la stessa trasformazione di gauge all'operatore $A_\mu(x)$, otteniamo per esso la variazione

$$\delta A_\mu^{(e)}(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta\chi, \tag{105,3}$$

che si può considerare come un campo esterno infinitamente debole. Nella rappresentazione degli impulsi

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) = iq_\mu\delta\chi(q). \tag{105,4}$$

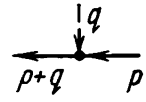
La quantità $\delta\mathcal{G}$ può venire calcolata anche come variazione del propagatore per effetto di questo campo. Al primo ordine in $\delta\chi$, questa variazione è rappresentata, evidentemente, dal diagramma scheletro

$i\mathcal{G}(p+q,p) =$ 

Qui il tratteggiato in grassetto è la linea efficace del campo esterno, cui viene associato il fattore (vedi la (100,15))

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) + \delta A_\lambda^{(e)}(q)\frac{\mathcal{P}^{\lambda\nu}(q)}{4\pi}\mathcal{D}_{\nu\mu}(q).$$

Ma il quadrivettore $\delta A_\lambda^{(e)}(q)$ è longitudinale (rispetto a q), mentre il tensore $\mathcal{P}^{\lambda\nu}$ è trasversale. Perciò il secondo termine qui si annulla, e rimane solo

$i\mathcal{G}(p+q,p) =$ 

(105,5)

dove alla linea tratteggiata sottile viene associato nel modo solito il campo $\delta A^{(e)}$. In forma analitica

$$\delta\mathcal{G} = e\mathcal{G}(p+q)\,\Gamma^\mu(p+q,\,p;\,q)\,\mathcal{G}(p)\cdot\delta A_\mu^{(e)}. \tag{105,6}$$

Sostituendo qui la (105,4) e confrontando ora con la (105,2), troviamo la relazione

$$\mathcal{G}(p+q) - \mathcal{G}(p) = -\mathcal{G}(p+q)\,\Gamma^\mu(p+q,\,p;\,q)\,\mathcal{G}(p)\cdot q_\mu$$

oppure, per le matrici inverse,

$$\mathcal{G}^{-1}(p+q) - \mathcal{G}^{-1}(p) = q_\mu\Gamma^\mu(p+q,\,p;\,q) \tag{105,7}$$

(*H. S. Green*, 1953).

Facendo tendere in questa uguaglianza $q \to 0$ e confrontando i coefficienti davanti alla quantità infinitesima q_μ, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\mathcal{G}^{-1}(p) = \Gamma^\mu(p,\,p;\,0). \tag{105,8}$$

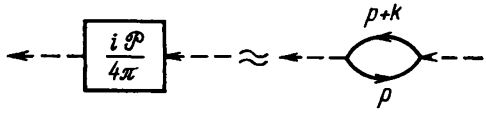
Questa è la cosiddetta *identità di Ward* (J. G. Ward, 1950). Come si vede, la derivata rispetto all'impulso di $\mathcal{G}^{-1}(p)$ coincide con l'operatore di vertice che corrisponde ad un impulso trasferito nullo[1]). La derivata della funzione stessa $\mathcal{G}(p)$ è

$$-\frac{\partial}{\partial p_\mu} i\mathcal{G}(p) = i\mathcal{G}(p)\,[-i\Gamma^\mu(p, p; 0)]\, i\mathcal{G}(p). \qquad (105,9)$$

Analogamente si potrebbero trovare anche le derivate di ordine piú elevato, eseguendo i calcoli in approssimazione di ordine superiore in $\delta\chi$. Queste formule, tuttavia, non ci saranno necessarie.

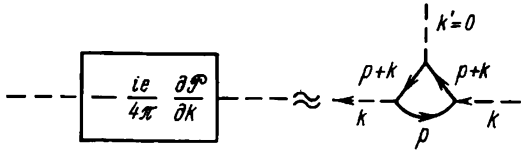
Consideriamo ora la derivata dell'operatore di polarizzazione $\partial\mathcal{P}(k)/\partial k_\mu$. A differenza della funzione $\mathcal{G}(p)$ la quantità $\mathcal{P}(k)$ è gauge-invariante e non varia in seguito all'introduzione del campo fittizio esterno (105,4). Perciò la sua derivata non si può calcolare allo stesso modo. Tuttavia anche per questa quantità è possibile ottenere un'espressione grafica determinata.

A tal fine consideriamo il primo dei diagrammi che entrano nella definizione di $\mathcal{P}$, e cioè il diagramma del secondo ordine



(105,10)

Alle linee continue sono associati i fattori $iG(p)$ e $iG(p+k)$. La derivazione rispetto a k sostituisce il secondo di essi con $i\partial G(p+k)/\partial k$, e, per l'identità (105,9), tale sostituzione è equivalente all'aggiunta di un altro vertice su una linea elettronica:



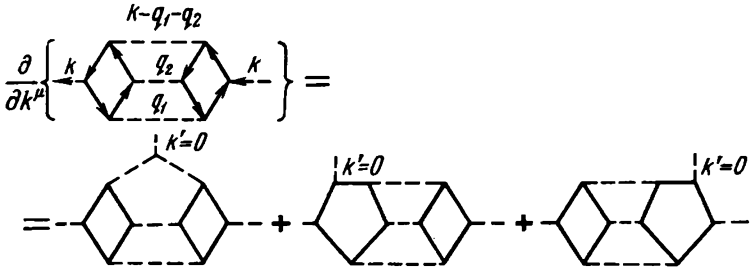
(105,11)

Noi vediamo che al primo ordine non nullo la derivata in questione è espressa mediante un diagramma con tre terminali fotonici (« blocco fotonico a tre gambe »). Sottolineiamo però, subito, che questo diagramma non dà affatto di per se stesso l'ampiezza del processo di trasformazione di un fotone in due fotoni. L'ampiezza di tale processo verrebbe espressa dalla somma del diagramma (105,11) con un altro diagramma analogo, in cui la direzione di aggiramento del cappio è invertita; secondo il teorema di Furry questa somma si annulla. Di per se stesso il diagramma (105,11) non è nullo.

---

[1]) In approssimazione di ordine zero, cioè per il propagatore di particelle libere, questa identità è evidente: $G^{-1}(p) = \hat{p} - m$, e quindi $\partial G^{-1}/\partial p_\mu = \gamma^\mu$.

In maniera analoga si possono derivare anche diagrammi piú complessi, aggiungendo successivamente dei vertici con $k' = 0$ a tutte le linee elettroniche dipendenti da k. Esistono, tuttavia, anche diagrammi nei quali la dipendenza da k si ha anche nelle linee interne fotoniche, come ad esempio il diagramma a sinistra nella figura



La derivata del grafico tra parentesi è qui rappresentata in forma diagrammatica mediante l'introduzione di una nuova notazione grafica: un vertice fotonico fittizio a tre particelle, cioè un punto in cui convergono tre linee tratteggiate e al quale viene associata la quantità

$$4\pi i \frac{\partial D^{-1}}{\partial k^\mu} = 2ik_\mu \equiv v_\mu. \tag{105,12}$$

Ora possiamo derivare qualsiasi grafico inserendo nelle linee interne dipendenti da k i vertici v_μ o γ_μ ed eseguendo poi i calcoli secondo le regole generali. Sommando queste correzioni di ordine superiore otteniamo

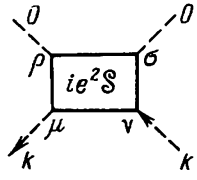
$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathscr{P}_{\mu\nu}}{\partial k^\lambda} = \mathscr{V}_{\mu\lambda\nu}, \tag{105,13}$$

dove $ie\mathscr{V}_{\mu\lambda\nu}$ è la somma delle parti interne di tutti i blocchi fotonici « a tre gambe » ottenuti nel modo indicato.

In seguito ci sarà necessaria anche la derivata seconda dell'operatore di polarizzazione. Derivando analogamente ancora una volta l'uguaglianza (105,13) otteniamo

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathscr{P}_{\mu\nu}}{\partial k^\rho\, \partial k^\sigma} = \mathscr{S}_{\mu\rho\sigma\nu} + \mathscr{S}_{\mu\sigma\rho\nu}, \tag{105,14}$$

dove $ie^2\mathscr{S}$ è la somma delle parti interne di tutti i blocchi fotonici « a quattro gambe » del tipo



(105,15)

(ivi inclusi, ovviamente, anche i grafici con vertici fittizi a tre fotoni).

§ 106. *Propagatore elettronico in un campo esterno*

Se il sistema si trova in un campo esterno dato $A^{(e)}(x)$, allora il propagatore elettronico esatto è sempre determinato dalla formula (102,1), ma nell'hamiltoniano $H = H_0 + V$, che realizza il passaggio alla rappresentazione di Heisenberg, ora compare anche l'interazione degli elettroni con il campo esterno:

$$V = e \int A_\mu j^\mu d^3x + e \int A_\mu^{(e)} j^\mu d^3x. \tag{106,1}$$

Poiché il campo esterno rompe l'omogeneità dello spazio-tempo, il propagatore $\mathcal{G}(x, x')$ dipenderà ora dai due argomenti separatamente e non solo dalla loro differenza $x - x'$.

Se passiamo nel modo solito alla rappresentazione d'interazione si arriverà alla tecnica grafica ordinaria, in cui, accanto alle linee fotoniche virtuali, figureranno anche le linee del campo esterno. Tale tecnica, tuttavia, non è comoda in quei casi in cui il campo esterno non può essere considerato come una perturbazione debole: in primo luogo, quando le particelle nel campo possono trovarsi in stati legati. D'altra parte, il propagatore elettronico in un campo esterno è necessario soprattutto per lo studio delle proprietà degli stati legati, in particolare per la determinazione dei livelli energetici tenendo conto delle correzioni radiative. Per la costruzione di questo propagatore è necessario partire da una rappresentazione degli operatori, in cui il campo esterno viene considerato esattamente già nell'approssimazione di ordine « zero » rispetto all'interazione elettrone-fotone (*W. H. Furry*, 1951).

Nel seguito noi supporremo il campo esterno stazionario, cioè non dipendente dal tempo.

La rappresentazione richiesta degli operatori ψ è data dalle formule (32,9) per la seconda quantizzazione in un campo esterno:

$$\begin{aligned} \psi^{(e)}(t, \boldsymbol{r}) &= \sum_n \{a_n \psi_n^{(+)}(\boldsymbol{r}) e^{-i\varepsilon_n^{(+)}t} + b_n^+ \psi_n^{(-)}(\boldsymbol{r}) e^{i\varepsilon_n^{(-)}t}\}, \\ \overline{\psi}^{(e)}(t, \boldsymbol{r}) &= \sum_n \{a_n^+ \overline{\psi}_n^{(+)}(\boldsymbol{r}) e^{i\varepsilon_n^{(+)}t} + b_n \overline{\psi}_n^{(-)}(\boldsymbol{r}) e^{-i\varepsilon_n^{(-)}t}\}, \end{aligned} \tag{106,2}$$

dove $\psi_n^{(\pm)}(\boldsymbol{r})$ e $\varepsilon_n^{(\pm)}$ sono le funzioni d'onda e i livelli energetici rispettivamente dell'elettrone e del positrone, che costituiscono le soluzioni del problema « ad una particella »: l'equazione di Dirac per una particella in un campo. È facile capire che gli operatori (106,2) sono operatori ψ in una certa rappresentazione (*rappresentazione di Furry*), che può considerarsi come intermedia tra la rappresentazione di Heisenberg e la rappresentazione d'interazione. Questi

operatori si possono scrivere nella forma

$$\psi^{(e)}(t, \boldsymbol{r}) = e^{iH_1 t}\psi(\boldsymbol{r})\, e^{-iH_1 t},$$
$$\overline{\psi}^{(e)}(t, \boldsymbol{r}) = e^{iH_1 t}\overline{\psi}(\boldsymbol{r})\, e^{-iH_1 t}, \tag{106,3}$$

dove

$$H_1 = H_0 + e \int A_\mu^{(e)}(x)\, j^\mu(x)\, d^3x.$$

L'operatore del campo elettromagnetico A_μ, dal canto suo, commuta ovviamente con il secondo termine di H_1, e quindi per esso la rappresentazione di Furry coincide con la rappresentazione d'interazione.

Il propagatore elettronico in approssimazione zero nella nuova rappresentazione è definito come segue:

$$G_{ik}^{(e)}(x, x') = -i\,\langle 0 \,|\, T\psi_i^{(e)}(x)\,\overline{\psi}_k^{(e)}(x') \,|\, 0\rangle. \tag{106,4}$$

L'operatore $\psi^{(e)}(t, \boldsymbol{r})$ soddisfa l'equazione di Dirac in un campo esterno

$$[\hat{p} - e\hat{A}^{(e)}(x) - m]\,\psi^{(e)}(t, \boldsymbol{r}) = 0, \tag{106,5}$$

mentre la funzione $G^{(e)}$ soddisfa, a sua volta, l'equazione

$$[\hat{p} - e\hat{A}^{(e)}(x) - m]\, G^{(e)}(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') \tag{106,6}$$

(cfr. deduzione della (104,5)).

La tecnica grafica, che esprime il propagatore esatto $\mathcal{G}$ sotto forma di serie di potenze di e^2, viene costruita mediante il passaggio dalla rappresentazione di Heisenberg nella rappresentazione di Furry, esattamente allo stesso modo in cui abbiamo fatto prima il passaggio alla rappresentazione d'interazione. Si otterranno cosí dei diagrammi dello stesso tipo, nei quali alle linee continue verranno ora associati i fattori $iG^{(e)}$ (in luogo di iG).

Una trascurabile differenza nelle regole di trascrizione dei diagrammi in forma analitica è connessa al fatto che nella rappresentazione delle coordinate $G^{(e)}$ non dipende piú solo dalla differenza $x - x'$. In un campo continuo costante, tuttavia, l'omogeneità del tempo si conserva, e quindi gli argomenti t e t' entreranno come prima solo sotto forma della differenza $t - t' \equiv \tau$, e perciò

$$G^{(e)} = G^{(e)}(\tau, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}').$$

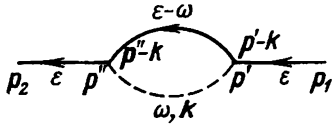
Il passaggio alla rappresentazione degli impulsi viene realizzato mediante lo sviluppo di Fourier rispetto a ciascuno degli argomenti della funzione

$$G^{(e)}(\tau, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') =$$
$$= \int\int\int e^{i(\boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{r}' - \varepsilon\tau)} G(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}. \tag{106,7}$$

Ad ogni linea, alla quale corrisponde il fattore $iG^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1)$, si deve ora assegnare un valore dell'energia virtuale ε, ma due valori dell'impulso: l'impulso iniziale $\boldsymbol{p}_1$ e l'impulso finale $\boldsymbol{p}_2$:

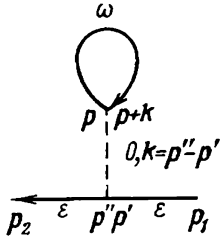
$$iG^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) = \overset{p_2 \varepsilon p_1}{\longleftarrow}. \tag{106,8}$$

Come risultato si ottiene la regola di trascrizione dei diagrammi in forma analitica: le integrazioni rispetto a $d\varepsilon/2\pi$ vengono eseguite nel modo solito, mentre le integrazioni rispetto a $d^3p_1/(2\pi)^3$ e $d^3p_2/(2\pi)^3$ vengono eseguite indipendentemente, tenendo conto della conservazione dell'impulso in ciascun vertice. Cosí, ad esempio,



$$= e^2 \int\int\int G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}'') \gamma^\mu G^{(e)}(\varepsilon - \omega, \boldsymbol{p}'' - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{k}) \times$$
$$\times \gamma^\nu G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}_1) D_{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{k}) \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3p''}{(2\pi)^3}. \tag{106,9}$$

È importante notare che nella tecnica che andiamo esponendo è necessario tenere conto anche dei diagrammi con linee elettroniche « chiuse su se stesse », i quali nella tecnica ordinaria vengono eliminati in quanto connessi con la « corrente nel vuoto ». In presenza di un campo esterno questa corrente non deve piú annullarsi a causa della « polarizzazione del vuoto » originata dal campo stesso. Cosí, nel diagramma



(106,10)

al cappio in alto è associato il fattore

$$i \int\int G^{(e)}(\omega, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{106,11}$$

Tuttavia, è necessario precisare qui il senso dato all'integrale in $d\omega$. Infatti, integrare la trasformata di Fourier della funzione $G^{(e)}(\tau)$ in $d\omega$ significa considerare il valore di questa funzione per $\tau = 0$; ma la funzione $G^{(e)}(\tau)$ è discontinua in questo punto, e quindi è

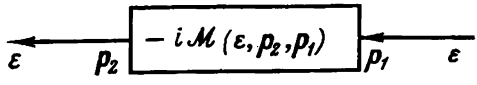
necessario indicare quale dei due valori limite deve essere preso. Per chiarire questo problema è sufficiente notare che l'integrale (106,11) è originato dalla contrazione degli operatori ψ che figurano in uno stesso operatore di corrente:

$$j^{\mu} = \overline{\psi}^{(e)}(t, \boldsymbol{r})\,\gamma^{\mu}\psi^{(e)}(t, \boldsymbol{r}),$$

dove $\overline{\psi}^{(e)}$ sta a sinistra di $\psi^{(e)}$. In accordo con la definizione del propagatore (106,4) questo ordine dei fattori per $t = t'$ si ottiene ponendo $t' = t + 0$, intendendo cioè il valore limite della funzione $G^{(e)}(t - t')$ come limite per $t - t' \to -0$. In altre parole si può dire che l'integrale in $d\omega/2\pi$ nella (106,11) va inteso come segue:

$$\int \ldots e^{-i\omega\tau}\frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{per} \quad \tau \to -0. \tag{106,12}$$

L'operatore di massa in un campo esterno è definito esattamente come nel § 102: $-i\mathscr{M}$ è la somma di tutti i blocchi di autoenergia compatti. Esso è ora funzione dell'energia ε e degli impulsi $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_2$ associati ai terminali esterni di ingresso e di uscita dal blocco:



(106,13)

Procedendo esattamente allo stesso modo seguíto per la deduzione della (102,6), otteniamo l'equazione

$$\mathscr{G}(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) - G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) = \\ = \int\int G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}'')\,\mathscr{M}(\varepsilon, \boldsymbol{p}'', \boldsymbol{p}')\,\mathscr{G}(\varepsilon, \boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}_1)\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p''}{(2\pi)^3}. \tag{106,14}$$

A questa equazione si può dare una forma piú naturale tornando alla rappresentazione delle coordinate rispetto alle variabili spaziali, introducendo la funzione

$$\mathscr{G}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \int\int \mathscr{G}(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1)\,e^{i(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}')}\frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6}, \tag{106,15}$$

e procedendo analogamente per le altre quantità. Effettuando nella (106,14) l'antitrasformata di Fourier, otteniamo

$$\mathscr{G}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \\ = \int\int G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2)\,\mathscr{M}(\varepsilon, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1)\,\mathscr{G}(\varepsilon, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}')\,d^3x_1 d^3x_2.$$

Applichiamo ora ad ambedue i membri dell'uguaglianza l'operatore

$$\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} - e\gamma^{\mu}A_{\mu}^{(e)}(x)$$

(ε è un numero, $\mathbf{p} = -i\nabla$ è l'operatore di derivazione rispetto alle coordinate $\boldsymbol{r}$). Qui occorre tenere conto che secondo la (106,6)

$$[\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} - e\hat{A}^{(e)}(x)]\,G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{106,16}$$

Come risultato otteniamo la seguente equazione:

$$[\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} - e\hat{A}^{(e)}(x)]\,\mathcal{G}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \\ - \int \mathcal{M}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1)\,\mathcal{G}(\varepsilon, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}')\,d^3x_1 = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \qquad (106,17)$$

La particolare importanza della funzione $\mathcal{G}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ è dovuta al fatto che i suoi punti singolari determinano i livelli energetici dell'elettrone in un campo esterno.

Mostriamo la validità di questa affermazione dapprima per la funzione approssimata $G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$. Sostituendo gli operatori (106,2) nella definizione del propagatore (106,4), otteniamo (espressione perfettamente analoga alle formule (76,12) per il propagatore di particelle libere)

$$G^{(e)}_{ik}(t - t', \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \\ = \begin{cases} -i \sum\limits_n \psi^{(+)}_{ni}(\boldsymbol{r})\,\overline{\psi}^{(+)}_{nk}(\boldsymbol{r}')\exp\{-i\varepsilon^{(+)}_n(t - t')\}, & t > t', \\ i \sum\limits_n \psi^{(-)}_{ni}(\boldsymbol{r})\,\overline{\psi}^{(-)}_{nk}(\boldsymbol{r}')\exp\{i\varepsilon^{(-)}_n(t - t')\}, & t < t' \end{cases} \qquad (106,18)$$

e passando alle trasformate di Fourier rispetto al tempo

$$G^{(e)}_{ik}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_n \left\{ \frac{\psi^{(+)}_{ni}(\boldsymbol{r})\,\overline{\psi}^{(+)}_{nk}(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon - \varepsilon^{(+)}_n + i0} + \frac{\psi^{(-)}_{ni}(\boldsymbol{r})\,\overline{\psi}^{(-)}_{nk}(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon + \varepsilon^{(-)}_n - i0} \right\}. \qquad (106,19)$$

Si vede da qui che la funzione $G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, come funzione analitica di ε, ha sul semiasse reale positivo dei punti singolari coincidenti con i livelli energetici dell'elettrone, e sul semiasse negativo dei punti singolari coincidenti con i livelli energetici del positrone. I valori $\varepsilon^{(\pm)}_n > m$ formano uno spettro continuo[1]), e le corrispondenti singolarità si fondono in due tagli del piano complesso ε: da $-\infty$ a $-m$, e da m a $+\infty$. Sul segmento $|\varepsilon| < m$ giacciono i punti singolari che determinano i livelli energetici discreti.

Il propagatore esatto $\mathcal{G}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ può essere sviluppato in modo analogo, utilizzando gli elementi di matrice degli operatori in rappresentazione di Schrödinger legati, come è noto, agli elementi di matrice degli operatori di Heisenberg ψ dalle relazioni

$$\langle m\,|\,\psi(t, \boldsymbol{r})\,|\,n\rangle = \langle m\,|\,\psi(\boldsymbol{r})\,|\,n\rangle\, e^{-i(E_n - E_m)t} \qquad (106,20)$$

(e analogamente per $\overline{\psi}$). Qui E_n sono i livelli energetici esatti (cioè con tutte le correzioni radiative) di un sistema in un campo esterno. L'operatore ψ fa aumentare e l'operatore $\overline{\psi}$ fa diminuire di 1 (cioè di $+|e|$) la carica del sistema. Questo significa che negli elementi di matrice $\langle n\,|\,\psi\,|\,0\rangle$ e $\langle 0\,|\,\overline{\psi}\,|\,n\rangle$ gli stati $|\,n\rangle$ devono corrispon-

[1]) Si presuppone che il campo esterno all'infinito si annulli.

dere al valore $+1$ della carica del sistema; possono, cioè, contenere, oltre ad un positrone, solo un certo numero di coppie elettrone-positrone e un certo numero di fotoni; denotiamo l'energia di questi stati con $E_n^{(-)}$. Analogamente negli elementi di matrice $\langle 0 \mid \psi \mid n \rangle$ e $\langle n \mid \bar{\psi} \mid 0 \rangle$ gli stati $\mid n \rangle$ contengono un elettrone $+$ un sistema di coppie e di fotoni (energia rispettiva E_n^{+}). Al posto della (106,18) otteniamo ora

$$\mathcal{G}_{ik}(t-t', \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \\ = \begin{cases} -i \sum\limits_n \langle 0 \mid \psi_i(\boldsymbol{r}) \mid n \rangle \langle n \mid \bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}') \mid 0 \rangle \exp\{-E_n^{(+)}(t-t')\}, \\ \qquad\qquad t > t', \\ i \sum\limits_n \langle 0 \mid \bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}') \mid n \rangle \langle n \mid \psi_i(\boldsymbol{r}) \mid 0 \rangle \exp\{iE_n^{(-)}(t-t')\}, \\ \qquad\qquad t < t', \end{cases} \tag{106,21}$$

e da qui

$$\mathcal{G}_{ik}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \\ = \sum_n \left\{ \frac{\langle 0 \mid \psi_i(\boldsymbol{r}) \mid n \rangle \langle n \mid \bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}') \mid 0 \rangle}{\varepsilon - E_n^{(+)} + i0} + \frac{\langle 0 \mid \bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}') \mid n \rangle \langle n \mid \psi_i(\boldsymbol{r}) \mid 0 \rangle}{\varepsilon + E_n^{(-)} - i0} \right\}. \tag{106,22}$$

Supponiamo che ε sia vicino ad uno qualsiasi dei livelli energetici discreti $E_n^{(+)}$ (o ad uno dei livelli $-E_n^{(-)}$). Allora nella (106,22) di tutta la somma si può lasciare solo il termine singolare corrispondente. Sostituendolo quindi nella (106,17) vediamo che i fattori dipendenti dal secondo argomento $\boldsymbol{r}'$ (per $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$) scompaiono. Come risultato otteniamo un'equazione integro-differenziale omogenea per la funzione $\langle 0 \mid \psi(\boldsymbol{r}) \mid n \rangle$ (o $\langle n \mid \psi(\boldsymbol{r}) \mid 0 \rangle$ che per brevità denoteremo con $\Psi_n(\boldsymbol{r})$[1]). Omettendo l'indice n, abbiamo

$$[\gamma^0 \varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - e\hat{A}^{(e)}(\boldsymbol{r})]_{ik} \Psi_k(\boldsymbol{r}) - \\ - \int \mathcal{M}_{ik}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) \Psi_k(\boldsymbol{r}_1) d^3x_1 = 0. \tag{106,23}$$

I livelli energetici discreti E_n figurano qui come autovalori di questa equazione. Di conseguenza, l'equazione (106,23) diventa lo strumento di base normale per la determinazione di questi livelli. Ricaviamo, ad esempio, dalla (106,23) la correzione del primo ordine in $\mathcal{M}$ al livello energetico discreto dell'elettrone ε_n ottenuto risolvendo l'equazione di Dirac

$$[\gamma^0 \varepsilon_n + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - e\hat{A}^{(e)}(\boldsymbol{r})] \psi_n(\boldsymbol{r}) = 0; \tag{106,24}$$

---

[1]) Se si trascurano le correzioni radiative, $\Psi_n(\boldsymbol{r})$ coincidono (per gli stati ad un elettrone e un positrone) con le funzioni d'onda $\psi_n^{(+)}$ o $\psi_n^{(-)}$, soluzioni dell'equazione di Dirac.

sia la funzione d'onda $\psi_n(\boldsymbol{r})$ normalizzata con la condizione

$$\int \psi_n^* \psi_n d^3x = 1. \tag{106,25}$$

Scriviamo l'autofunzione dell'equazione (106,23) nella forma

$$\Psi_n(\boldsymbol{r}) = \psi_n(\boldsymbol{r}) + \psi_n^{(1)}(\boldsymbol{r}), \tag{106,26}$$

dove $\psi_n^{(1)}$ è la correzione a $\psi_n(\boldsymbol{r})$. Sostituendo la (106,26) nell'equazione (106,23), moltiplicandola quindi da sinistra per $\bar{\psi}_n(\boldsymbol{r})$ e integrando in d^3x[1]), otteniamo l'espressione voluta

$$E_n - \varepsilon_n \approx \int\int \bar{\psi}_{ni}(\boldsymbol{r}) \mathscr{M}_{ik}(\varepsilon_n, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) \psi_{nk}(\boldsymbol{r}_1) d^3x d^3x_1. \tag{106,27}$$

§ 107. Condizioni fisiche della rinormalizzazione

La teoria esposta finora in questo capitolo aveva, in notevole misura, carattere formale, Noi abbiamo operato con tutte le quantità, supponendole quantità finite e di proposito non abbiamo rivolto alcuna attenzione agli infiniti incontrati nella teoria. In realtà, nel calcolo delle funzioni $\mathscr{D}$, $\mathscr{G}$, Γ secondo la teoria delle perturbazioni si incontrano degli integrali divergenti, ai quali non si può assegnare, senza fare intervenire considerazioni supplementari, un qualsiasi valore determinato. Nella comparsa di queste divergenze si manifesta l'imperfezione logica dell'elettrodinamica quantistica esistente. Noi vedremo, tuttavia, che nell'ambito di questa teoria si possono stabilire determinate ricette che permettono di effettuare in modo univoco « la sottrazione degli infiniti » e di ottenere come risultato valori finiti per tutte le quantità aventi un senso fisico diretto. Alla base di queste ricette ci sono delle evidenti richieste fisiche che si riducono a quanto segue: la massa del fotone deve essere uguale a zero, e la carica e la massa dell'elettrone devono essere uguali ai rispettivi valori osservabili.

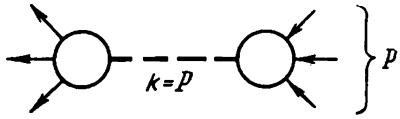
Iniziamo col chiarire le condizioni imposte al propagatore fotonico.

Consideriamo un processo di diffusione che può avere luogo attraverso stati intermedi ad una particella (con un fotone virtuale). L'ampiezza di tale processo deve avere una singolarità quando il quadrato del 4-impulso totale P delle particelle iniziali coincide con il quadrato della massa di un fotone reale, cioè $P^2 = 0$; nel § 80 abbiamo visto che questa richiesta discende dalla condizione generale di unitarietà. Il termine singolare nell'ampiezza viene dato da un

---

[1]) Per integrare occorre usare il fatto che l'operatore differenziale dell'equazione (106,24) è autoaggiunto, il che permette di trasferire la sua azione da $\psi_n^{(1)}$ su $\bar{\psi}_n$.

diagramma del tipo (80,1)



(107,1)

dove, per tenere conto delle correzioni radiative, le due parti del diagramma devono essere unite da una linea tratteggiata in grassetto (propagatore fotonico esatto). Questo significa che la funzione $\mathcal{D}(k^2)$ deve avere un punto singolare per $k^2 = 0$, cioè deve essere

$$\mathcal{D} \to \frac{4\pi Z}{k^2} \quad \text{per} \quad k^2 \to 0, \tag{107,2}$$

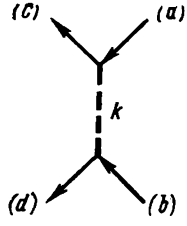
dove Z è una costante. Per l'operatore di polarizzazione da qui si ricava, secondo la (100,20), la condizione

$$\mathcal{P}(0) = 0. \tag{107,3}$$

Allora per il coefficiente nella (107,2) avremo

$$\frac{1}{Z} = 1 - \frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2}\bigg|_{k^2 \to 0}.$$

Ulteriori restrizioni relative alla funzione $\mathcal{P}(k^2)$ si possono ottenere dall'analisi della definizione fisica della carica elettrica di una particella. Tale definizione consiste nel fatto che due particelle classiche (cioè pesanti a piacere), in posizione di quiete a grandi distanze l'una dall'altra[1]), devono interagire secondo la legge di Coulomb: $U = e^2/r$. D'altra parte, questa interazione è espressa dal diagramma



(107,4)

dove le linee in alto e in basso sono relative a particelle classiche. Le correzioni all'autoenergia del fotone sono state incluse nella linea del fotone virtuale. Qualsiasi altra correzione, che interessasse le linee delle particelle pesanti, annullerebbe il diagramma. In effetti, l'aggiunta di qualsiasi altra linea interna nel diagramma (107,4) (ad esempio, l'unione delle linee a e c oppure a e b mediante una

[1]) Si intendono qui distanze $\gg 1/m$, dove m è la massa dell'elettrone.

linea fotonica) comporta la comparsa nel diagramma di linee di particelle virtuali pesanti, alle quali vengono messi in corrispondenza i relativi propagatori. Ma il propagatore di una particella contiene la massa M della particella stessa al denominatore e si annulla quindi per $M \to \infty$.

Dalla forma del diagramma (107,4) è chiaro (cfr. § 83) che il fattore $e^2\mathscr{D}(k^2)$ deve rappresentare (a meno del segno) la trasformata di Fourier del potenziale d'interazione delle particelle. Il carattere statico dell'interazione implica che le frequenze dei fotoni virtuali ω si annullino, e che a grandi distanze corrispondano vettori d'onda $\boldsymbol{k}$ piccoli. La trasformata di Fourier del potenziale coulombiano è $4\pi e^2/\boldsymbol{k}^2$. In conclusione, poiché la funzione $\mathscr{D}$ dipende solo dal quadrato $k^2 = \omega^2 - \boldsymbol{k}^2$, si arriva alla condizione[1])

$$\mathscr{D} \to \frac{4\pi}{k^2} \quad \text{per} \quad k^2 \to 0, \tag{107,5}$$

cioè, il coefficiente nella (107,2) deve essere $Z = 1$. Per l'operatore di polarizzazione $\mathscr{P}(k^2)$, questo significa che deve essere

$$\frac{\mathscr{P}(k^2)}{k^2} \to 0 \quad \text{per} \quad k^2 \to 0. \tag{107,6}$$

Oltre alla condizione a noi già nota (107,3), da qui discende che deve anche essere

$$\mathscr{P}'(0) = 0. \tag{107,7}$$

Nel § 100 è stato notato che ad una linea efficace esterna di un fotone reale corrisponde nel diagramma il fattore (100,15), oppure, tenendo conto delle (100,16) e (100,19)

$$\left[1 + \frac{1}{4\pi}\mathscr{P}(0)\,\mathscr{D}(0)\right] e_\mu.$$

Vediamo ora che in virtú delle (107,5-6) il termine correttivo qui si annulla. In altre parole, si arriva al seguente importante risultato: nelle linee fotoniche esterne non occorre affatto tenere conto delle correzioni radiative.

Cosí, condizioni fisiche naturali portano alla determinazione di dati valori (nulli) delle quantità $\mathscr{P}(0)$ e $\mathscr{P}'(0)$. Il calcolo di queste quantità secondo i diagrammi della teoria delle perturbazioni avrebbe portato, invece, ad integrali divergenti. Come si vede, il metodo per rimuovere queste divergenze consiste nell'assegnare alle espressioni divergenti dei valori dati a priori, stabiliti sulla base di condizioni fisiche. Questo procedimento è noto come *rinormalizzazione* delle rispettive quantità fisiche[2]).

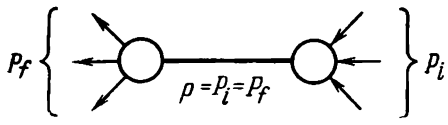
---

[1]) Il segno è evidente: $\mathscr{D}(k^2)$ tende al propagatore dei fotoni liberi $D(k^2)$.

[2]) L'idea di questo approccio venne formulata per la prima volta da *H. Kramers* (1947). L'applicazione sistematica del metodo della rinormalizzazione nell'elettrodinamica quantistica venne realizzata nei lavori di *Dyson*, *Tomonaga*, *Feynman* e *Schwinger*.

Questa tecnica può essere formulata anche in un modo un poco differente. Cosí, per la rinormalizzazione della carica di una particella si introduce la carica « intrinseca » (« nuda ») non fisica e_c come un parametro che entra nell'espressione dell'operatore originario d'interazione elettromagnetica che figura nella teoria formale delle perturbazioni. Quindi, la condizione di rinormalizzazione viene formulata come richiesta che $e_c^2\mathcal{D}(k^2) \to 4\pi e^2/k^2$ (per $k^2 \to 0$), dove e è la carica fisica reale della particella. Da qui troviamo $e_c^2 Z = e^2$ e mediante questa relazione la quantità non fisica e_c viene eliminata da tutte le formule che determinano effetti osservabili. Richiedendo immediatamente che $Z = 1$, « en passant » noi operiamo con ciò la rinormalizzazione e ci liberiamo dalla necessità di introdurre quantità fittizie anche nei calcoli intermedi.

Passiamo ora a chiarire le condizioni della rinormalizzazione del propagatore elettronico. A tal fine consideriamo ora un processo di diffusione che può avere luogo attraverso uno stato intermedio ad una particella (con un elettrone virtuale). L'ampiezza di tale processo deve avere una singolarità quando il quadrato del 4-impulso totale delle particelle iniziali P_i coincide con il quadrato della massa del fotone reale: $P_i^2 = m^2$. Il termine singolare nell'ampiezza viene dato da un diagramma del tipo



(107,8)

dove, per tenere conto delle correzioni radiative, la linea in grassetto rappresenta il propagatore elettronico esatto. Questo significa che la funzione $\mathcal{G}(p)$ deve avere un punto singolare per $p^2 = m^2$, cioè deve avere la forma limite

$$\mathcal{G}(p) \approx Z_1 \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i0} + g(p) \quad \text{per} \quad p^2 \to m^2, \qquad (107,9)$$

dove Z_1 è una costante scalare, e $g(p)$ rimane finito per $p^2 \to m^2$. La struttura matriciale del termine singolare nella (107,9) (cioè la proporzionalità a $\hat{p} + m$) è una conseguenza di quella stessa condizione di unitarietà dalla quale è originata la richiesta stessa della presenza di una singolarità. Mostriamo questo fatto chiarendo, parallelamente, l'importante questione riguardante le condizioni della rinormalizzazione delle linee elettroniche esterne.

Se $\mathcal{G}(p)$ ha la forma limite (107,9), allora per la matrice inversa abbiamo

$$\mathcal{G}^{-1}(p) \approx \frac{1}{Z_1}(\hat{p}-m) - (\hat{p}-m)\, g(\hat{p}-m) \quad \text{per} \quad p^2 \to m^2. \qquad (107,10)$$

Per l'operatore di massa

$$\mathscr{M} = G^{-1} - \mathscr{G}^{-1} \approx \left(1 - \frac{1}{Z_1}\right)(\hat{p} - m) + (\hat{p} - m)\, g\, (\hat{p} - m), \quad \text{per} \quad p^2 \to m^2. \tag{107,11}$$

Ad una linea elettronica efficace esterna (ad esempio, entrante) è associato nel diagramma il fattore (cfr. la (100,15))

$$\mathscr{U}(p) = u(p) + \mathscr{G}(p)\, \mathscr{M}(p)\, u(p), \tag{107,12}$$

dove $u(p)$ è l'ordinaria ampiezza della funzione d'onda dell'elettrone che soddisfa l'equazione di Dirac $(\hat{p} - m)\, u = 0$. In virtú delle richieste di invarianza relativistica ($\mathscr{U}$, come anche u, è un bispinore), il valore di $\mathscr{U}(p)$ nel limite $p^2 \to m^2$ può differire da $u(p)$ solo per un fattore scalare costante:

$$\mathscr{U}(p) = Z' u(p). \tag{107,13}$$

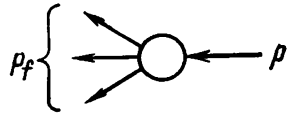
Il fattore Z' è connesso in modo ben determinato con il fattore Z_1, ma stabilire questa relazione con la semplice sostituzione delle (107,10-11) nella (107,12) non è possibile a causa della indeterminatezza che compare: il risultato dipenderà dall'ordine con il quale verranno eseguiti i passaggi al limite nei diversi fattori nella (107,12).

Si può, tuttavia, fare a meno di specificare il modo corretto di eseguire il passaggio al limite, utilizzando la condizione di unitarietà applicata alla reazione rappresentata dal diagramma (107,8). La relazione di unitarietà, in generale, vale non se riferita ai singoli diagrammi, ma a tutto l'insieme delle ampiezze dei processi. Ma per $p^2 \to m^2$ il diagramma singolare (107,8) dà il contributo fondamentale nella corrispondente ampiezza M_{fi}, e quindi gli altri diagrammi, relativi a quella stessa reazione, si possono trascurare.

In virtú delle richieste di unitarietà, come abbiamo mostrato nel § 80, lo stato intermedio ad una particella porta alla comparsa nell'ampiezza di reazione di una parte immaginaria contenente una funzione delta

$$i\pi\delta(p^2 - m^2) \sum_{\text{polar}} M_{fn} M_{in}^*, \tag{107,14}$$

dove, nel caso considerato, l'indice n è relativo allo stato con un elettrone reale, e la sommatoria viene eseguita sulle sue polarizzazioni (al fine di evitare inutili complicazioni supporremo, come abbiamo fatto nel § 80, che sia stata operata la simmetrizzazione dei due membri della relazione di unitarietà rispetto alle elicità delle particelle iniziali e finali; allora $M_{fi} = M_{if}$). L'ampiezza M_{fn} è relativa al processo rappresentato dal diagramma



e ha la forma

$$M_{fn} = (M'_{fn}\mathcal{U}) = Z'\,(M'_{fn}u),$$

dove M'_{fn} è un fattore con un indice bispinoriale libero[1]). Analogamente, l'ampiezza M^*_{in} ha una struttura del tipo

$$M^*_{in} = (\overline{\mathcal{U}}M'^*_{in}) = Z'\,(\bar{u}M'^*_{in}).$$

La sommatoria sulle polarizzazioni dell'elettrone sostituisce il prodotto $(M'_{fn}\ u)\,(\bar{u}M'^*_{in})$ con $M'_{fn}\,(\hat{p}+m)\,M_{in}$, e perciò il termine (107,14) nell'ampiezza M_{fi} assume la forma

$$Z'^2 i\pi\delta\,(p^2-m^2)\,\{M'_{fn}\,(\hat{p}+m)\,M'^*_{in}\}.$$

Sulla base di questo termine della parte immaginaria si può ricostruire tutto il termine singolare nell'ampiezza di diffusione; usando la (80,5), troviamo

$$M_{fi} = -\frac{Z'^2\,\{M'_{fn}\,(\hat{p}+m)\,M'^*_{in}\}}{p^2-m^2+i0}, \quad p^2 \to m^2;$$

d'altra parte, il calcolo di questa stessa ampiezza fatto direttamente sulla base del diagramma (107,8) dà

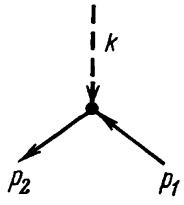
$$iM_{fi} = iM'_{fn}\cdot i\mathcal{G}\,(p)\cdot iM'^*_{in}.$$

Il confronto delle due formule conferma l'espressione limite scritta prima per $\mathcal{G}\,(p)$ (primo termine nella (107,9)), e troviamo[2])

$$Z' = \sqrt{Z_1}. \tag{107,15}$$

Mostriamo ora che, una volta stabilita la forma limite richiesta del propagatore elettronico non sono piú necessarie nuove condizioni per l'operatore di vertice.

Consideriamo il diagramma



(107,16)

---

[1]) Qui è necessaria una precisazione. L'elettrone, in quanto particella stabile, non può, in realtà, trasformarsi in un altro insieme di particelle reali. Noi possiamo, tuttavia, immaginare che esistano delle particelle di massa tale da rendere ammissibile tale processo. La relazione che si ottiene va intesa allora nel senso del prolungamento analitico a valori reali delle masse.

[2]) La deduzione diretta dell'uguaglianza (107,15) dalla definizione (107,12) richiede un'analisi complicata; vedi F. D y s o n, Phys. Rev. 83, 608 (1951).

che rappresenta la diffusione di un elettrone in un campo esterno $A^{(e)}(k)$ (al primo ordine nel campo) tenendo conto di tutte le correzioni radiative. Al limite $k \to 0$, $p_2 \to p_1 \equiv p$ le correzioni di autoenergia alla linea del campo esterno vengono a cadere (ricordiamo che queste correzioni vengono in ogni caso a cadere per $k^2 = 0$). Allora al diagramma corrisponderà l'ampiezza

$$M_{fi} = -e\overline{\mathcal{U}}(p)\,\Gamma(p,\,p;\,0)\,\mathcal{U}(p)\cdot A^{(e)}(k \to 0), \qquad (107,17)$$

data dal prodotto del potenziale $A^{(e)}$ per la corrente elettronica di transizione $\overline{\mathcal{U}}\Gamma\mathcal{U}$. Ma per $k \to 0$ il potenziale $A^{(e)}(x)$ si riduce ad una costante indipendente dalle coordinate e dal tempo. A tale potenziale non corrisponde, generalmente, alcun campo fisico (caso particolare dell'invarianza di gauge), cosí che esso non può provocare nessuna variazione della corrente elettronica. In altre parole, al limite considerato la corrente di transizione $\overline{\mathcal{U}}\Gamma\mathcal{U}$ deve semplicemente coincidere con la corrente libera $\bar{u}\gamma u$:

$$\overline{\mathcal{U}}(p)\,\Gamma^{\mu}(p,\,p;\,0)\,\mathcal{U}(p) = Z_1\bar{u}(p)\,\Gamma^{\mu}u(p) = \bar{u}(p)\,\gamma^{\mu}u(p). \qquad (107,18)$$

Questa richiesta, in sostanza, è anch'essa l'espressione della definizione della carica fisica dell'elettrone. È facile vedere che essa è automaticamente valida indipendentemente dal valore di Z_1. Effettivamente, portando $\mathcal{G}^{-1}(p)$ dalla (107,10) all'identità di Ward (105,8), otteniamo

$$\Gamma^{\mu}(p,\,p;\,0) = \frac{1}{Z_1}\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}g(p)(\hat{p}-m) - (\hat{p}-m)\,g(p)\,\gamma^{\mu},$$

e l'uguaglianza (107,18) è soddisfatta in virtú delle equazioni $(\hat{p}-m)\,u = 0$, $\bar{u}(\hat{p}-m) = 0$.

Noi vediamo che la « costante di rinormalizzazione » Z_1 non compare piú nell'ampiezza di processi fisici. Inoltre, approfittando dell'indeterminatezza che interviene a causa delle divergenze nel calcolo di Γ, si può semplicemente imporre che

$$\bar{u}(p)\,\Gamma^{\mu}(p,\,p;\,0)\,u(p) = \bar{u}(p)\,\gamma^{\mu}u(p) \quad \text{per} \quad p^2 = m^2, \qquad (107,19)$$

ossia porre $Z_1 = 1$.

Questa definizione appare conveniente perché permette di non introdurre correzioni nelle linee elettroniche esterne: abbiamo semplicemente

$$\mathcal{U}(p) = u(p).$$

Di questo ci si può convincere anche direttamente se si nota che per $Z_1 = 1$ l'operatore di massa (107,11)

$$\mathcal{M} = (\hat{p}-m)\,g(\hat{p}-m) \qquad (107,20)$$

e il secondo termine nella (107,12), chiaramente, si annulla. In tal modo, viene a cadere la necessità della « rinormalizzazione » delle linee esterne di tutte le particelle reali, siano esse fotoni o elettroni[1]).

§ 108. *Proprietà di analicità del propagatore fotonico*

È comodo iniziare lo studio delle proprietà di analicità del propagatore fotonico con l'analisi delle proprietà della funzione $\Pi(k^2)$. Questo perché l'uso diretto, per il nostro fine, della definizione (100,1) è reso difficile dalla non univocità di gauge degli operatori $A^\mu(x)$ e dalla conseguente indeterminatezza delle loro proprietà.

Partendo dall'espressione della funzione di autoenergia del fotone attraverso gli elementi di matrice dell'operatore gauge-invariante della corrente, nel § 101 fu ottenuta la rappresentazione integrale della funzione $\Pi(k^2)$ (101,11). Indicando la variabile k^2 con t[2]), esaminiamo le proprietà della funzione $\Pi(t)$ nel piano della variabile complessa t.

Dalla rappresentazione integrale

$$\Pi(t) = \int_0^\infty \frac{\rho(t')\,dt'}{t - t' + i0} \tag{108,1}$$

si vede che sul semiasse reale negativo la funzione $\Pi(t)$ è reale, in tutto il resto del piano essa soddisfa la relazione di simmetria

$$\Pi(t^*) = \Pi^*(t). \tag{108,2}$$

La funzione $\Pi(t)$ può avere singolarità solo nei punti singolari della funzione $\rho(t)$. Tali punti si hanno per i valori $t = k^2$, che sono valori di soglia di creazione, da parte del fotone virtuale, di differenti gruppi di particelle reali. Per tali valori « entrano in gioco » nuovi tipi di stati intermedi nella somma (101,9). Il contributo di questi stati è nullo al di sotto della soglia ed è diverso da zero al di sopra di essa; questo fatto è all'origine della singolarità nel punto di soglia. Questi valori di soglia, ovviamente, sono reali e non negativi[3]). Perciò anche i punti singolari della funzione $\Pi(t)$ giacciono sul semiasse reale positivo della variabile t. Se tagliamo il piano

---

[1]) Nella rinormalizzazione del propagatore fotonico la condizione $Z = 1$ si presentava come una richiesta fisica indispensabile, dopo di che le correzioni alle linee fotoniche esterne scomparivano automaticamente. Da un punto di vista formale, tuttavia, le situazioni per le linee esterne fotoniche ed elettroniche sono analoghe: per $Z \neq 1$ l'ampiezza d'onda e_μ di un fotone reale, tenendo conto delle correzioni, viene moltiplicata per $\sqrt{Z}$.

[2]) Non confondere con la notazione del tempo!

[3]) Cosí, il punto $k^2 = 0$ è la soglia di creazione di tre (o di un numero dispari maggiore) fotoni reali, il punto $k^2 = 4m^2$ è la soglia di creazione di una coppia elettrone-positrone, ecc.

lungo questo semiasse, allora la funzione $\Pi(t)$ sarà analitica in tutto il piano tagliato nel modo indicato.

Il termine $+i0$ al denominatore dell'espressione integranda nella (108,1) mostra che il punto singolare $t' = t$ deve venire aggirato dal basso. Questo significa che come valore della funzione $\Pi(t)$ per t reali occorre intendere il suo valore sul bordo superiore del taglio. Usando la regola (76,18)

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathrm{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \tag{108,3}$$

per t reali troviamo

$$\mathrm{Im}\Pi(t) \equiv \mathrm{Im}\Pi(t + i0) = -\pi\rho(t). \tag{108,4}$$

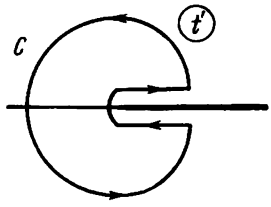
Sul bordo inferiore del taglio, invece, $\mathrm{Im}\Pi$ ha il segno opposto, mentre $\mathrm{Re}\Pi$ è uguale su ambedue i tagli. Perciò per il salto della funzione $\Pi(t)$ sul taglio troviamo

$$\Pi(t + i0) - \Pi(t - i0) = -2\pi i\rho(t). \tag{108,5}$$

La funzione integrale (108,1) può essere considerata, sotto questo aspetto, semplicemente come la formula di Cauchy per la funzione analitica $\Pi(t)$. Per mostrarlo, applichiamo la formula di Cauchy

$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Pi(t')\,dt'}{t'-t} \tag{108,6}$$

al cammino



(108,7)

che aggira il taglio. Supponendo che $\Pi(t)$ decresca all'infinito in modo sufficientemente rapido, l'integrale sulla circonferenza si annulla, e gli integrali sui bordi del taglio danno la seguente formula (*relazione di dispersione*), che determina la funzione $\Pi(t)$ dai valori della sua parte immaginaria:

$$\Pi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(t'+i0)}{t'-t}\,dt' = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(t')}{t'-t-i0}\,dt'. \tag{108,8}$$

Sostituendo qui la (108,4), otteniamo la (108,1)[1].

---

[1]) Le relazioni di dispersione furono introdotte nella teoria quantistica del campo da *M. Gell-Mann*, *M. L. Goldberger*, *W. E. Thirring* (1954).

Le proprietà di analicità delle funzioni $\mathcal{D}(t)$ e $\mathcal{D}(t)$ coincidono con le proprietà della funzione $\Pi(t)$, attraverso la quale esse vengono espresse mediante le formule (101,2) e (100,20). Per $\mathcal{D}(t)$ abbiamo

$$\mathcal{D}(t) = \frac{4\pi}{t}\left(1 + \frac{\Pi(t)}{t}\right). \tag{108,9}$$

Sul semiasse reale ($t > 0$), secondo quanto detto sopra, t va inteso come $t + i0$. La parte immaginaria di $\mathcal{D}(t)$ può quindi venire calcolata mediante la (108,3) e la (108,4) tenendo conto che, secondo la (107,6), $\Pi(t)/t \to 0$ per $t \to 0$. Troviamo allora

$$\operatorname{Im}\mathcal{D}(t) = -4\pi^2\delta(t) + \frac{4\pi}{t^2}\operatorname{Im}\Pi(t) = -4\pi^2\delta(t) - \frac{4\pi^2}{t^2}\rho(t). \tag{108,10}$$

Applicando ora alla funzione $\mathcal{D}(t)$ la relazione di dispersione del tipo (108,8), otteniamo per essa la seguente rappresentazione integrale:

$$\mathcal{D}(t) = \frac{4\pi}{t+i0} + 4\pi\int_0^\infty \frac{\rho(t')}{t'^2}\frac{dt'}{t-t'+i0}. \tag{108,11}$$

Questa formula è chiamata *sviluppo di Källen — Lehmann* (G. Källen, 1952; H. Lehmann, 1954).

Esiste uno stretto legame tra la posizione del taglio per la funzione $\mathcal{D}(t)$ (e quindi anche della parte immaginaria di essa sul taglio), da una parte, e la condizione di unitarietà per l'ampiezza del processo $a + b \to c + d$, rappresentato dal diagramma (107,4), dall'altra (questa reazione, naturalmente, è del tutto immaginaria; essa non contraddice, tuttavia, alle leggi di conservazione, e la condizione formale di unitarietà deve venire soddisfatta).

Nello stato iniziale (i) di questo processo si hanno due « particelle classiche » a e b, e in quello finale due altre particelle c e d. La condizione di unitarietà (72,2)[1]) ha la forma

$$T_{fi} - T^*_{if} = i(2\pi)^4 \sum_n T_{fn}T^*_{in}\delta^{(4)}(P_f - P_i); \tag{108,12}$$

la sommatoria a secondo membro è eseguita su tutti gli stati fisici « intermedi » n. Nel caso considerato questi stati sono, evidentemente, stati di sistemi di coppie e di fotoni reali che possono essere creati dal fotone virtuale, cioè proprio quegli stati che figurano negli elementi di matrice nella definizione della funzione $\rho(k^2)$ (101,9). Le ampiezze M_{fi} e M^*_{if} contengono rispettivamente i fattori $\mathcal{D}(k^2)$ e $\mathcal{D}^*(k^2)$, mentre la loro differenza contiene la parte immaginaria $\operatorname{Im}\mathcal{D}(k^2)$. Vediamo in tal modo che il legame, a noi già noto dalla (108,4), tra l'esistenza di una parte immaginaria nella funzione $\mathcal{D}$

[1]) Ricordiamo che le ampiezze T_{fi} differiscono dalle ampiezze M_{fi} solo per dei fattori moltiplicativi (vedi la (65,10)).

e la presenza degli stati intermedi indicati è una conseguenza delle richieste di unitarietà.

Vedremo in seguito che è conveniente iniziare i calcoli veri e propri nell'ambito della teoria delle perturbazioni della funzione $\mathcal{D}(t)$ (ovvero della funzione $\mathcal{P}(t)$, che è poi in fondo la stessa cosa) con il calcolo della parte immaginaria di $\mathcal{P}$, nella quale non compaiono espressioni divergenti. Se poi, però, calcoliamo la funzione $\mathcal{P}(t)$ secondo la relazione di dispersione (108,8), l'integrale risulterà divergente e sarà necessario eseguire operazioni supplementari di sottrazione al fine di soddisfare le condizioni $\mathcal{P}(0) = 0$ e $\mathcal{P}'(0) = 0$. Questa sottrazione si può, tuttavia, eseguire, senza operare con l'integrale divergente. Per questo è sufficiente applicare la relazione di dispersione (108,8) non direttamente alla funzione $\mathcal{P}(t)$, ma alla funzione $\mathcal{P}(t)/t^2$. Allora per $\mathcal{P}(t)$ troveremo la rappresentazione

$$\mathcal{P}(t) = \frac{t^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t')}{t'^2 (t' - t - i0)} dt'; \tag{108,13}$$

questo integrale converge, e l'espressione ottenuta in questo modo per la funzione $\mathcal{P}(t)$ soddisfa automaticamente le condizioni richieste[1]).

§ 109. *Regolarizzazione degli integrali di Feynman*

Le condizioni fisiche della rinormalizzazione esaminate nel paragrafo precedente permettono, in linea di principio, di ottenere in modo univoco un valore finito per l'ampiezza di qualunque processo elettrodinamico a qualsiasi ordine di approssimazione delle perturbazioni.

Approfondiamo, innanzitutto, le nostre conoscenze sulla natura delle divergenze che compaiono negli integrali scritti direttamente secondo i diagrammi di Feynman. Indicazioni importanti a questo proposito vengono date dal computo delle potenze dei 4-impulsi virtuali che figurano nelle espressioni integrande degli integrali considerati.

---

[1]) La relazione del tipo (108,13) è chiamata relazione di dispersione « a due sottrazioni ». Il senso del passaggio alla funzione $\mathcal{P}(t)/t^2$, in essa usato, diventa particolarmente evidente se riscriviamo la (108,13) nella forma

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t')\, dt'}{t' - t - i0} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t')}{t'} dt' - \frac{t}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t')}{t'^2} dt'.$$

Se indichiamo il primo integrale (« integrale non regolarizzato ») con $\mathcal{P}(t)$, allora l'espressione nella parte destra sarà uguale a

$$\mathcal{P}(t) - \mathcal{P}(0) - t\mathcal{P}'(0).$$

Esaminiamo un diagramma di ordine n (cioè contenente n vertici), avente N_e linee elettroniche e N_γ linee fotoniche esterne. Il numero N_e è pari, e le linee elettroniche formano $N_e/2$ successioni continue, ognuna delle quali inizia e termina con una linea esterna. Il numero delle linee elettroniche interne in ognuna di queste successioni è di un'unità minore del numero dei vertici presenti in essa; quindi il numero totale delle linee elettroniche interne nel diagramma è

$$n - \frac{N_e}{2}.$$

In ciascun vertice entra una linea fotonica; per N_γ vertici la linea fotonica è esterna, e nei restanti $n - N_\gamma$ la linea fotonica è interna. Poiché ogni linea fotonica interna unisce due vertici, il numero totale di tali vertici è

$$\frac{n - N_\gamma}{2}.$$

Ad ogni linea fotonica interna viene associato il fattore $D(k)$ contenente k alla potenza -2. Ad ogni linea elettronica interna, invece, viene associato il fattore $G(p)$ contenente p (per $p^2 \gg m^2$) alla potenza -1. In tal modo, la potenza totale dei 4-impulsi al denominatore del diagramma è uguale a

$$2n - \frac{N_e}{2} - N_\gamma.$$

Il numero delle integrazioni (in d^4p o in d^4k), invece, nel diagramma è uguale al numero delle linee interne meno $n - 1$ condizioni addizionali imposte sugli impulsi virtuali (delle n leggi di conservazione nei vertici, una lega gli impulsi dei terminali esterni del diagramma). Quadruplicando il numero ottenuto troviamo il numero delle integrazioni rispetto a tutte le componenti dei 4-impulsi:

$$2(n - N_e - N_\gamma + 2).$$

Infine, la differenza tra il numero delle integrazioni e la potenza degli impulsi al denominatore dell'espressione integranda (indichiamo questa differenza con r) è uguale a

$$r = 4 - \frac{3}{2} N_e - N_\gamma. \tag{109,1}$$

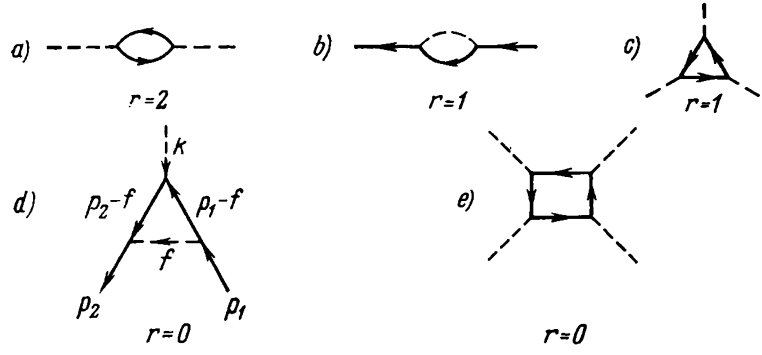
Notiamo che questo numero non dipende dall'ordine n del diagramma.

La condizione $r < 0$ per l'intero diagramma è, generalmente parlando, insufficiente perché l'integrale converga; per questo è necessario che siano negativi gli analoghi numeri r' anche per i blocchi interni che si possono evidenziare nel diagramma. La presenza di blocchi con $r' > 0$ comporterebbe la divergenza dell'integrale anche

se, nello stesso tempo, le rimanenti integrazioni nel diagramma convergessero perfino « con eccesso ». La condizione $r < 0$, tuttavia, è sufficiente per la convergenza dei diagrammi piú semplici nei quali $n = N_e + N_\gamma$ e si ha in tutto solo l'integrazione in d^4p.

Se $r \geqslant 0$, l'integrale diverge in ogni caso, e il grado di divergenza non è minore di r se il numero r è pari, e non è minore di $r - 1$, se r è dispari (la diminuzione di 1 del grado di divergenza in quest'ultimo caso è legata al fatto che l'integrale di prodotti di un numero dispari di 4-vettori si annulla nell'integrazione su tutto lo spazio quadridimensionale). Il grado di divergenza può aumentare se sono presenti blocchi interni con $r' > 0$.

Notiamo che poiché N_e e N_γ sono numeri interi positivi, dalla (109,1) si vede che esistono solo alcune coppie di valori di tali numeri per i quali $r \geqslant 0$. Elenchiamo i diagrammi piú semplici per ciascuno di questi tipi, escludendo, però, subito i casi $N_e = N_\gamma = 0$ (cappi nel vuoto) e $N_e = 0$, $N_\gamma = 1$ (valore medio della corrente nel vuoto), poiché essi non hanno alcun senso fisico e i diagrammi relativi devono semplicemente venire esclusi, come abbiamo già detto nel § 100. Gli altri casi sono i seguenti:



(109,2)

Nel primo di questi casi la divergenza è quadratica, nei rimanenti ($r = 0$ e $r = 1$) logaritmica.

Il diagramma (109,2,*d*) dà la prima correzione all'operatore di vertice. Esso deve soddisfare la condizione (107,19), che riscriviamo qui nella forma

$$\bar{u}(p)\,\Lambda^\mu(p, p; 0)\,u(p) = 0 \quad \text{per} \quad p^2 = m^2, \tag{109,3}$$

dove

$$\Lambda^\mu = \Gamma^\mu - \gamma^\mu. \tag{109,4}$$

Indichiamo l'integrale di Feynman scritto direttamente secondo il diagramma con $\bar{\Lambda}^\mu(p_2, p_1; k)$. Questo integrale diverge logaritmicamente e non soddisfa, di per se stesso, la condizione (109,3). Si può, tuttavia, ottenere una quantità che soddisfi questa condizione

formando la differenza

$$\Lambda^{\mu}(p_2, p_1; k) = \overline{\Lambda}^{\mu}(p_2, p_1; k) - \overline{\Lambda}^{\mu}(p_1, p_1; 0)|_{p_1^2=m^2}. \quad (109,5)$$

Il termine divergente dominante nell'integrale $\Lambda^{\mu}(p_2, p_1; k)$ si ottiene considerando il 4-impulso del fotone virtuale f nell'espressione integranda come una quantità grande a piacere. Questo termine ha la forma[1])

$$-4\pi i e^2 \int \frac{\gamma^{\nu}\hat{f}\gamma^{\mu}\hat{f}\gamma_{\nu}}{f^2 \cdot f^2 \cdot f^2} \frac{d^4 f}{(2\pi)^4}$$

e non dipende dai 4-impulsi delle linee esterne. Perciò nella differenza (109,5) la divergenza si elide e si ottiene una quantità finita. Questa operazione di rimozione della divergenza è chiamata *regolarizzazione* dell'integrale.

Sottolineiamo che la possibilità di regolarizzare l'integrale $\Lambda^{\mu}(p_2, p_1; k)$ mediante una sola sottrazione è data dal fatto che in questo caso la divergenza è solamente logaritmica, cioè la meno forte di tutte le divergenze possibili. Se nell'integrale fossero presenti divergenze di grado diverso, la sola sottrazione per $k = 0$ potrebbe risultare insufficiente a rimuovere tutti i termini divergenti.

Dopo la determinazione della prima correzione in Γ^{μ} (cioè il primo termine dello sviluppo di Λ^{μ}) la prima correzione al propagatore elettronico (diagramma (109,2,*a*)) può essere calcolata usando l'identità di Ward (105,8), che può essere riscritta anche nella forma

$$\frac{\partial \mathscr{M}(p)}{\partial p_{\mu}} = \Lambda^{\mu}(p, p; 0), \quad (109,6)$$

introducendo l'operatore di massa $\mathscr{M}$ al posto di $\mathscr{G}$ e Λ^{μ} al posto di Γ^{μ}. Questa equazione deve essere integrata con la condizione al contorno

$$\bar{u}(p)\,\mathscr{M}(p)\,u(p) = 0 \quad \text{per} \quad p^2 = m^2, \quad (109,7)$$

che discende dalla (107,20).

Infine, per determinare il primo termine dello sviluppo dell'operatore di polarizzazione ricorriamo all'identità (105,14); contraendo sulle due coppie di indici ricaviamo l'equazione

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial k_{\sigma}\, \partial k^{\sigma}} = 2\mathscr{S},$$

che lega tra loro le funzioni scalari $\mathscr{P} = 1/3\, \mathscr{P}^{\mu}_{\mu}$ e $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mu\rho}{}^{\rho\mu}$. Ambedue queste funzioni dipendono soltanto dalla stessa variabile scalare k^2, e quindi troviamo

$$2k^2\mathscr{P}''(k^2) + \mathscr{P}'(k^2) = \frac{4\pi}{3}\mathscr{S}(k^2), \quad (109,8)$$

---

[1]) L'espressione completa dell'integrale è data nel § 114; vedi la (114,2).

dove gli apici indicano la derivazione rispetto a k^2. Per la condizione $\mathcal{F}'(0) = 0$, da questa equazione deriva chiaramente

$$\mathcal{S}(0) = 0. \tag{109,9}$$

Nell'approssimazione del primo ordine della teoria delle perturbazioni $\mathcal{S}(k^2)$ è determinata dal diagramma (109,2,*e*) (con 4-impulsi dei terminali k, k, 0, 0). Il corrispondente integrale di Feynman (che indicheremo con $\overline{\mathcal{S}}(k^2)$) diverge logaritmicamente, e la sua regolarizzazione si realizza, secondo la condizione (109,9), mediante una sola sottrazione:

$$\mathcal{S}(k^2) = \overline{\mathcal{S}}(k^2) - \overline{\mathcal{S}}(0).$$

A questo punto $\mathcal{F}(k^2)$ si determina dalla soluzione dell'equazione (109,8) con le condizioni al contorno $\mathcal{F}(0) = 0$, $\mathcal{F}'(0) = 0$.

Nell'approssimazione successiva della teoria delle perturbazioni la correzione all'operatore di vertice ($\Lambda_\mu^{(2)}$) è determinata dai diagrammi (103,10, *c-i*). Di questi, quelli irriducibili (103,10,*d-f*) si calcolano mediante la stessa tecnica di regolarizzazione degli integrali con una sottrazione secondo la (109,5), come per il calcolo della correzione in prima approssimazione $\Lambda_\mu^{(1)}$. Per quanto riguarda i diagrammi riducibili, le parti di autoenergia interne e le parti di vertice di ordine inferiore in essi contenute vengono direttamente sostituite con le già note quantità (regolarizzate) ottenute in prima approssimazione ($\mathcal{F}^{(1)}$, $\mathcal{M}^{(1)}$, $\Lambda_\mu^{(1)}$), e quindi gli integrali cosí ottenuti vengono nuovamente regolarizzati secondo la formula (109,5)[1]. Le correzioni $\mathcal{F}^{(2)}$ e $\mathcal{M}^{(2)}$ possono quindi venire determinate mediante le equazioni (109,6) e (109,8).

Il procedimento sistematico descritto dà, in linea di principio, la possibilità di ottenere espressioni finite per $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$ e Λ_μ a qualsiasi ordine di approssimazione della teoria delle perturbazioni. Di conseguenza, diventa possibile anche il calcolo delle ampiezze dei processi fisici di diffusione descritti dai diagrammi nei quali $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$, Λ_μ, entrano come parti componenti.

Si vede, in tal modo, che le condizioni fisiche stabilite precedentemente (§ 108) risultano essere sufficienti per una regolarizzazione univoca di tutti i diagrammi di Feynman che si incontrano nella teoria. Questa circostanza costituisce una proprietà tutt'altro che banale dell'elettrodinamica quantistica e viene chiamata *rinormalizzabilità*[2]).

---

[1]) Nei diagrammi di ordine ancora superiore può risultare necessario sostituire con valori già regolarizzati anche i blocchi « a quattro gambe » $\mathcal{S}$.

[2]) Il fondamento matematicamente rigoroso della teoria della rinormalizzazione in elettrodinamica quantistica è dato nella monografia: N. N. Bogoljubov e D. V. Širkov, Vvedenie v teoriju kvantovannykh polej, « Nauka », Mosca, 1973 [traduzione in inglese: Introduction to the Theory of Quantized Fields, Wiley-Interscience, 1959, 1ª ed., N.d.T.].

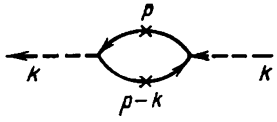
Per il calcolo pratico delle correzioni radiative, tuttavia, il procedimento appena descritto può non risultare il piú semplice e il piú razionale. Nel capitolo seguente vedremo, in particolare, che un modo piú pratico può consistere nel determinare dapprima le parti immaginarie delle rispettive quantità; queste parti sono date da integrali che non contengono divergenze. La quantità complessiva viene determinata con un prolungamento analitico mediante le relazioni di dispersione. In questo modo risulta possibile evitare i complessi calcoli richiesti per la regolarizzazione diretta mediante le sottrazioni.

Capitolo XII

CORREZIONI RADIATIVE

§ 110. *Calcolo dell'operatore di polarizzazione*

Iniziamo il calcolo effettivo delle correzioni radiative calcolando l'operatore di polarizzazione (*J. Schwinger*, 1949; *R. P. Feynman*, 1949). Nella prima approssimazione della teoria delle perturbazioni questo operatore è dato dal cappio nel diagramma



(110,1)

Come abbiamo già notato, il nostro compito diventa piú facile se cominciamo col calcolare la parte immaginaria della funzione cercata. A sua volta, questo calcolo si esegue nel modo piú semplice usando la relazione di unitarietà. In questo caso si suppone che le linee del fotone virtuale corrispondano ad una immaginaria particella «reale»: un bosone vettore di massa $M^2 = k^2$, che interagisce con l'elettrone secondo la stessa legge del fotone. In questo modo il (110,1) diventa il diagramma di un processo « reale », ed è quindi giustificata l'applicazione della condizione di unitarietà.

Si può allora considerare il diagramma (110,1) come un diagramma per l'ampiezza di transizione di un bosone in se stesso (elemento diagonale della matrice S) attraverso la disintegrazione in una coppia elettrone-positrone. Le crocette nel diagramma (110,1) indicano lungo quali linee esso deve essere tagliato in due parti in modo da indicare lo stato intermedio che figura nella relazione di unitarietà. Questo stato contiene un elettrone di 4-impulso $p_- = p$ e un positrone di 4-impulso $p_+ = -(p - k)$.

La relazione di unitarietà (72,4) con uno stato intermedio a due particelle per stati iniziale e finale coincidenti dà

$$2\,\mathrm{Im}\,M_{ii} = \frac{|p|}{(4\pi)^2\,\varepsilon} \sum_{\text{polar}} \int |M_{ni}|^2\,do. \qquad (110,2)$$

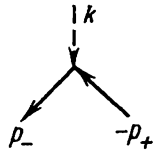
Qui l'ampiezza M_{ii}, costruita in base al diagramma (110,1), è

$$iM_{ii} = \sqrt{4\pi}\,e^*_\mu \cdot \sqrt{4\pi}\,e_\nu \frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi}, \qquad (110,3)$$

dove e_μ è il quadrivettore polarizzazione del bosone; secondo la (14,13) esso soddisfa la condizione

$$e_\mu k^\mu = 0.$$

All'ampiezza M_{ni} corrisponde il diagramma di disintegrazione del bosone in una coppia:



L'espressione relativa è

$$M_{ni} = -e\sqrt{4\pi}\, e_\mu j^\mu, \quad j^\mu = \bar{u}(p_-)\gamma^\mu u(-p_+). \tag{110,4}$$

Sostituendo le (110,3-4) nella (110,2), otteniamo

$$2e^*_\mu e_\nu \operatorname{Im} \mathcal{P}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi}\frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon}\sum_{\text{polar}} j^{\mu *} j^\nu e^*_\mu e_\nu. \tag{110,5}$$

Qui $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_- = -\boldsymbol{p}_+$ e $\varepsilon = \varepsilon_+ + \varepsilon_- = 2\varepsilon_+$ sono rispettivamente gli impulsi e l'energia totale della coppia nel sistema di riferimento del baricentro; l'integrazione viene eseguita sulle direzioni degli impulsi $\boldsymbol{p}$, e la sommatoria sulle polarizzazioni del bosone. La media viene eseguita mediante la formula

$$\overline{e^*_\mu e_\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$

(cfr. piú avanti la formula (117,5)). Tenendo presente la trasversalità del tensore $\mathcal{P}^{\mu\nu}$ e del vettore j^μ ($\mathcal{P}^{\mu\nu}k_\nu = 0$, $j^\mu k_\mu = 0$) e operando la sostituzione $\mathcal{P}^\mu_\mu = 3\mathcal{P}$, otteniamo

$$2\operatorname{Im}\mathcal{P} = \frac{1}{12\pi}\frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon}\sum_{\text{polar}}\int (jj^*)\, do. \tag{110,6}$$

La sommatoria sulle polarizzazioni viene eseguita nella maniera solita, l'integrazione in do si riduce ad una moltiplicazione per 4π e si trova infine

$$2\operatorname{Im}\mathcal{P} = e^2\frac{|\boldsymbol{p}|}{3\varepsilon}\operatorname{Tr}\gamma_\mu(\hat{p}_- + m)\gamma^\mu(\hat{p}_+ - m) = -e^2\frac{8|\boldsymbol{p}|}{3\varepsilon}(p_+p_- + 2m^2).$$

Introduciamo la variabile

$$t = k^2 = (p_+ + p_-)^2 = 2(m^2 + p_+p_-). \tag{110,7}$$

Allora

$$\varepsilon^2 = t, \quad p^2 = \frac{t}{4} - m^2,$$

e la formula definitiva per Im $\mathcal{F}$ assume la forma

$$\operatorname{Im} \mathcal{F}(t) = -\frac{\alpha}{3}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\,(t+2m^2), \quad t \geqslant 4m^2. \tag{110,8}$$

Il valore $t = 4m^2$ è il valore di soglia per la creazione da parte di un fotone virtuale di una coppia elettrone-positrone (vedi nota a pag. 549); nell'approssimazione considerata della teoria delle perturbazioni ($\sim e^2$) lo stato ad una coppia di particelle è l'unico che può figurare come stato intermedio nella condizione di unitarietà (110,2). Nella stessa approssimazione, quindi, per $t < 4m^2$ il secondo membro nella (110,2) è nullo, e perciò

$$\operatorname{Im} \mathcal{F}(t) = 0, \quad t < 4m^2. \tag{110,9}$$

Per la medesima ragione nell'approssimazione considerata il taglio per la funzione $\mathcal{F}(t)$ nel piano del complesso t si estende solo a partire dal punto $t = 4m^2$ sull'asse reale, e questo punto deve figurare come limite inferiore nell'integrale di dispersione (108,13). In tal modo, abbiamo

$$\mathcal{F}(t) = -\frac{\alpha}{3\pi} t^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t'-t-i0} \sqrt{\frac{t'-4m^2}{t'}}\,\frac{t'+2m^2}{t'^2}. \tag{110,10}$$

Per i calcoli successivi è conveniente introdurre al posto di t un'altra variabile, secondo la relazione

$$\frac{t}{m^2} = -\frac{(1-\xi)^2}{\xi}. \tag{110,11}$$

Questa trasformazione opera la riflessione del semipiano superiore della variabile complessa t in un semicerchio di raggio unitario nel

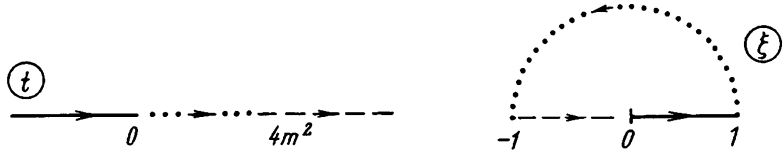


Fig. 18

semipiano superiore della variabile complessa ξ, come mostrato nella fig. 18 (i segmenti corrispondenti sono disegnati con il medesimo tipo di linea in ambedue i piani). Alla regione non fisica ($0 \leqslant t/m^2 \leqslant 4$) corrisponde, in tal modo, la semicirconferenza $\xi = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Alle regioni fisiche ($t < 0$, $t/m^2 > 4$), invece, corrispondono il raggio reale destro e sinistro rispettivamente.

Il modo piú semplice per stimare l'integrale (110,10) è di operare la sostituzione

$$\frac{t'}{m^2}=\frac{(1+\xi')^2}{\xi'}, \qquad \frac{dt'}{m^2}=-\frac{(1-\xi'^2)\,d\xi'}{\xi'^2}.$$

Consideriamo dapprima il caso $t<0$ (allora il denominatore nella regione d'integrazione si annulla e il termine immaginario $i0$ può essere tralasciato). Espresso attraverso la variabile ξ, il risultato dell'integrazione è

$$\mathcal{P}(\xi)=\frac{\alpha m^2}{3\pi}\left\{-\frac{22}{3}+\frac{5}{3}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)+\left(\xi+\frac{1}{\xi}-4\right)\frac{1+\xi}{1-\xi}\ln\xi\right\}. \qquad (110,12)$$

Il prolungamento analitico di questa formula determina la funzione $\mathcal{P}(t)$ anche nella regione $t>4m^2$: a tal fine occorre operare la sostituzione $\xi=|\xi|e^{i\pi}$ (in questo caso il logaritmo dà un contributo nella parte immaginaria: $\ln\xi=\ln|\xi|+i\pi$[1]). Per la regione non fisica occorre porre $\xi=e^{i\varphi}$, e allora

$$\mathcal{P}(t)=\frac{\alpha m^2}{3\pi}\left\{-\frac{5}{3}\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}-4+\left(2+\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right)\varphi\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right\},$$

$$\frac{t}{4m^2}=\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (110,13)$$

Nel limite dei piccoli $|t|$ (cioè per $\xi\to 1$) queste formule danno

$$\mathcal{P}(t)=-\frac{\alpha}{15\pi}\frac{t^2}{m^2}, \quad |t|\ll 4m^2. \qquad (110,14)$$

Nel caso opposto dei grandi $|t|$ (cioè per $\xi\to 0$) otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t)&=-\frac{\alpha}{3\pi}|t|\ln\frac{|t|}{m^2}, \quad -t\gg 4m^2,\\ \mathcal{P}(t)&=\frac{\alpha}{3\pi}t\left(\ln\frac{t}{m^2}-i\pi\right), \quad t\gg 4m^2.\end{aligned} \qquad (110,15)$$

Per il significato stesso della teoria delle perturbazioni le formule ottenute sono valide fino a quando $\mathcal{P}/4\pi\ll D^{-1}=t/4\pi$. Perciò la condizione di applicabilità delle formule (110,15) è

$$\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|t|}{m^2}\ll 1. \qquad (110,16)$$

§ 111. *Correzioni radiative alla legge di Coulomb*

Applichiamo le formule ottenute al problema delle correzioni radiative alla legge di Coulomb. Queste correzioni possono essere visivamente descritte come il risultato della *polarizzazione del vuoto* attorno ad una carica puntiforme.

---

[1]) Il prolungamento eseguito in questo modo è, come del resto è richiesto qui, il prolungamento al bordo superiore del taglio, poiché il semicerchio nel piano ξ corrisponde proprio al semipiano superiore di t.

Se non si tiene conto delle correzioni, il campo di un centro fisso (di carica e_1) è descritto dal potenziale scalare coulombiano $\Phi \equiv \equiv A_0^{(e)} = e_1/r$. Le rispettive componenti dello sviluppo di Fourier sono

$$\Phi(k) \equiv A_0^{(e)}(k) = \frac{4\pi e_1}{k^2}.$$

Tenendo conto delle correzioni radiative questo campo va sostituito con « il campo efficace »

$$\mathcal{A}_0^{(e)} = A_0^{(e)} + \mathcal{D}_{0\rho} \frac{\mathcal{P}^{\rho\lambda}}{4\pi} A_\lambda^{(e)} = A_0^{(e)} + \frac{1}{4\pi} \mathcal{F} \mathcal{D} A_0^{(e)} \qquad (111,1)$$

(cfr. la (100,15)). Il secondo termine dà il termine addizionale cercato. Nella prima approssimazione della teoria delle perturbazioni per $\mathcal{F}(k^2)$ va presa l'espressione ottenuta nel paragrafo precedente, e la funzione $\mathcal{D}(k^2)$ deve essere sostituita con la relativa espressione nell'approssimazione di ordine zero

$$\mathcal{D}(k^2) \approx D(k^2) = -\frac{4\pi}{k^2}$$

In tal modo, la correzione radiativa al potenziale del campo è

$$\delta\Phi(k) = -\frac{4\pi e_1}{(k^2)^2} \mathcal{F}(-k^2). \qquad (111,2)$$

Per determinare la forma di questa correzione nella rappresentazione delle coordinate occorre eseguire l'antitrasformata di Fourier:

$$\delta\Phi(r) = \int e^{ikr} \delta\Phi(k) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (111,3)$$

Poiché $\delta\Phi(k)$ è funzione soltanto di $t = -k^2$, allora, integrando sugli angoli, otteniamo

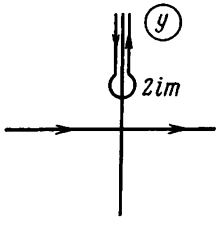


Fig. 19

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \delta\Phi(t) \frac{\operatorname{sen}(r\sqrt{-t})}{r} d(-t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 r} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\Phi(-y^2) e^{iry} y\, dy$$

(nell'ultima trasformazione si è usato il fatto che l'espressione integranda come funzione di $y = \sqrt{-t}$ è pari). Ora si può spostare il cammino d'integrazione nel semipiano superiore della variabile complessa y, facendolo coincidere con il taglio della funzione $\mathcal{F}(-y^2)$ (fig. 19). Questo taglio inizia dal punto $2im$ e si estende verso l'alto lungo l'asse immaginario (al foglio fisico corrisponde il bordo sinistro del taglio).

Introducendo al posto di y la nuova variabile $y = ix$, otteniamo

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_{2m}^{\infty} \operatorname{Im} \delta\Phi(x^2)\, e^{-rx}\, x\, dx.$$

Infine, tornando all'integrazione rispetto a $t = x^2$, abbiamo

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{4m^2}^{\infty} \operatorname{Im} \delta\Phi(t)\, e^{-r\sqrt{t}}\, dt. \tag{111,4}$$

Prendiamo la parte immaginaria dalla (110,8)

$$\operatorname{Im} \delta\Phi(t) = -\frac{4\pi e}{t^2} \operatorname{Im} \mathcal{F}(t)$$

e, dopo una sostituzione ovvia di variabile, troviamo

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r} + \delta\Phi(r) = \frac{e_1}{r} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^{\infty} e^{-2mr\zeta} \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2} \right) \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2}\, d\zeta \right\} \tag{111,5}$$

(*E. Uehling, R. Serber*, 1935).

L'integrale che compare in quest'espressione può essere calcolato nei due casi limite.

Consideriamo innanzitutto il caso dei piccoli r ($mr \ll 1$). Scindiamo l'integrale del primo termine tra parentesi in due:

$$I = \int_1^{\infty} e^{-2mr\zeta} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2}\, d\zeta = \int_1^{\zeta_1} \ldots\, d\zeta + \int_{\zeta_1}^{\infty} \ldots\, d\zeta \equiv I_1 + I_2,$$

dove ζ_1 è scelto in modo che $1/mr \gg \zeta_1 \gg 1$. Di conseguenza, nel primo integrale si può porre $r = 0$, e quindi otteniamo

$$I_1 \approx \int_1^{\zeta_1} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2}\, d\zeta \approx \ln 2\zeta_1 - 1.$$

In I_2 si può, al contrario, trascurare l'unità sotto il segno di radice:

$$I_2 \approx \int_{\zeta_1}^{\infty} e^{-2mr\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} = -\ln \zeta_1 \cdot e^{-2mr\zeta_1} + 2mr \int_{\zeta_1}^{\infty} e^{-2mr\zeta} \ln \zeta\, d\zeta.$$

Nell'esponente e nel limite inferiore d'integrazione si può porre $\zeta_1 = 0$. Operando quindi la sostituzione di variabile $2mr\zeta = x$, otteniamo

$$I_2 = -\ln 2\zeta_1 + \ln \frac{1}{mr} + \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x\, dx = -\ln 2\zeta_1 + \ln \frac{1}{mr} - C,$$

dove $C = 0{,}577...$ è la costante di Eulero. Nell'integrale del secondo termine della (111,5), invece, si può subito porre $r = 0$:

$$I_3 \approx \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^4} d\zeta = \frac{1}{6}.$$

Sommando i tre integrali (la quantità ausiliaria ζ_1 in questa somma si elide), otteniamo

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{1}{mr} - C - \frac{5}{6}\right)\right], \quad r \ll \frac{1}{m}. \qquad (111,6)$$

Per $mr \gg 1$ nell'integrale è importante la regione $\zeta - 1 \sim \sim 1/mr \ll 1$. Con la sostituzione $\zeta = 1 + \xi$ e le opportune trasformazioni, per questo integrale otteniamo

$$e^{-2mr} \int_0^\infty e^{-2mr\xi} \frac{3}{2} \sqrt{2\xi}\, d\xi = \frac{3}{8\,(mr)^{3/2}} \sqrt{\pi}\, e^{-2mr}.$$

In tal modo, in questo caso risulta[1])

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}\right), \quad r \gg \frac{1}{m}. \qquad (111,7)$$

Si vede cosí che la polarizzazione del vuoto deforma il campo coulombiano di una carica puntiforme nella regione $r \sim 1/m$ $(= \hbar/mc)$, dove m è la massa dell'elettrone. Al di fuori di questa regione la deformazione del campo decresce secondo una legge esponenziale.

Facciamo ancora un'osservazione avente carattere generale. Finora abbiamo sempre sottinteso che le correzioni radiative traevano origine dall'interazione del campo fotonico con il campo elettronico. Cosí, associando nei diagrammi di autoenergia fotonici dei cappi chiusi agli elettroni, noi abbiamo tenuto conto, in questo modo, dell'interazione del fotone con il « vuoto di elettroni ». Il fotone, però, interagisce anche con campi di altre particelle; l'interazione con i « vuoti » di questi campi è descritta dagli stessi diagrammi di autoenergia, nei quali i cappi interni vengono associati alle corrispondenti particelle. I contributi di questi diagrammi differiscono, per ordine di grandezza, dai contributi dei diagrammi elettronici per certe potenze del rapporto m_e/m, dove m è la massa della particella considerata e m_e è la massa dell'elettrone.

Le particelle piú vicine per massa all'elettrone sono i muoni e i pioni. I rapporti numerici m_e/m_μ e m_e/m_π sono vicini ad α. Perciò le correzioni radiative dovute a queste particelle dovrebbero essere

---

[1]) L'origine del fattore e^{-2mr} in $\delta\Phi(r)$ è evidente già dalla forma dell'integrale di partenza (111,4): per grandi r in esso sono essenziali i valori di t vicini al limite inferiore. In altre parole, l'esponente del fattore è determinato dalla posizione della prima singolarità della funzione $\delta\Phi(t)$.

prese in considerazione insieme con le correzioni elettroniche di ordine superiore. Tuttavia, se per i muoni il calcolo delle correzioni radiative nell'ambito della teoria esistente è, in linea di principio, ammissibile, per i pioni (che sono particelle ad interazione forte) questo è impossibile.

Questo fatto limita, in linea di principio, la possibilità di calcoli esatti per gli effetti concreti nell'elettrodinamica quantistica esistente. Il voler tenere conto delle correzioni, dovute solo all'interazione fotone-elettrone fino ad approssimazioni di ordine arbitrariamente alto, porterebbe ad una precisione solo illusoria.

Le correzioni alla legge di Coulomb esaminate in questo paragrafo valgono, come abbiamo visto, per la regione delle distanze $r \lesssim 1/m_e$. Noi possiamo ora aggiungere che le formule ottenute diventano insufficienti alle distanze $r < 1/m_\mu$ (oppure $1/m_\pi$), dove diventano importanti anche effetti di polarizzazione del vuoto di altre particelle.

§ 112. *Calcolo della parte immaginaria dell'operatore di polarizzazione secondo l'integrale di Feynman*

Calcolando l'operatore di polarizzazione direttamente secondo il diagramma corrispondente (il cappio nel diagramma (110,1)), nella prima approssimazione della teoria delle perturbazioni otterremmo l'integrale

$$\frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi} \to -e^2 \int \operatorname{Tr} \gamma^\mu G(p)\, \gamma^\nu G(p-k)\, \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \qquad (112,1)$$

Tuttavia, questo integrale, esteso su tutto lo spazio quadridimensionale p, diverge quadraticamente, e per ottenere un risultato finito si dovrebbe operare la regolarizzazione secondo le regole descritte nel § 109.

Noi non riporteremo qui per intero tutto il procedimento, ma ci limiteremo a dimostrare in che modo si può ricavare dall'integrale (112,1) la parte immaginaria dell'operatore di polarizzazione (che noi abbiamo già determinato nel § 110 usando la condizione di unitarietà); questa deduzione contiene alcuni punti particolarmente istruttivi.

La parte immaginaria dell'integrale (112,1) non contiene divergenze e non richiede quindi la regolarizzazione. Per la funzione scalare $\operatorname{Im}\mathcal{P} = 1/3 \operatorname{Im}\mathcal{P}^\mu_\mu$ abbiamo

$$\operatorname{Im}\mathcal{P} = \operatorname{Im}\left\{ i\,\frac{4\pi e^2}{3\,(2\pi)^4} \int \frac{\operatorname{Tr}\gamma^\mu(\hat{p}+m)\,\gamma_\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)}{(p^2-m^2+i0)\,[(p-k)^2-m^2+i0]}\, d^4p \right\}.$$

Calcolando la traccia, l'integrale assume la forma

$$\operatorname{Im}\mathcal{P}(k^2) = \operatorname{Im}\int \frac{i\varphi(p)\, d^4p}{(p^2-m^2+i0)\,[(p-k)^2-m^2+i0]},$$

$$\varphi(p) = \frac{2e^2}{3\pi^3}\,(2m^2+pk-p^2). \qquad (112,2)$$

Sia $k^2 > 0$. Passiamo in un sistema di riferimento in cui $k = (k_0, 0)$. In questo sistema

$$(p-k)^2 = (p_0 - k_0)^2 - \boldsymbol{p}^2.$$

Introducendo inoltre la notazione $\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ (ε non coincide con « l'energia » p_0 dell'elettrone virtuale!), riscriviamo la (112,2) nella forma

$$\operatorname{Im} \mathcal{F}(k^2) = \operatorname{Im} \int d^3p \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{i\varphi(p_0, \boldsymbol{p})}{(p_0^2 - \varepsilon^2 + i0)\,[(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2 + i0]},$$

$$\varphi(p_0, \boldsymbol{p}) = \frac{2e^2}{3\pi^3}(m^2 + \varepsilon^2 + p_0 k_0 - p_0^2). \qquad (112,3)$$

L'espressione integranda ha quattro poli nella variabile p_0:

$$a)\ p_0 = \varepsilon - i0, \qquad a')\ p_0 = -\varepsilon + i0,$$
$$b)\ p_0 = k_0 - \varepsilon + i0, \qquad b')\ p_0 = k_0 + \varepsilon - i0.$$

Nella fig. 20 è rappresentata la disposizione di questi poli; per fissare le idee, supporremo $k_0 > 0$ (il risultato finale è funzione di

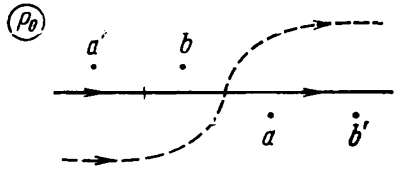


Fig. 20

k_0^2 e non dipende dal segno di k_0). Calcoliamo il salto che la funzione $\mathcal{F}(t)$ subisce sul taglio nel piano della variabile complessa $t = k^2 = k_0^2$, oppure, ciò che è la stessa cosa, sull'asse reale nel piano del complesso k_0. La parte reale della funzione $\mathcal{F}(t)$ è continua sul taglio, e quindi il salto è

$$\Delta\mathcal{F}(t) = 2i \operatorname{Im} \mathcal{F}(t). \qquad (112,4)$$

Mostriamo innanzitutto in che modo si può, sulla base della forma dell'integrale, stabilire la posizione del taglio. Indichiamo l'integrale interno nella (112,3) (integrale in dp_0) con $I(\boldsymbol{p}, k_0)$. Fintanto che i poli superiori e inferiori nella fig. 20 si trovano a distanze finite gli uni dagli altri, il cammino d'integrazione in p_0 può essere spostato lontano dai poli (linea tratteggiata nella figura). È quindi evidente che in questo caso l'integrale $I(\boldsymbol{p}, k_0)$ non varierà per uno spostamento infinitesimo dei poli b e b' verso il basso o verso l'alto rispetto all'asse reale, cioè per la sostituzione $k_0 \to k_0 \pm i\delta$, $\delta \to 0$. In altre parole, quando k_0 tende al suo valore reale dall'alto o dal

basso, i valori di $I(\boldsymbol{p}, k_0)$ saranno gli stessi, e quindi questo integrale non darà alcun contributo nel salto $\Delta\mathcal{F}$. La situazione cambia solo se due poli (per $k_0 > 0$ questi possono essere i poli a e b) si vengono a trovare l'uno sotto l'altro, in modo che il cammino d'integrazione rimane « stretto » tra di essi e non può essere spostato. In tal modo, il salto $\Delta\mathcal{F} \neq 0$ solo se in qualche parte della regione d'integrazione in d^3p può venire soddisfatta la condizione $k_0 - \varepsilon = \varepsilon$, cioè $k_0 = 2\varepsilon = 2\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. Perché questo sia possibile deve, evidentemente, essere $k_0 \geqslant 2m$, cioè $t \geqslant 4m^2$ [1]).

Riscriviamo l'integrale $I(\boldsymbol{p}, k_0)$ nella forma

$$I(\boldsymbol{p}, k_0) = \int\limits_C \frac{i\varphi(p_0, \boldsymbol{p})\, dp_0}{(p_0^2 - \varepsilon^2)\,[(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2]}, \tag{112,5}$$

omettendo i termini $i0$ nel denominatore e cambiando corrispondentemente il cammino d'integrazione C come indicato nella fig. 21.

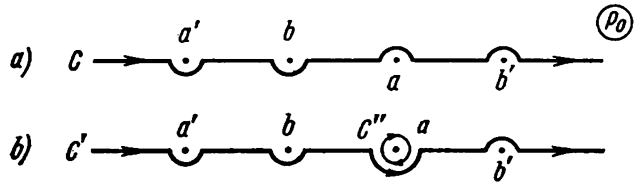


Fig. 21

Noi vediamo che l'origine del salto $\Delta\mathcal{F}(t)$ è legato all'impossibilità di spostare il cammino lontano dal polo a (quando il cammino è stretto tra a e b). Avendo presente questo fatto, sostituiamo il cammino C con il cammino C' che passa sotto il punto a, aggiungendo corrispondentemente un integrale lungo una piccola circonferenza che aggira completamente questo punto (fig. 21,b). Ora, il cammino C' può essere spostato senza ostacoli lontano dalle singolarità, e quindi l'integrazione su di esso dà un contributo solo nella parte regolare della funzione $\mathcal{F}(t)$. Per determinare, invece, il salto cercato della funzione è sufficiente considerare l'integrale sulla circonferenza C''; la stima di questo integrale si riduce al calcolo del residuo nel polo a. Questa

---

[1]) Analogamente ci possiamo convincere dell'assenza del taglio per $t = k^2 < 0$. Scegliendo in questo caso il sistema di riferimento in cui $k = (0, \boldsymbol{k})$, troveremo che i poli dell'espressione integranda si trovano nei punti

$$p_0 = \pm(\varepsilon - i0), \qquad p_0 = \pm(\sqrt{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})^2 + m^2} - i0).$$

Ambedue i poli inferiori si trovano nel semipiano destro di p_0, e quelli superiori nel semipiano sinistro, e quindi non c'è alcuna coppia di poli che possa risultare l'una accanto all'altra.

operazione può essere eseguita mediante la sostituzione nell'espressione integranda:

$$\frac{1}{p_0^2-\varepsilon^2} \to -2\pi i\delta\,(p_0^2-\varepsilon^2) \tag{112,6}$$

(il segno negativo è dovuto al fatto che la circonferenza attorno al polo viene percorsa in senso negativo). Qui nell'argomento della funzione delta occorre tenere conto solo della radice $p_0 = +\varepsilon$ (viene aggirato solo il polo a e non il polo a'); questa condizione viene automaticamente soddisfatta se conveniamo di eseguire l'integrazione solo su metà dello spazio dei 4-impulsi: $p_0 > 0$.

Dopo la sostituzione (112,6) il salto dell'integrale $I(\boldsymbol{p}, k_0)$ si calcola direttamente:

$$\Delta I = \{I(\boldsymbol{p}, k_0+i\delta) - I(\boldsymbol{p}, k_0-i\delta)\}_{\delta\to+0} =$$

$$= -2\pi i \int_0^\infty \delta\,(p_0^2-\varepsilon^2)\, i\varphi\,(p_0, \boldsymbol{p}) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(k_0-p_0)^2-\varepsilon^2+i\delta} - \frac{1}{(k_0-p_0)^2-\varepsilon^2-i\delta}\right] dp_0.$$

Usando l'uguaglianza

$$\frac{1}{(k_0-p_0)^2-\varepsilon^2\pm i\delta} = \mathrm{P}\,\frac{1}{(k_0-p_0)^2-\varepsilon^2} \mp i\pi\delta\,[(k_0-p_0)^2-\varepsilon^2]$$

(vedi la (108,3)), otteniamo

$$\Delta I = i\,(2\pi i)^2 \int_0^\infty \delta\,(p_0^2-\varepsilon^2)\,\delta\,[(k_0-p_0)^2-\varepsilon^2]\,\varphi\,(p_0, \boldsymbol{p})\,dp_0.$$

Gli argomenti delle funzioni delta possono venire riscritti in forma invariante sottraendo e aggiungendo $\boldsymbol{p}^2$:

$$p_0^2-\varepsilon^2 = p^2-m^2, \quad (k_0-p_0)^2-\varepsilon^2 = (k-p)^2-m^2.$$

Dopo questa operazione troviamo

$$\Delta\mathcal{F}\,(k^2) = i\,(2\pi i)^2 \int_{p_0>0} d^4p\cdot\varphi\,(p)\,\delta\,(p^2-m^2)\,\delta\,[(p-k)^2-m^2]. \tag{112,7}$$

Per la presenza di funzioni delta l'integrazione si esegue, di fatto, solo nella regione di intersezione delle ipersuperfici

$$p^2 = m^2, \quad (p-k)^2 = m^2. \tag{112,8}$$

Poiché in questa regione tutti i quadrivettori p sono del genere tempo, la condizione di integrazione rispetto a $p_0 > 0$ ha carattere invariante (parte superiore del cono $p^2 = m^2$).

Confrontiamo la (112,7) con la formula di partenza (112,2). Noi vediamo che il salto della funzione $\mathcal{F}(t)$ sul taglio nel piano t può

essere calcolato operando nell'integrale originario di Feynman la sostituzione

$$\frac{1}{p^2-m^2+i0} \to -2\pi i\delta\,(p^2-m^2) \tag{112,9}$$

nei propagatori corrispondenti alle linee del cappio segnate con una crocetta nel diagramma (110,1) (*S. Mandelstam*, 1958; *R. Cutkosky*, 1960).

Notiamo che le condizioni (112,8) delimitano quella parte dello spazio degli impulsi, nella quale le linee di particelle virtuali nel diagramma corrispondono a particelle reali (oppure, come si dice, i 4-impulsi p e $p-k$ giacciono sulla *superficie delle masse*). Qui è chiaramente visibile il legame con il metodo che fa uso della relazione di unitarietà, in cui queste stesse linee vengono sostituite con linee delle particelle reali dello stato intermedio.

Noi vediamo qui anche la ragione matematica dell'assenza di divergenze nella parte immaginaria del diagramma: essa è determinata dall'integrazione su una regione finita della superficie delle masse invece che su tutto lo spazio infinito dei 4-impulsi, come avviene nell'integrale originario di Feynman.

Per ricavare ora dalla (112,7) la formula trovata nel § 110, ritorniamo nel sistema di riferimento in cui $\boldsymbol{k}=0$, e integriamo in

$$d^4p = |\boldsymbol{p}|\,\varepsilon d\varepsilon\, dp_0\, do.$$

L'integrazione si riduce alla rimozione delle funzioni delta. Abbiamo

$$\delta\,(p^2-m^2)\,dp_0 = \delta\,(p_0^2-\varepsilon^2)\,dp_0 \to \frac{1}{2\varepsilon}\,\delta\,(p_0-\varepsilon)\,dp_0,$$

dopo di che la seconda funzione delta diventa

$$\delta\,[(p-k)^2-m^2]\,d\varepsilon = \delta\,[(p_0-k_0)^2-\varepsilon^2]\,d\varepsilon =$$

$$= \delta\,(-2\varepsilon k_0+k_0^2)\,d\varepsilon \to \frac{1}{2k_0}\,\delta\left(\varepsilon-\frac{k_0}{2}\right)d\varepsilon.$$

Infine otteniamo

$$\Delta\mathcal{F}\,(t) = -\frac{i\pi^2}{2}\int\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\,\varphi\,(\varepsilon,\ \boldsymbol{p})\,do, \tag{112,10}$$

dove $t=k^2=k_0^2$, e il valore della funzione φ è preso nel punto

$$p_0=\varepsilon=\frac{k_0}{2}, \qquad \boldsymbol{p}^2=\varepsilon^2-m^2=\frac{k_0^2}{4}-m^2,$$

cioè

$$\varphi\,(\varepsilon,\ \boldsymbol{p}) = \frac{e^2}{3\pi^3}\,(2m^2+t)$$

e non dipende dall'angolo. Quindi l'integrazione in do si riduce ad una moltiplicazione per 4π, e si torna cosí alla (110,8).

Nel procedimento esposto è essenziale solo il fatto che il diagramma è scisso in due parti mediante il taglio di due sole linee. Perciò

la regola formulata resta valida anche per diagrammi costituiti da due blocchi qualsiasi uniti da due linee (elettroniche o fotoniche). L'integrale, calcolato mediante la sostituzione (112,9), determinerà, in questo caso, quel contributo alla parte immaginaria del diagramma che, nel metodo che usa la relazione di unitarietà, è connesso con il corrispondente stato intermedio a due particelle.

§ 113. *Fattori di forma elettromagnetici dell'elettrone*

Consideriamo l'operatore di vertice $\Gamma^{\mu} = \Gamma^{\mu}(p_2, p_1; k)$ nel caso in cui le due linee elettroniche sono esterne e la linea fotonica interna. Alle linee elettroniche esterne vengono associati i fattori $u_1 = u(p_1)$ e $\bar{u}_2 = \bar{u}(p_2)$, e quindi Γ entra nell'espressione del diagramma attraverso il prodotto

$$j^{\mu}_{fi} = \bar{u}_2 \Gamma^{\mu} u_1. \tag{113,1}$$

Come già è stato notato nel § 108, la (113,1) rappresenta la corrente elettronica di transizione che tiene conto anche delle correzioni radiative. Le richieste di invarianza relativistica e di invarianza di gauge permettono di stabilire la forma generale della struttura matriciale di questa corrente.

L'operatore d'interazione elettromagnetica $V = e(jA)$ è un vero scalare (e non uno pseudoscalare); in questa circostanza trova la sua espressione formale la conservazione della parità spaziale in queste interazioni. Di conseguenza, la corrente di transizione j_{fi} è un vero 4-vettore (e non uno pseudovettore). Esso può, quindi, venire espresso solo attraverso 4-vettori veri composti dai due 4-vettori p_1 e p_2 a nostra disposizione (il terzo $k = p_2 - p_1$) e dai bispinori u_1 e u_2. Esistono in tutto tre 4-vettori indipendenti di questo tipo, bilineari rispetto a $\bar{u}_2$ e u_1:

$$\bar{u}_2 \gamma u_1, \quad (\bar{u}_2 u_1)\, p_1, \quad (\bar{u}_2 u_1)\, p_2,$$

ovvero,

$$\bar{u}_2 \gamma u_1, \quad (\bar{u}_2 u_1)\, P, \quad (\bar{u}_2 u_1)\, k, \tag{113,2}$$

dove $P = p_1 + p_2$. Ma la condizione di invarianza di gauge richiede la trasversalità della corrente di transizione rispetto al 4-impulso del fotone k:

$$j_{fi} k = 0. \tag{113,3}$$

A questa condizione soddisfano i primi due dei 4-vettori (113,2): il primo in virtú delle equazioni di Dirac

$$(\hat{p}_1 - m)\, u_1 = 0, \qquad \bar{u}_2 (\hat{p}_2 - m) = 0, \tag{113,4}$$

e il secondo perché $Pk = 0$. La corrente j_{fi} è rappresentata da una combinazione lineare di questi due 4-vettori:

$$j_{fi}^{\mu} = f_1 (\bar{u}_2 u_1) P^{\mu} + f_2 (\bar{u}_2 \gamma^{\mu} u_1),$$

dove f_1, f_2 sono funzioni invarianti, chiamate *fattori di forma elettromagnetici* dell'elettrone.

Poiché i 4-impulsi p_1 e p_2 si riferiscono all'elettrone libero, allora $p_1^2 = p_1^2 = m^2$, e con i tre 4-vettori p_1, p_2, k (legati dall'uguaglianza $k = p_2 - p_1$) si può costruire in tutto una sola variabile scalare indipendente; come tale noi sceglieremo k^2. Allora i fattori di forma sono funzioni di k^2.

L'espressione per la corrente si può rappresentare anche in altre forme, scegliendo diversamente i due termini indipendenti. Usando le equazioni (113,4) e le regole di commutazione delle matrici γ, è facile convincersi che

$$(\bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) k_{\nu} = -2m (\bar{u}_2 \gamma^{\mu} u_1) + (\bar{u}_2 u_1) P^{\mu}, \qquad (113,5)$$

dove $\sigma^{\mu\nu} = {}^1/_2 (\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})$. Il coefficiente di questo termine ha, come vedremo, un significato fisico importante, e per questa ragione scriveremo

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu} f (k^2) - \frac{1}{2m} g (k^2) \sigma^{\mu\nu} k_{\nu}, \qquad (113,6)$$

dove f, g sono due altri fattori di forma; il motivo per cui è stato messo in evidenza il fattore $1/2m$ verrà chiarito piú avanti[1]). Per brevità, noi scriveremo l'operatore di vertice al posto della corrente, sottintendendo che esso deve essere preso tra i fattori $\bar{u}_2 \ldots u_1$.

Per chiarire le proprietà dei fattori di forma esaminiamo il diagramma (107,16) che rappresenta il processo d'interazione di un elettrone con un campo esterno. L'ampiezza di diffusione corrispondente è

$$M_{fi} = -e j_{fi}^{\mu} \mathcal{A}_{\mu}^{(e)} (k), \qquad (113,7)$$

dove $\mathcal{A}_{\mu}^{(e)}$ è il campo esterno efficace (tenuto conto della polarizzazione del vuoto).

L'ampiezza (113,7) descrive due canali di reazione. Nel canale di diffusione la variabile invariante è

$$t = k^2 = (p_2 - p_1)^2 \leqslant 0.$$

Operando le sostituzioni $p_2 \to p_-$, $p_1 \to -p_+$ noi passiamo nel canale di annichilazione, che corrisponde alla creazione di una

---

[1]) Per evitare malintesi ricordiamo che nella definizione (113,6) si presuppone che k sia il 4-impulso della linea fotonica entrante nel vertice; per la linea uscente il segno del secondo termine sarebbe opposto.

coppia di particelle di impulso p_- e p_+. In questo canale

$$t = (p_- + p_+)^2 \geqslant 4m^2.$$

La regione dei valori $0 < t < 4m^2$ non è una regione fisica.

Passiamo alla condizione di unitarietà (108,12). Nel canale di diffusione ($t < 0$), in questo caso, non esistono stati fisici intermedi: un elettrone libero non può variare il suo impulso o generare altre particelle di qualsiasi tipo. Stati intermedi non si hanno, ovviamente, nemmeno nella regione non fisica. Perciò per $t < 4m^2$ il secondo membro dell'uguaglianza (108,12) si annulla, e quindi la matrice T_{fi} (oppure, ciò che fa lo stesso, M_{fi}) è hermitiana:

$$M_{fi} = M^*_{if}.$$

Lo scambio dello stato iniziale con quello finale corrisponde allo scambio di p_1 con p_2, e quindi alla sostituzione di k con $-k$. Perciò, rappresentando M_{fi} nella forma (113,7), abbiamo

$$j^{\mu}_{fi}\mathcal{A}^{(e)}_{\mu}(k) = j^{\mu *}_{if}\mathcal{A}^{(e)*}_{\mu}(-k).$$

Ma $\mathcal{A}^{(e)}(-k) = \mathcal{A}^{(e)*}(k)$, e perciò da qui discende che anche la matrice delle correnti di transizione è hermitiana:

$$j_{fi} = j^*_{if} \quad \text{per} \quad t < 4m^2. \tag{113,8}$$

Usando le proprietà delle matrici γ (21,7), è facile verificare che

$$(\bar{u}_2\gamma^{\mu}u_1) = (\bar{u}_1\gamma^{\mu}u_2)^*,$$

$$(\bar{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1) = -(\bar{u}_1\sigma^{\mu\nu}u_2)^*.$$

Perciò j^*_{if} differisce da j_{fi} solo per la sostituzione delle funzioni $f(t)$ e $g(t)$ con le relative complesse coniugate, e dall'uguaglianza (113,8) segue allora che queste funzioni sono reali. Vale a dire,

$$\mathrm{Im} f(t) = \mathrm{Im} g(t) = 0 \quad \text{per} \quad t < 4m^2. \tag{113,9}$$

Nel canale di annichilazione ($t > 4m^2$), invece, lo stato f è una coppia che può trasformarsi in un'altra coppia avente impulsi differenti (diffusione elastica) oppure in un qualsiasi altro sistema piú complesso. Perciò il secondo membro dell'uguaglianza, che esprime la condizione di unitarietà, non è nullo, la matrice M_{fi} (e con essa anche j_{fi}) non è hermitiana, e quindi i fattori di forma sono complessi.

Le proprietà di analicità delle funzioni $f(t)$ e $g(t)$ sono del tutto analoghe alle proprietà della funzione $\mathcal{F}(t)$ esaminate nel § 108 (anche se questa affermazione è difficile da dimostrare cosí direttamente). Queste funzioni sono analitiche nel piano complesso t tagliato lungo l'asse reale positivo $t > 4\,m^2$, ed inoltre

$$f^*(t) = f(t^*), \quad g^*(t) = g(t^*).$$

La condizione di rinormalizzazione (107,19), applicata all'operatore di vertice (113,6), conduce alla richiesta

$$f(0) = 1. \tag{113,10}$$

Per tenere conto automaticamente di questa condizione (nel calcolo della funzione $f(t)$ a partire dalla sua parte immaginaria), occorre applicare una relazione di dispersione del tipo (108,8) non direttamente alla funzione $f(t)$, ma a $(f-1)/t$. Allora otteniamo una relazione di dispersione ad « una sottrazione »:

$$f(t) - 1 = \frac{t}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(t')}{t'(t'-t-i0)} dt'. \tag{113,11}$$

Per quanto riguarda il fattore di forma $g(t)$, invece, nessun valore viene ad esso assegnato a priori da esigenze fisiche. Perciò per esso la relazione di dispersione viene scritta « senza sottrazioni »:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g(t')}{t'-t-i0} dt'. \tag{113,12}$$

Il valore $g(0)$ ha un senso fisico molto importante: esso dà la correzione al momento magnetico dell'elettrone. Per verificarlo consideriamo la diffusione di un elettrone non relativistico in un campo magnetico costante lentamente variabile nello spazio.

Il termine nell'ampiezza di diffusione (113,7), connesso col fattore di forma $g(k^2)$, ha la forma

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(k^2) (\bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) k_\nu A_\mu^{(e)}(k). \tag{113,13}$$

Per un campo magnetico puro $A^{(e)\mu} = (0, \boldsymbol{A})$; la costanza del campo nel tempo significa che per il 4-vettore $k^\mu = (0, \boldsymbol{k})$, e alla variazione lenta del campo nello spazio corrispondono piccoli $\boldsymbol{k}$ (avendo in vista il successivo passaggio al limite $\boldsymbol{k} \to 0$, nella (113,13) scriveremo subito $A^{(e)}$ in luogo del campo efficace $\mathcal{A}^{(e)}$). Sviluppando l'espressione (113,13) ed esprimendola attraverso quantità tridimensionali, otteniamo

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(-\boldsymbol{k}^2) (\bar{u}_2 \Sigma u_1) i [\boldsymbol{k} \boldsymbol{A}_k],$$

dove Σ è la matrice (21,21). Sostituiamo il prodotto $i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}_k]$ con l'intensità del campo magnetico $\boldsymbol{H}_k$; dopo questa operazione si può eseguire il passaggio al limite per $\boldsymbol{k} \to 0$. Infine, introducendo le ampiezze spinoriali non relativistiche w_1, w_2 secondo la (23,12)

$$\bar{u}_2 = \sqrt{2m}\,(w_2^* 0), \quad u_1 = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

troviamo in definitiva

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(0) \boldsymbol{H}_k \cdot 2m (w_2^* \boldsymbol{\sigma} w_1). \tag{113,14}$$

Confrontiamo questa espressione con l'ampiezza di diffusione in un campo elettrico costante di potenziale scalare Φ_k:

$$M_{fi} = -e(\bar{u}_2 \gamma^0 u_1) \Phi_k \approx -e\Phi_k \cdot 2m (w_2^* w_1).$$

Noi vediamo che ad un elettrone in un campo magnetico si può assegnare l'energia potenziale supplementare

$$-\frac{e}{2m} g(0) \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{H}_k.$$

Questo significa che l'elettrone possiede il momento magnetico « anomalo »

$$\mu' = \frac{e\hbar}{2mc} g(0) \tag{113,15}$$

(in unità ordinarie) oltre al momento magnetico « normale » di Dirac $e\hbar/2mc$.

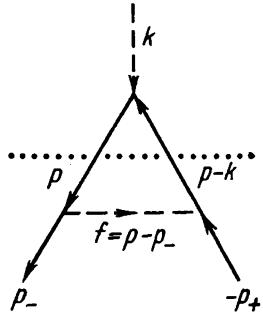
§ 114. *Calcolo dei fattori di forma dell'elettrone*

Passiamo ora al calcolo effettivo dei fattori di forma dell'elettrone (*J. Schwinger*, 1949).

Nell'approssimazione di ordine zero della teoria delle perturbazioni l'operatore di vertice $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$, cioè i fattori di forma elettronici sono

$$f = 1, \quad g = 0.$$

La prima correzione radiativa ai fattori di forma è determinata dal diagramma vertice



(114,1)

(avente due terminali elettronici reali e un terminale fotonico virtuale). Inizieremo dal calcolo delle parti immaginarie dei fattori di

forma. Come abbiamo mostrato nel paragrafo precedente, queste quantità sono differenti da zero solo nel canale di annichilazione ($k^2 > 4m^2$); in relazione a questo fatto, i 4-impulsi dei terminali elettronici nel diagramma (114,1) sono relativi all'elettrone e al positrone creati e sono indicati rispettivamente con p_- e $-p_+$. L'espressione analitica del diagramma (114,1) è

$$-ie\bar{u}(p_-)\Gamma^\mu u(-p_+) =$$

$$= (-ie)^3 \bar{u}(p_-)\gamma^\nu i \int G(p)\gamma^\mu G(p-k)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(f)\frac{d^4p}{(2\pi)^4} u(-p_+) \quad (114,2)$$

ovvero, sviluppando,

$$\gamma^\mu f(k^2) - \frac{1}{2m} g(k^2)\sigma^{\mu\nu}k_\nu = \int \frac{i\varphi^\mu(p)\, d^4p}{(p^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}, \quad (114,3)$$

dove è stata introdotta la notazione

$$\varphi^\mu(p) = -e^2 \frac{\gamma^\nu(\hat{p}+m)\gamma^\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)\gamma_\nu}{4\pi^3(p_- - p)^2} \quad (114,4)$$

e, per brevità, sono stati omessi i fattori $\bar{u}(p_-) \ldots u(p_+)$; nel seguito si sottintende sempre che i due membri dell'uguaglianza sono presi tra questi « fattori ».

La linea tratteggiata orizzontale tracciata sul diagramma (114,1) taglia quest'ultimo in due parti in modo tale da mettere in evidenza lo stato intermedio che figurerebbe nel calcolo della parte immaginaria dei fattori di forma sulla base della condizione di unitarietà: si tratta di uno stato ad una coppia elettrone-positrone con impulsi differenti da p_- e p_+. Questo stesso taglio mostra dove deve essere eseguita nell'integrale (114,2) la sostituzione dei fattori singolari se il calcolo viene fatto secondo la regola (112,9) (nella (114,3) questi fattori sono stati messi in evidenza nell'espressione integranda).

L'integrale nella (114,3) ha la stessa forma dell'integrale nella (112,2). Noi possiamo, perciò, scrivere immediatamente il risultato della trasformazione nella forma (112,10), tralasciando i passaggi intermedi:

$$2\gamma^\mu \operatorname{Im} f(t) - \frac{2}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_\nu \operatorname{Im} g(t) = -\frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}} \int \varphi^\mu(p)\, do_{\boldsymbol{p}}, \quad (114,5)$$

dove $t = k^2$, l'integrazione è eseguita sulla direzione del vettore $\boldsymbol{p}$, e i 4-vettori $p'_- \equiv p$, $p'_+ \equiv k - p$ nella definizione della funzione $\varphi^\mu(p)$ (114,4) diventano i 4-impulsi di particelle reali (e non virtuali). L'espressione (114,5) è relativa al sistema di riferimento in cui $\boldsymbol{k} = 0$; tale è il sistema del baricentro della coppia creata p_-, p_+ (e quindi anche della coppia « intermedia » p'_-, p'_+). In questo sistema, quindi

$$k = (k_0, 0), \quad p_- = \left(\frac{k_0}{2}, \boldsymbol{p}_-\right), \quad p_+ = \left(\frac{k_0}{2}, -\boldsymbol{p}_-\right), \quad p = \left(\frac{k_0}{2}, \boldsymbol{p}\right),$$

ed è facile verificare che

$$f^2 = (p - p_-)^2 = -2\boldsymbol{p}^2(1 - \cos\theta) = -\frac{t - 4m^2}{2}(1 - \cos\theta), \quad (114,6)$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p}_-$. Sostituendo ora la (114,4) nella (114,5) ed eliminando nell'espressione integranda le matrici $\gamma^\nu \ldots \gamma_\nu$ ricorrendo alle formule (22,6) otteniamo

$$\gamma^\mu \operatorname{Im} f(t) - \frac{1}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_\nu \operatorname{Im} g(t) =$$

$$= -\frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \int \frac{do_p}{2\pi(1-\cos\theta)} \gamma^\nu(\hat{p} + m)\gamma^\mu(\hat{p} - \hat{k} + m)\gamma_\nu =$$

$$= -\frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \int \frac{do_f}{2\pi(1-\cos\theta)} [-2m^2\gamma^\mu + 4m(P^\mu + 2f^\mu) +$$

$$+ 2(\hat{p}_+ - \hat{f})\gamma^\mu(\hat{p}_- + \hat{f})], \quad (114,7)$$

dove sono stati introdotti i 4-vettori

$$f = p - p_- = (0, \boldsymbol{f}), \quad P = p_- - p_+ = (0, 2\boldsymbol{p}_-). \quad (114,8)$$

L'integrazione si riduce ora alla stima degli integrali

$$(I, I^\mu, I^{\mu\nu}) = \int \frac{(1, f^\mu, f^\mu f^\nu)}{1 - \cos\theta} \frac{do_f}{2\pi} \quad (114,9)$$

contenenti ognuno uno dei numeratori elencati.

L'integrale I diverge logaritmicamente per $\theta \to 0$. Riscrivendolo nella forma

$$I = \int_0^{t-4m^2} \frac{d(f^2)}{f^2} = \int_0^{-(t-4m^2)} \frac{d(f^2)}{f^2},$$

vediamo che la divergenza si trova in corrispondenza di valori piccoli della « massa » del fotone virtuale. Quindi si tratta della divergenza « infrarossa ». Per un esame dettagliato di questo problema rimandiamo al § 119. Qui ci limiteremo a notare che questa divergenza è fittizia, nel senso che se si tiene conto correttamente di tutti gli effetti fisici le divergenze di questo tipo si compensano a vicenda e scompaiono. Conseguentemente, noi possiamo arbitrariamente « troncare » inferiormente l'integrale, e successivamente, nel calcolo di fenomeni fisici reali, far tendere il limite d'integrazione a zero.

Qui il procedimento piú semplice da seguire è di eseguire il troncamento in maniera relativisticamente invariante. Per fare questo assegniamo al fotone virtuale f una massa λ, piccola ma finita ($\lambda \ll m$), cioè operiamo nel propagatore fotonico $D(f^2)$, che figura nella (114,2), la sostituzione

$$f^2 \to f^2 - \lambda^2. \quad (114,10)$$

Otteniamo di conseguenza

$$I = \int_0^{-(t-4m^2)} \frac{d(f^2)}{f^2-\lambda^2} = \ln \frac{t-4m^2}{\lambda^2}. \qquad (114,11)$$

L'integrale I^μ, in cui f^μ è un vettore del genere spazio, deve esprimersi attraverso il 4-vettore P^μ: dei due 4-vettori a nostra disposizione P^μ e k^μ, solo P^μ è del genere spazio (per p_+ e p_- generici). Perciò $I^\mu = AP^\mu$. Moltiplicando questa uguaglianza per P_μ e calcolando l'integrale $P_\mu I^\mu$ nel sistema del baricentro della coppia (ricavando le componenti dei 4-vettori f e P dalla (114,8)), troviamo

$$A = \frac{1}{2p^2} \int_{-1}^{1} \frac{qpd\cos\theta}{1-\cos\theta} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\cos\theta = -1.$$

In tal modo,

$$I^\mu = -P^\mu. \qquad (114,12)$$

Analogamente si stima l'integrale

$$I^{\mu\nu} = \frac{1}{4} P^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2}\right) + \frac{1}{4} P^\mu P^\nu \qquad (114,13)$$

(per determinare i coefficienti in questa espressione è sufficiente calcolare gli integrali I^μ_μ e $I^{\mu\nu} P_\mu P_\nu$).

Il calcolo prosegue nel modo seguente. Sostituendo le (114,11-13) nella (114,7), noi otteniamo la somma di una serie di termini compresa tra i « fattori » $\bar{u}(p_-) \ldots u(-p_+)$. In ognuno di essi (usando le regole di commutazione delle matrici γ^μ) « facciamo passare » il fattore $\hat{p}_+$ a destra e $\hat{p}_-$ a sinistra; dopo di ciò si può sostituire $\hat{p}_- \to m$, $\hat{p}_+ \to -m$, poiché

$$\bar{u}(p_-)\hat{p}_- = m\bar{u}(p_-), \quad \hat{p}_+ u(-p_+) = -mu(-p_+).$$

Nella somma che si ottiene

$$-4(p_+p_-) I\gamma^\mu + 2mP^\mu - 3P^2\gamma^\mu$$

si può sostituire P^μ con l'espressione equivalente (presa tra i « fattori »!)

$$P^\mu \to 2m\gamma^\mu + \sigma^{\mu\nu}k_\nu$$

(cfr. la (113,5)). Infine, esprimendo tutte le quantità attraverso l'invariante $t = k^2$ ($2p_+p_- = t - 2m^2$, $P^2 = 4m^2 - t$) e confrontando i due membri dell'uguaglianza (114,7), otteniamo le seguenti formu-

le per le parti immaginarie dei fattori di forma:

$$\operatorname{Im} g(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}}, \tag{114,14}$$

$$\operatorname{Im} f(t) = \frac{\alpha}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \times \\ \times \left[-3t + 8m^2 + 2(t-2m^2) \ln \frac{t-4m^2}{\lambda^2} \right]. \tag{114,15}$$

La divergenza infrarossa è presente solo in $\operatorname{Im} f(t)$.

Le funzioni $f(t)$ e $g(t)$ si ricavano dalle loro parti immaginarie mediante le formule (113,11-12). In queste formule è comodo eseguire l'integrazione mediante quelle stesse sostituzioni che sono state usate nel § 110 per calcolare $\mathcal{F}(t)$. Espressi attraverso la variabile ξ (110,11), i fattori di forma sono determinati dalle formule

$$g(\xi) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\xi \ln \xi}{\xi^2 - 1}, \tag{114,16}$$

$$f(\xi) - 1 = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 2 \left(1 + \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2} \ln \xi \right) \ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3(1+\xi^2)+2\xi}{2(1-\xi^2)} \ln \xi + \right. \\ \left. + \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2} \left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2 \xi - 2F(\xi) + 2 \ln \xi \ln (1+\xi) \right] \right\}, \tag{114,17}$$

dove $F(\xi)$ è la funzione di Spence definita dalla (127,19).

Nella regione non fisica ($0 < t/m^2 < 4$) occorre porre $\xi = e^{i\varphi}$. Le espressioni per i fattori di forma diventano allora

$$f(\varphi) = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \ln \frac{m}{\lambda} + \frac{3 \cos \varphi + 1}{2 \operatorname{sen} \varphi} \varphi + \right. \\ \left. + \frac{2}{\operatorname{tg} \varphi} \int_0^{\varphi/2} \xi \operatorname{tg} \xi \, d\xi \right\}, \tag{114,18}$$

$$g(\varphi) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}. \tag{114,19}$$

Riportiamo infine le formule valide nel limite di $|t|$ piccoli:

$$\left. \begin{aligned} f(t) - 1 &= \frac{\alpha t}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right), \quad |t| \ll 4m^2, \\ g(t) &= \frac{\alpha}{2\pi}, \end{aligned} \right\} \tag{114,20}$$

e di $|t|$ grandi:

$$f(t) - 1 = -\frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{|t|}{m^2} + 2 \ln \frac{m}{\lambda} \ln \frac{|t|}{m^2} \right) + \\ + \begin{cases} i \dfrac{\alpha}{2} \ln \dfrac{t}{\lambda^2}, & t \gg 4m^2, \\ 0 & -t \gg 4m^2, \end{cases} \tag{114,21}$$

$$g(t) = -\frac{\alpha m^2}{\pi t} \ln \frac{|t|}{m^2} + \begin{cases} i \dfrac{\alpha m^2}{t}, & t \gg 4m^2, \\ 0, & -t \gg 4m^2. \end{cases} \tag{114,22}$$

Per quanto concerne Re f, la formula (114,21) è valida, come si usa dire, con precisione bilogaritmica, cioè inclusi i termini quadratici nei grandi logaritmi[1]).

§ 115. *Momento magnetico anomalo dell'elettrone*

Come abbiamo già detto nel § 113, il valore $g(0)$ determina la correzione radiativa al momento magnetico dell'elettrone. Se ci si pone lo scopo di trovare solo questa quantità, non è certamente necessario calcolare l'intera funzione $g(t)$. Usando la (114,14) e la (113,12), abbiamo

$$g(0)=\frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} g(t')}{t'}\,dt'=\frac{\alpha}{4\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}\sqrt{x-1}}=\frac{\alpha}{2\pi}. \qquad (115,1)$$

Con questa correzione il momento magnetico dell'elettrone vale

$$\mu=\frac{e\hbar}{2mc}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right). \qquad (115,2)$$

Questa formula venne ottenuta per la prima volta da *Schwinger* (1949).

Nell'approssimazione successiva ($\sim \alpha^2$) le correzioni radiative ai fattori di forma sono rappresentate dai sette diagrammi (103,10, *c-i*). Determinare anche solo il valore $g(0)$ in questa approssimazione richiede calcoli molto complessi. Per i dettagli dei calcoli rimandiamo ai lavori originali, e ci limitiamo qui a riportare il valore finale della correzione in seconda approssimazione[2]):

$$g^{(2)}(0)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\left(\frac{197}{144}+\frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\zeta(3)\right)=$$
$$=-0{,}328\frac{\alpha^2}{\pi^2}, \qquad (115,3)$$

il momento magnetico dell'elettrone vale, quindi,

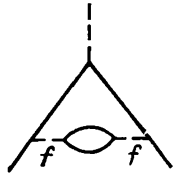
$$\mu=\frac{e\hbar}{2mc}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}-0{,}328\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right). \qquad (115,4)$$

---

[1]) Per l'espressione dell'operatore di vertice nel caso di un terminale elettronico virtuale e di uno reale e di un terminale fotonico reale vedi A. I. Akhiezer, V. B. Berestetskij, Kvantovaja elektrodinamika, 3ª ed., « Nauka », 1969, § 36, pag. 505 [edizione in inglese: A. I. Akhiezer, V. B. Berestetskij, Quantum Elektrodynamics, Wiley-Interscience, N.d.T.].

[2]) Vedi C. Sommerfield, Phys. Rev. 107, 328 (1957); Ann. Phys. 5, 26 (1958) e A. Peterman, Helv. Phys. Acta 30, 409 (1957). Per i calcoli eseguiti con il metodo che usa la condizione di unitarietà vedi M. V. Terentjev, ŽETF 43, 619 (1962).

Soffermiamoci sul contributo della polarizzazione del vuoto alla correzione $g^{(2)}(0)$. Esso è rappresentato dal diagramma



(115,5)

contenente il sottodiagramma dell'autoenergia del fotone. Il diagramma (115,5) differisce dal (114,1) della prima approssimazione solo per il fatto che al posto del propagatore fotonico $D(f^2) = 4\pi/f^2$ compare in esso il prodotto

$$D(f^2)\frac{\mathcal{P}(f^2)}{4\pi}D(f^2) = \frac{4\pi}{f^2}\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2},$$

dove $\mathcal{P}(f^2)$ è l'operatore di polarizzazione calcolato nel § 110 in prima approssimazione ($\sim \alpha$). Ripetendo parzialmente, con la variazione ora menzionata, i calcoli eseguiti nel paragrafo precedente, per « la parte di polarizzazione » otteniamo le correzioni

$$\operatorname{Im} g^{(2)}_{\text{polar}}(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}}\int_{-1}^{1}\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2}\,\frac{1+3\cos\theta}{2}\,d\cos\theta, \qquad (115,6)$$

dove

$$f^2 = -\frac{t-4m^2}{2}(1-\cos\theta) \qquad (115,7)$$

(vedi la (114,6)). La stima di questo integrale, e successivamente dell'integrale

$$g^{(2)}_{\text{polar}}(0) = \frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\operatorname{Im} g^{(2)}_{\text{polar}}(t')\,\frac{dt'}{t'} \qquad (115,8)$$

dà il valore

$$g^{(2)}_{\text{polar}}(0) = \frac{\alpha^2}{\pi^2}\left(\frac{119}{36}-\frac{\pi^2}{3}\right) = 0{,}016\,\frac{\alpha^2}{\pi^2}\,; \qquad (115,9)$$

esso costituisce il 5% dell'intero valore (115,3).

Abbiamo già fatto osservare (alla fine del § 111) che un determinato contributo alle correzioni radiative può essere apportato anche dagli effetti di polarizzazione del vuoto di altre particelle. Il contributo del vuoto di muoni al momento magnetico anomalo dell'elettrone si ottiene usando le stesse formule (115,6-8), nelle quali (ivi compresa la definizione della variabile f^2) m è, come prima, la massa dell'elettrone (m_e), ma come parametro m, che figura nell'espressione della funzione $\mathcal{P}(f^2)$, deve essere presa la massa del muone (m_μ). $\mathcal{P}(f^2)/f^2$ è funzione solo del rapporto f^2/m_μ^2. Nell'integrale

(115,8) è essenziale la regione dei valori di t (e quindi anche di f^2) confrontabili con m_e^2; perciò abbiamo $f^2/m_\mu^2 \sim (m_e/m_\mu)^2 \ll 1$ e per la stima degli integrali si può usare la formula limite (110,14), secondo la quale

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} = -\frac{\alpha}{15\pi}\frac{f^2}{m_\mu^2}.$$

Da qui si vede che il contributo a $g^{(2)}(0)$ dovuto alla polarizzazione del vuoto di muoni contiene il fattore supplementare « piccolo » $(m_e/m_\mu)^2$.

Una situazione opposta si viene a creare, tuttavia, quando si tratta del momento magnetico del muone. Poiché nella (115,3) la massa della particella non figura, questo stesso valore di $g^{(2)}(0)$ è valido anche per il muone, dove, ovviamente, si è tenuto conto del contributo della polarizzazione del vuoto di muoni. Ma il contributo dovuto alla polarizzazione del vuoto di altre particelle, degli elettroni, risulta, in questo caso, notevolmente maggiore. Questa quantità può essere calcolata mediante le formule (115,6-8), nelle quali occorre, ora, operare la sostituzione $m \to m_\mu$, e considerare $\mathcal{P}(t)$ come l'operatore di polarizzazione elettronico. Contrariamente al caso precedente, ora è essenziale la regione dei valori $f^2/m_e^2 \sim (m_\mu/m_e)^2 \gg 1$, e per $\mathcal{P}(f^2)$ occorre prendere l'espressione limite (110,15)

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} = \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|f^2|}{m_e^2}.$$

La stima degli integrali dà il valore

$$[g^{(2)}(0)]_{\substack{\text{elettr}\\ \text{polar}}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\left(\frac{1}{3}\ln\frac{m_\mu}{m_e} - \frac{25}{36}\right) = 1{,}09\,\frac{\alpha^2}{\pi^2} \qquad (115{,}10)$$

(*H. Suura, E. H. Wichman*, 1957; *A. Peterman*, 1957).

Sommando con la (115,3), per il momento magnetico del muone otteniamo

$$\mu_{\text{muone}} = \frac{e\hbar}{2m_\mu c}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0{,}76\,\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right). \qquad (115{,}11)$$

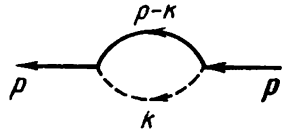
Notiamo che il contributo della polarizzazione del vuoto di muoni (115,9) costituisce qui il 2% dell'intero valore di $g^{(2)}(0)$. Un contributo dello stesso ordine di grandezza (a causa della vicinanza dei valori delle masse) sarebbe dato anche dalla polarizzazione del vuoto di pioni, che non può essere, in generale, calcolata esattamente, Per questa ragione non ha senso nemmeno il calcolo delle correzioni $\sim \alpha^3$ al momento magnetico del muone[1]).

[1]) Naturalmente, il fatto che sia ammissibile calcolare le correzioni al momento magnetico del muone, fatto che presuppone una totale applicabilità al muone dell'elettrodinamica quantistica esistente, non è evidente.

§ 116. *Calcolo dell'operatore di massa*

Considereremo l'esempio del calcolo dell'operatore di massa per mostrare il metodo della regolarizzazione diretta degli integrali di Feynman.

Nella prima approssimazione non nulla l'operatore di massa è rappresentato dal cappio nel diagramma



(116,1)

Ad esso corrisponde l'integrale

$$-i\overline{\mathscr{M}}(p) = (-ie)^2 \int \gamma^\mu G(p-k)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4},$$

sostituendo i propagatori ed eliminando i fattori $\gamma^\mu \ldots \gamma_\mu$ mediante le formule (22,6), otteniamo

$$\overline{\mathscr{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int \frac{2m - \hat{p} + \hat{k}}{[(p-k)^2 - m^2](k^2 - \lambda^2)} d^4k \qquad (116,2)$$

(il trattino sopra la lettera $\mathscr{M}$ indica il valore non regolarizzato dell'integrale). Nel propagatore fotonico è stata introdotta la « massa fittizia del fotone » λ al fine di rimuovere (come nel § 114) la divergenza infrarossa.

Trasformiamo l'integrale usando la formula (127,4), intendendo in essa per a_1 e a_2 i due fattori nel denominatore della (116,2). Dopo un semplice raggruppamento dei termini, nel denominatore del nuovo integrale otteniamo

$$\overline{\mathscr{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{2m - \hat{p} + \hat{k}}{[(k-px)^2 - a^2]^2}, \qquad (116,3)$$

dove

$$a^2 = m^2x^2 - (p^2 - m^2)\, x\,(1-x) + \lambda^2(1-x). \qquad (116,4)$$

La sostituzione di variabile $k \to k + px$ fa assumere all'integrale (116,3) una forma in cui il suo denominatore dipende solo dal quadrato k^2. In questo caso, però, in base alle formule (127,17-18) all'integrale si viene ad aggiungere una quantità costante

$$\overline{\mathscr{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \left\{ \int d^4k \int_0^1 dx \frac{2m - \hat{p}(1-x)}{(k^2 - a^2)^2} - \frac{i\pi^2}{4}\hat{p} \right\} \qquad (116,5)$$

(il termine contenente $\hat{k}$ nel numeratore è stato omesso in quanto si annulla nell'integrazione sulle direzioni del quadrivettore k; cfr. la (127,8)).

La regolarizzazione di questo integrale consiste nell'eseguire calcoli che gli facciano assumere la forma (107,20). Quest'ultima appare diversa innanzitutto perché si annulla se viene moltiplicata per l'ampiezza d'onda $u(p)$, dove p è il 4-impulso di un elettrone reale. Senza introdurre esplicitamente $u(p)$, questa condizione può essere formulata richiedendo che $\mathscr{M}(p)$ si annulli quando si effettua la sostituzione

$$\hat{p} \to m, \quad p^2 \to m^2. \tag{116,6}$$

La forma dell'integrale (116,5) è comoda, in questo caso, per il fatto che il 4-vettore p figura in essa solo sotto la forma $\hat{p}$ e p^2 (mentre i termini del tipo kp mancano).

Sottraendo dalla (116,5) la stessa espressione in cui è stata fatta la sostituzione (116,6), otteniamo

$$\frac{-8\pi i}{(2\pi)^4}\left\{\int d^4k \int_0^1 dx\cdot[2m-\hat{p}(1-x)]\left[\frac{1}{(k^2-a^2)^2}-\frac{1}{(k^2-a_0^2)^2}\right]-\right.$$
$$\left.-\int d^4k \int_0^1 dx \frac{1-x}{(k^2-a_0^2)^2}(\hat{p}-m)-\frac{i\pi^2}{4}(\hat{p}-m)\right\}, \tag{116,7}$$

dove

$$a_0^2 = m^2x^2+\lambda^2(1-x).$$

Per una regolarizzazione definitiva, tuttavia, deve essere operata ancora una sottrazione: in accordo con la (107,20), per effetto della sostituzione (116,6) deve annullarsi non solo l'intero $\mathscr{M}(p)$, ma anche $\mathscr{M}(p)$ senza uno dei fattori $\hat{p}-m$. Con la relativa sottrazione vengono completamente eliminati il secondo e il terzo termine entro parentesi graffa nella (116,7)[1]. Trasformiamo preliminarmente il primo integrale introducendo ancora un'altra integrazione ausiliaria mediante la formula (127,5), ponendovi $n=2$ e intendendo per a e b rispettivamente k^2-a^2 e $k^2-a_0^2$. In questo modo l'integrale assume la forma

$$(\hat{p}-m)\frac{16\pi i}{(2\pi)^4}e^2\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^1 dz\,\frac{(\hat{p}+m)[2m-\hat{p}(1-x)]\,x(1-x)}{[k^2-a_0^2+(p^2-m^2)\,x(1-x)\,z]^3}$$

---

[1]) Con ciò noi, nel processo di « rinormalizzazione en passant » (vedi pag. 545), omettiamo le correzioni alla costante di rinormalizzazione Z_1 (§ 107). I relativi integrali divergono logaritmicamente. Se introduciamo il « parametro di troncamento » $\Lambda^2 \gg m^2, p^2$, limitando la regione d'integrazione in d^4k con la condizione $k^2 \leqslant \Lambda^2$, possiamo calcolare questa correzione in forma esplicita. Il calcolo dà il risultato

$$Z_1 = 1+Z_1^{(1)}, \quad Z_1^{(1)} = -\frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\ln\frac{\lambda^2}{m^2}+\frac{9}{4}\right]. \tag{116,7a}$$

(qui è stata usata anche l'identità $p^2 - m^2 = (\hat{p} - m)(\hat{p} + m)$). Eseguiamo immediatamente l'integrazione in d^4k. Supponendo che $p^2 - m^2 < 0$, e usando la (127,14), otteniamo

$$(\hat{p} - m)\frac{e^2}{2\pi}\int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(\hat{p}+m)\,[2m - \hat{p}\,(1-x)]\,x\,(1-x)}{m^2x^2 + \lambda^2(1-x) + (m^2 - p^2)\,x\,(1-x)\,z}\,.$$

Ora, omettendo temporaneamente il fattore $(p - m)$, rimane da sottrarre un integrale simile in cui è stata fatta la sostituzione (116,6); dopo semplici trasformazioni otteniamo

$$\mathscr{M}(p) = (\hat{p} - m)^2 \frac{e^2}{2\pi}\int_0^1 dx \int_0^1 dz \times$$
$$\times \frac{m\,(1-x^2) - (\hat{p}+m)\,(1-x)^2\left[1 - \dfrac{2x\,(1+x)\,z}{x^2 + (\lambda/m)^2}\right]}{m^2x + (m^2 - p^2)\,(1-x)\,z} \qquad (116,8)$$

(nel denominatore comune è stato omesso il termine con λ^2, poiché questo non causa qui divergenze; altrove $\lambda^2\,(1 - x)$ è stato sostituito con λ^2, poiché alla divergenza infrarossa corrisponde una divergenza per $x \to 0$).

L'integrazione nella (116,8) (dapprima in dz e quindi in dx) è piuttosto lunga ma elementare e porta al seguente risultato finale:

$$\mathscr{M}(p) = \frac{\alpha}{2\pi m}(\hat{p} - m)^2 \left\{ \frac{1}{2\,(1-\rho)}\left(1 - \frac{2-3\rho}{1-\rho}\ln\rho\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\hat{p}+m}{m\rho}\left[\frac{1}{2\,(1-\rho)}\left(2 - \rho + \frac{\rho^2 + 4\rho - 4}{1-\rho}\ln\rho\right) + 1 + 2\ln\frac{\lambda}{m}\right]\right\}, \qquad (116,9)$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$\rho = \frac{m^2 - p^2}{m^2}$$

(*R. Karplus*, *N. M. Kroll*, 1950). L'integrale è stato stimato supponendo $\rho > 0$, e anche $\rho \gg \lambda/m$. In accordo con la regola di aggiramento dei punti singolari, nel prolungamento analitico dell'espressione (116,9) alla regione $\rho < 0$ la fase del logaritmo si determina mediante la sostituzione $m \to m - i0$; in questo caso $\rho \to \rho - i0$, e quindi $\ln\rho$ per $\rho < 0$ va inteso come segue:

$$\ln\rho = \ln|\rho| - i\pi. \quad \rho < 0 \qquad (116,10)$$

Esaminiamo il comportamento dell'operatore di massa per $p^2 \gg m^2$. In questo caso abbiamo $-\rho \approx p^2/m^2 \gg 1$ e con precisione logaritmica otteniamo

$$\mathscr{M}(p) = -[\mathscr{G}^{-1}(p) - G^{-1}(p)] \approx \frac{\alpha}{4\pi}\,\hat{p}\ln\frac{p^2}{m^2}. \qquad (116,11)$$

Come anche nel caso del propagatore fotonico (cfr. le formule (110, 15-16) per l'operatore di polarizzazione), la correzione in G^{-1} risulta piccola solo per un'energia non troppo grande, piú precisamente per

$$\frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{p^2}{m^2} \ll 1.$$

Nel caso in questione, tuttavia, la crescita logaritmica è, in un certo senso, fittizia e può essere eliminata con una scelta opportuna del gauge, cioè della funzione $D^{(l)}$ nel propagatore fotonico (*L. D. Landau*, *A. A. Abrikossov*, *I. M. Khalatnikov*, 1954). Precisamente occorre porre

$$D^{(l)} = 0, \tag{116,12}$$

mentre la formula (116,9) è stata ottenuta nel gauge

$$D^{(l)} = D. \tag{116,13}$$

Questa proprietà del gauge (116,12) lo rende particolarmente comodo per lo studio del carattere della teoria per $p^2 \gg m^2$; questo fatto verrà usato piú avanti nel § 128.

Per dimostrare l'affermazione fatta osserviamo che, se a noi interessano solo i termini $\sim e^2$, la trasformazione dal gauge (116,13) al gauge (116,12) può essere considerata una trasformazione infinitesima (grazie alla presenza di e^2 nell'esponente della (102,14)). In relazione a questo, si può usare direttamente la formula (102,16), ponendovi

$$\delta d^{(l)}(q) = -\frac{D}{q^2} = -\frac{4\pi}{(q^2)^2},$$

e sostituendo inoltre nell'espressione integranda, con la precisione richiesta, le funzioni $\mathcal{G}$ con G. Nell'integrale in d^4q è essenziale la regione $q \gg p$; in questo caso $G(p-q)$ nell'espressione integranda è molto piú piccola di $G(p)$, e può essere trascurata. Allora

$$\delta\mathcal{G}^{-1} = -G^{-2}(p)\,\delta\mathcal{G}(p) = -ie^2G^{-1}(p)\int \delta d^{(l)}(q)\,\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

Infine, applicando la trasformazione (127,11-12), otteniamo

$$\delta\mathcal{G}^{-1}(p) = -\frac{e^2}{4\pi}G^{-1}(p)\int \frac{d(-q^2)}{-q^2} \approx -\frac{e^2}{4\pi}\hat{p}\ln\frac{\Lambda^2}{p^2},$$

dove Λ è un limite superiore ausiliario d'integrazione. La divergenza di questa espressione per grandi Λ viene rimossa mediante la rinormalizzazione, che consiste nel sottrarre la medesima espressione per $p^2 \approx m^2$; si ha cosí, in definitiva,

$$\delta\mathcal{G}^{-1} = \frac{e^2}{4\pi}\hat{p}\ln\frac{p^2}{m^2}.$$

Questa espressione si elide esattamente con la differenza $\mathcal{G}^{-1} - G^{-1}$ della (116,11).

Soffermiamoci, infine, sul problema delle cause che portano necessariamente all'introduzione di una « massa » finita del fotone λ nella regolarizzazione dell'integrale (116,2), strettamente connessa al suo comportamento per $p^2 \to m^2$.

Notiamo, innanzitutto, che di per se stesso questo integrale con $\lambda = 0$ è finito per $p^2 = m^2$ (per rimuovere la divergenza per grandi k, inessenziale sotto questo aspetto, supponiamo qui che l'integrazione sia estesa ad una regione grande ma finita dello spazio k). La necessità di introdurre λ sorge al momento della sottrazione dell'integrale di rinormalizzazione che, altrimenti, divergerebbe per $p^2 = m^2$. Chiariamo, perciò, come si comporterebbe l'operatore di massa non regolarizzato per $p^2 \to m^2$. Poiché questo comportamento dipende sensibilmente dalla scelta del gauge, consideriamo il caso generale di un gauge arbitrario (mentre l'integrale (116,2) è scritto già nel gauge determinato (116,13)) .

Usiamo di nuovo la trasformazione (102,16). Rappresentando $\delta d^{(l)}$ nella forma

$$\delta d^{(l)}(q) = \frac{\delta D^{(l)}}{q^2} = \frac{4\pi}{(q^2)^2}\,\delta a\,(q^2), \tag{116,14}$$

supporremo δa una variazione della funzione $a\,(q^2)$, che varia sensibilmente solo su intervalli $q^2 \sim m^2$ e finita per $q^2 \approx m^2$. Nell'espressione integranda del membro destro della (102,16), nella differenza $\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p-q)$ per piccoli q i due termini hanno valori vicini tra loro e l'integrale converge. Notando che per piccoli q

$$\mathcal{G}(p-q) \sim \frac{1}{p^2 - m^2 - 2pq},$$

si vede che $\mathcal{G}(p-q)$ può essere trascurato rispetto a $\mathcal{G}(p)$ per $q \gg (p^2 - m^2)/m$. Invece, l'integrale

$$\delta\mathcal{G}(p) = ie^2\mathcal{G}(p)\int \delta d^{(l)}(q)\,\frac{d^4q}{(2\pi)^4} = -\frac{e^2}{4\pi}\,\mathcal{G}(p)\int \delta a\,(q^2)\,\frac{d(-q^2)}{-q^2}$$

diverge logaritmicamente nella regione

$$\frac{(p^2-m^2)^2}{m^2} \ll q^2 \ll m^2.$$

Con precisione logaritmica abbiamo quindi

$$\frac{\delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = -\frac{e^2}{2\pi}\,\delta a\,(m^2)\ln\frac{m^2}{p^2-m^2}.$$

Questa uguaglianza può essere integrata. Notando che per $\alpha \equiv e^2 \to 0$ il propagatore esatto $\mathcal{G}$ deve coincidere con il propagatore delle particelle libere G, otteniamo

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{\hat{p}-m}\left(\frac{m^2}{p^2-m^2}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}(C-a_0)}, \tag{116,15}$$

dove $a_0 = a(m^2)$, e C è una certa costante. Per determinare quest'ultima confrontiamo l'espressione

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\hat{p} - m)\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}(C - a_0)\ln\rho\right], \qquad (116,16)$$

che si ottiene dalla (116,15) nella prima approssimazione in α, con l'analoga espressione che si ottiene dall'integrale (116,2) per $\lambda = 0$[1]):

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\hat{p} - m)\left[1 + \frac{\alpha}{\pi}\ln\rho\right]. \qquad (116,17)$$

Secondo la definizione (116,14) la funzione $a(q^2)$ coincide con il rapporto $D^{(l)}/D$. Perciò il gauge (116,13), in cui è scritta la (116,17), corrisponde ad $a = a_0 = 1$. Esigendo che la (116,16) e la (116,17) coincidano per questo valore di a_0, si ottiene $C = 3$.

In tal modo, troviamo il seguente limite (*espressione asintotica infrarossa*) per il propagatore elettronico per $p^2 \to m^2$:

$$\mathcal{G}(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}\left(\frac{m^2}{p^2 - m^2}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}(3 - a_0)} \qquad (116,18)$$

(*A. A. Abrikossov*, 1955)[2]).

Il propagatore normalizzato deve avere per $p^2 = m^2$ un polo semplice. Noi vediamo che la (116,18) soddisfa questa condizione solo nel gauge in cui

$$D^{(l)} = 3D \qquad (116,19)$$

(e quindi $a_0 = 3$). In questo caso la regolarizzazione dell'integrale di Feynman (che ha come scopo di rimuovere la divergenza nei limiti superiori d'integrazione) non richiede l'introduzione di una « massa » finita del fotone. Negli altri gauges, invece, il fatto che la massa del fotone sia nulla porta alla comparsa, per $p^2 = m^2$, di un punto di diramazione invece che di un polo semplice, e la rimozione di questo « difetto » richiede l'introduzione del parametro finito λ.

§ 117. *Emissione di fotoni molli di massa non nulla*

Nel calcolo dei fattori di forma nel § 114 abbiamo incontrato il problema della divergenza degli integrali per frequenze basse dei

[1]) Per ottenere la (116,17) non è necessario eseguire di nuovo i calcoli. Il termine $\sim \ln\rho$ nella (116,9) è stato ottenuto proprio supponendo $\rho \gg \lambda$, supposizione che permette il passaggio al limite $\lambda \to 0$. Il termine $\sim \ln(\lambda/m)$, invece, compare in seguito alla sottrazione dell'integrale normalizzato e manca nell'integrale originario (116,2). Questa sottrazione non interessa, come è facile vedere, i termini $\sim \ln\rho$.

[2]) La validità di questa formula richiede unicamente che valgano le disuguaglianze $\alpha \ll 1$, $|\ln\rho| \gg 1$, mentre le formule della teoria delle perturbazioni richiederebbero anche $\alpha/2\pi\,|\ln\rho| \ll 1$.

Notiamo anche che il segno della differenza $p^2 - m^2$ è qui inessenziale, poiché la parte immaginaria dell'espressione (116,18) verrebbe comunque a trovarsi oltre i limiti della sua precisione.

fotoni virtuali. Questa divergenza è strettamente connessa con la catastrofe infrarossa già discussa nel § 95. In quella sede si è detto che la sezione d'urto di qualsiasi processo cui partecipano particelle cariche (ivi compresa la diffusione di un elettrone in un campo esterno, rappresentata da un diagramma del tipo (114,1)) non ha senso di per se stessa, ma solo se si tiene contemporaneamente conto dell'emissione di un numero qualsiasi di fotoni molli. Come sarà chiarito dettagliatamente piú avanti (§ 119), nella sezione d'urto totale, che tiene conto anche dell'emissione di fotoni molli, tutte le divergenze si elidono. Ovviamente, in questo caso, per ottenere un risultato corretto, il « troncamento » degli integrali divergenti deve essere eseguito allo stesso modo in tutte le sezioni d'urto che vengono sommate.

Nel § 114 questo troncamento venne eseguito mediante l'assegnazione di una massa fittizia finita λ al fotone virtuale. Di conseguenza, noi dobbiamo ora cambiare la forma anche delle formule ottenute nel § 95 in modo tale che esse descrivano l'emissione di « fotoni » molli di massa non nulla.

Da un punto di vista formale un fotone di questo genere va riferito alle particelle « vettoriali » a spin 1, delle quali abbiamo esaminato il campo libero nel § 14. Esse sono descritte da un 4-vettore ψ_μ, che nella rappresentazione della seconda quantizzazione ha la forma

$$\psi_\mu = \sqrt{4\pi} \sum_{k\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(c_{k\alpha} e_\mu^{(\alpha)} e^{-ikx} + c_{k\alpha}^+ e_\mu^{(\alpha)*} e^{ikx}\right), \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3 \qquad (117,1)$$

(dove, rispetto alla (14,14), sono state cambiate le notazioni in modo da adattarle al caso fotonico).

L'interazione dei « fotoni » (117,1) con elettroni va descritta mediante un lagrangiano dello stesso tipo di quella che si ha per fotoni veri:

$$-e j^\mu \psi_\mu \qquad (117,2)$$

(con la sostituzione del potenziale A_μ con ψ_μ). Allora le ampiezze dei processi di emissione di fotoni di massa finita si otterranno mediante le regole ordinarie della tecnica dei diagrammi, con la differenza che in questo caso

$$k^2 = \lambda^2. \qquad (117,3)$$

e la sommatoria sulle polarizzazioni del fotone emesso va eseguita rispetto a tre polarizzazioni indipendenti (due trasversali e una longitudinale) in luogo delle due per il caso di un fotone normale.

La matrice densità di una particella vettoriale non polarizzata è facile da ottenere usando la condizione

$$ke = 0, \quad ee^* = -1 \qquad (117,4)$$

(cfr. le (14,12-13)). Scrivendo la matrice cercata nella forma

$$\rho_{\mu\nu} = \overline{e_\mu e_\nu^*} = a g_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu$$

e ricavando a e b dalle condizioni (117,4), otteniamo

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2}\right). \tag{117,5}$$

Il numeratore del propagatore di particelle vettoriali possiede una struttura simile alla (117,5):

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2-\lambda^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2}\right).$$

Tuttavia, in virtú dell'invarianza di gauge, le ampiezze dei processi reali di diffusione non dipendono dalla parte longitudinale del propagatore fotonico, e questa proprietà non è connessa con la forma specifica della sua parte trasversale. Di conseguenza, il secondo termine tra parentesi di fatto scompare, e rimane un'espressione dello stesso tipo di quella che si ha per i fotoni ordinari:

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2-\lambda^2} g_{\mu\nu}$$

(che noi abbiamo usato nei paragrafi 114, 116).

Passiamo ora all'emissione di fotoni molli (nel senso spiegato nel § 95).

La deduzione fatta nel § 95 delle formule (95,5-6) resta valida anche per il caso ora considerato, con la sola differenza che, nello sviluppo dei quadrati $(p \pm k)^2$, nei denominatori dei propagatori elettronici compare anche il termine $k^2 = \lambda^2$. Di conseguenza, invece della (95,6) otteniamo

$$d\sigma = d\sigma_{\text{el}} \cdot e^2 \left| \frac{p'e}{p'k+\lambda^2/2} - \frac{pe}{pk-\lambda^2/2} \right|^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega},$$

dove $d\sigma_{\text{el}}$ è la sezione d'urto del medesimo processo senza l'emissione del quanto molle (chiameremo convenzionalmente tale processo « elastico »)[1]. Nel seguito, nelle integrazioni in d^3k saranno essenziali i valori $|k| \sim \lambda$. In questo caso $p'k \sim pk \gg \lambda^2$, e quindi nei denominatori si potranno trascurare i termini λ^2. Per eseguire la sommatoria sulle polarizzazioni del fotone si usa la (117,5) (si calcola la media e successivamente si moltiplica per 3). Trascurando allora i termini in λ^2 il secondo termine nella (117,5) non dà alcun con-

---

[1]) Nel § 95 la sezione d'urto $d\sigma_{\text{el}}$ era indicata come $d\sigma_0$.

tributo nella sezione d'urto, e rimane[1])

$$d\sigma = -d\sigma_{\text{el}} \cdot e^2 \left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right)^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega}. \tag{117,6}$$

In tal modo, si ritorna alla formula (95,7), nella quale, tuttavia, occorre intendere ω come

$$\omega = \sqrt{k^2 + \lambda^2}. \tag{117,7}$$

La formula (117,6) ha carattere generale assoluto. Essa è applicabile sia alla diffusione elastica che anelastica, e perfino al caso in cui cambia il tipo di particelle. Il risultato della successiva integrazone in d^3k dipende dai 4-vettori p e p', in altre parole, dal carattere del processo fondamentale di diffusione.

Esaminiamo il caso della diffusione elastica, quando

$$|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}'|, \quad \varepsilon = \varepsilon',$$

e troviamo la probabilità totale di emissione di fotoni di frequenza inferiore ad una certa frequenza $\omega_{\max}$ determinata dalla relazione

$$\lambda \ll \omega_{\max} \ll m. \tag{117,8}$$

Stimiamo, innanzitutto, l'integrale in d^3k nel limite non relativistico. Per $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}'| \ll m$ abbiamo

$$\left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right)^2 \approx \frac{(\boldsymbol{q}\boldsymbol{k})^2}{m^2\omega^4} - \frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2\omega^2}$$

($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$). L'integrazione di questa espressione sulle direzioni di $\boldsymbol{k}$ dà

$$\frac{4\pi \boldsymbol{q}^2}{m^2\omega^2} \left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{3\omega^2} - 1 \right).$$

Ricaviamo poi dalla (117,6)

$$d\sigma = d\sigma_{\text{el}} \cdot \frac{e^2 \boldsymbol{q}^2}{\pi m^2} \int\limits_0^{\omega = \omega_{\max}} \left[1 - \frac{\boldsymbol{k}^2}{3(\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2)} \right] \frac{\boldsymbol{k}^2 d|\boldsymbol{k}|}{(\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2)^{3/2}}$$

ovvero, integrando nell'ipotesi $\omega_{\max}/\lambda \gg 1$,

$$d\sigma = d\sigma_{\text{el}} \cdot \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2} \left(\ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} - \frac{5}{6} \right), \quad \boldsymbol{q}^2 \ll m^2. \tag{117,9}$$

---

[1]) A prima vista potrebbe sorgere un dubbio circa la legittimità del fatto di trascurare λ^2 prima di avere eseguito la media, a causa della presenza di λ^2 nel denominatore del secondo termine nella (117,5). È facile, tuttavia, convincersi direttamente che questo termine nella media dà un contributo $\sim \lambda^4 \frac{1}{\lambda^2}$, che può quindi essere trascurato.

Nel caso generale relativistico per la stima dell'integrale usiamo la formula (127,4). Integrando sugli angoli abbiamo

$$I = \int \frac{do_k}{(pk)(p'k)} = \int_0^1 dx \int \frac{do_k}{[(pk)x + (p'k)(1-x)]^2}$$

oppure, sviluppando i prodotti scalari con $p = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$, $p' = (\varepsilon, \boldsymbol{p}')$,

$$I = \int_0^1 dx \int \frac{do_k}{\{\varepsilon\omega - \boldsymbol{k}[\boldsymbol{p}x + \boldsymbol{p}'(1-x)]\}^2}.$$

Ora, l'integrale interno può essere facilmente calcolato in coordinate sferiche con l'asse polare diretto secondo il vettore $\boldsymbol{p}x + \boldsymbol{p}'(1-x)$, e quindi si può scrivere

$$I = \int_0^1 \frac{4\pi\, dx}{(\varepsilon\omega)^2 - [\boldsymbol{p}x + \boldsymbol{p}'(1-x)]^2 \boldsymbol{k}^2} = \int_0^1 \frac{4\pi\, dx}{[m^2 + \boldsymbol{q}^2 x(1-x)]\boldsymbol{k}^2 + \varepsilon^2\lambda^2}.$$

Gli altri due integrali (con $(pk)^2$ e $(p'k)^2$ nei denominatori) si ricavano da qui ponendo $\boldsymbol{q} = 0$. Notando inoltre che

$$pp' = \varepsilon^2 - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}' = m^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^2,$$

otteniamo

$$d\sigma = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\boldsymbol{k}^2 d|\boldsymbol{k}|}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{m^2 + 1/2\boldsymbol{q}^2}{[m^2 + \boldsymbol{q}^2 x(1-x)]\boldsymbol{k}^2 + \varepsilon^2\lambda^2} - \frac{m^2}{m^2\boldsymbol{k}^2 + \varepsilon^2\lambda^2} \right\}. \qquad (117,10)$$

L'integrazione in $d|\boldsymbol{k}|$ si riduce al calcolo di integrali del tipo

$$\int_0^{\omega_{\max}} \frac{\boldsymbol{k}^2 d|\boldsymbol{k}|}{(a\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2)\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2}} = \frac{1}{a} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{d|\boldsymbol{k}|}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2}} -$$
$$- \frac{\lambda^2}{a} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{d|\boldsymbol{k}|}{(a\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2)\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2}} \approx \frac{1}{a} \ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} -$$
$$- \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(az^2 + 1)\sqrt{z^2 + 1}}.$$

Nel secondo integrale è stata fatta la sostituzione $|\boldsymbol{k}| \to \lambda z$ e il limite superiore $(\omega_{\max}/\lambda)$ è stato sostituito con ∞, operazione, quest'ultima, legittima essendo l'integrale convergente.

Gli integrali in dx che compaiono in seguito nella (117,10) non possono essere espressi completamente attraverso funzioni elementari. Rappresentiamo il risultato nella forma

$$d\sigma = \alpha \left[K\left(\frac{|q|}{2m}\right) \ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} + K_1 \right] d\sigma_{\text{el}}, \tag{117,11}$$

dove[1])

$$K(\xi) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\xi^2+1}{\xi\sqrt{\xi^2+1}} \ln\left(\xi+\sqrt{\xi^2+1}\right) - 1\right], \tag{117,12}$$

$$K_1 = \frac{2\varepsilon}{\pi|p|} \ln \frac{\varepsilon+|p|}{m} - \frac{2m^2+q^2}{\pi\varepsilon^2} \int_0^1 \frac{dx}{a\sqrt{1-a}} \ln \frac{1+\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}},$$

$$a = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[m^2 + q^2 x(1-x)\right]. \tag{117,13}$$

Troviamo ora l'espressione asintotica per la sezione d'urto nel caso ultrarelativistico, supponendo non solo che $\varepsilon \gg m$ ma anche che $|q| \gg m$, cioè che l'angolo di diffusione non sia troppo piccolo. Con queste condizioni, nell'integrale (117,13) è essenziale la regione dei valori x nella quale $a \ll 1$; si ottiene allora

$$K_1 \approx \frac{q^2}{2\pi\varepsilon^2} \int_0^1 \frac{\ln a}{a}\, dx \approx \frac{1}{2\pi} \int \frac{\ln \frac{q^2}{\varepsilon^2} + \ln x + \ln(1-x)}{x(1-x)}\, dx.$$

L'integrale deve essere troncato per $a \sim 1$, cioè per $x \sim m^2/q^2$ dal basso e per $1 - x \sim m^2/q^2$ dall'alto. Quindi

$$K_1 \approx \frac{1}{2\pi}\left[2\ln\frac{q^2}{\varepsilon^2}\ln\frac{q^2}{m^2} - \ln^2\frac{q^2}{m^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\ln^2\frac{q^2}{m^2} - 4\ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{q^2}{m^2}\right].$$

Questa formula è valida con precisione fino ai quadrati dei logaritmi, o come si dice, con precisione *bilogaritmica*. Con questa precisione è sufficiente porre nel primo termine della (117,11)

$$K(\xi) \approx \frac{4}{\pi}\ln\xi \quad (\xi \gg 1).$$

---

[1]) Abbiamo già incontrato la funzione $K(\xi)$ nei problemi del § 95. Questo non deve meravigliare, poiché con precisione logaritmica la (117,11) può essere ottenuta integrando la sezione d'urto di emissione di fotoni di massa nulla in $d\omega$ nei limiti da λ a $\omega_{\max}$.

Se al posto di ξ introduciamo la variabile θ mediante la relazione $\xi = \operatorname{sh}\frac{\theta}{2}$, allora

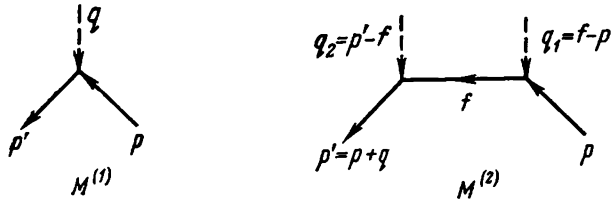
$$K(\theta) = \frac{2}{\pi}(\theta \operatorname{cth}\theta - 1). \tag{117,12a}$$

In definitiva abbiamo

$$d\sigma = \frac{2\alpha}{\pi}\left[\ln\frac{q^2}{m^2}\ln\frac{\omega_{\max}}{\lambda} - \ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{q^2}{m^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\ln^2\frac{q^2}{m^2}\right] d\sigma_{\text{el}}, \quad q^2 \gg m^2. \qquad (117,14)$$

§ 118. *Diffusione di un elettrone in un campo esterno in seconda approssimazione di Born*

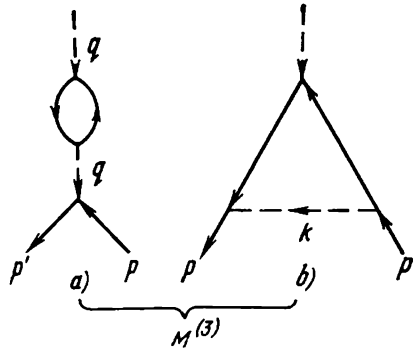
Nelle approssimazioni del primo e del secondo ordine rispetto al campo esterno la diffusione dell'elettrone è rappresentata dai diagrammi



(118,1)

Al primo di essi corrisponde l'ampiezza $M^{(1)} \sim Ze^2$, esaminata nel § 81. Al secondo ordine, invece, corrisponde l'ampiezza $M^{(2)} \sim (Ze^2)^2$.

È facile vedere che termini dello stesso ordine di grandezza provengono anche dalle correzioni radiative. Al terzo ordine della teoria delle perturbazioni le correzioni radiative all'ampiezza di diffusione sono rappresentate dai diagrammi



(118,2)

dove $M^{(3)} \sim Ze^2 \cdot e^2$, e se $Z \sim 1$, allora $M^{(3)} \sim M^{(2)}$.

In accordo con la (65,26) la sezione d'urto di diffusione è

$$d\sigma = |M_{fi}^{(1)} + M_{fi}^{(2)} + M_{fi}^{(3)}|^2 \frac{do'}{16\pi^2}. \qquad (118,3)$$

Nel quadrato dell'ampiezza che figura qui noi possiamo conservare, accanto a $|M_{fi}^{(1)}|^2$, anche tutti i termini d'interferenza tra $M_{fi}^{(1)}$ e $M_{fi}^{(2)}$

e tra $M_{fi}^{(1)}$ e $M_{fi}^{(3)}$. Quindi, all'ordine $\sim e^6$, la sezione d'urto è rappresentata dalla somma

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)} + d\sigma_{\text{rad}}, \tag{118,4}$$

dove $d\sigma^{(1)}$ è la sezione d'urto nella prima approssimazione di Born (§ 81), e gli altri termini sono correzioni

$$\begin{aligned} d\sigma^{(2)} &= 2\,\text{Re}\, M_{fi}^{(1)} M_{fi}^{(2)*} \frac{do'}{16\pi^2}, \\ d\sigma_{\text{rad}} &= 2\,\text{Re}\, M_{fi}^{(1)} M_{fi}^{(3)*} \frac{do'}{16\pi^2}. \end{aligned} \tag{118,5}$$

Ricordiamo che (§ 81)

$$M_{fi}^{(1)} = |e|\,(\bar{u}'\gamma^0 u)\,\Phi(q), \tag{118,6}$$

dove $\Phi(q)$ è la trasformata di Fourier del potenziale scalare del campo esterno costante ($\Phi \equiv A_0^{(e)}$) e dove si è tenuto conto del fatto che la carica dell'elettrone vale $e = -|e|$.

Le due espressioni (118,5) possono, ovviamente, essere calcolate indipendentemente. Esamineremo la prima di esse in questo paragrafo e rimandiamo l'esame della seconda al paragrafo seguente.

In seconda approssimazione l'ampiezza corrispondente al diagramma (118,1), è data dall'integrale[1])

$$M_{fi}^{(2)} = -e^2 \int \left\{ \bar{u}(p')\gamma^0 \frac{\hat{f}+m}{f^2-m^2+i0}\gamma^0 u(p) \right\} \times$$
$$\times\, \Phi(p'-f)\,\Phi(f-p)\,\frac{d^3f}{(2\pi)^3}. \tag{118,7}$$

I « 4-impulsi » del campo costante esterno $q_1 = f - p$ e $q_2 = p' - f$ non hanno componenti temporali. Perciò

$$f_0 = \varepsilon = \varepsilon', \tag{118,8}$$

dove ε e ε' sono l'energia iniziale e finale dell'elettrone, che coincidono se la diffusione è elastica.

Nel campo coulombiano puro di una carica fissa $Z\,|e|$:

$$\Phi(q) = \frac{4\pi Z\,|e|}{q^2}.$$

---

[1]) La regola 8 della tecnica grafica formulata nel § 78 necessita di una precisazione per il caso di un campo esterno costante (nel tempo). Precisamente, alla linea entrante del campo esterno si fa corrispondere la trasformata di Fourier tridimensionale del 4-potenziale

$$A^{(e)}(q) = \int A^{(e)}(r)\, e^{-iqr} d^3x.$$

Le leggi di conservazione nel vertice devono essere scritte tenendo presente che $q^\mu = (0, q)$ e che si deve integrare in $d^3q/(2\pi)^3$ su quei q' che restano indeterminati. L'ampiezza M_{fi} costruita secondo queste regole determina la sezione d'urto di diffusione definita dalla (65,25).

Per un tale potenziale l'integrale (118,7) diverge logaritmicamente (per $\boldsymbol{f} \approx \boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{f} \approx \boldsymbol{p}'$). Questa divergenza è peculiare del campo coulombiano ed è dovuta al fatto che esso decresce lentamente alle grandi distanze. Si può piú facilmente chiarirne l'origine sull'esempio del caso non relativistico. Secondo la III (135,8) il coefficiente dell'onda sferica $e^{i|\boldsymbol{p}|r}/r$ nell'espressione asintotica della funzione d'onda di un elettrone nel campo coulombiano ha la forma

$$f(\theta) \exp\left(-i \frac{Z\alpha m}{|\boldsymbol{p}|} \ln |\boldsymbol{p}| r\right).$$

Ma è proprio questo coefficiente che dà l'ampiezza di diffusione di un elettrone nel campo, e noi vediamo che la sua fase contiene un termine divergente (per $r \to \infty$). Sviluppando l'ampiezza di diffusione in potenze di $Z\alpha$, questo termine sarà la causa della divergenza di tutti i termini dello sviluppo a partire dal secondo (essendo la funzione stessa $f(\theta)$ proporzionale a $Z\alpha$). La situazione nel caso relativistico ha, naturalmente, carattere analogo.

Queste considerazioni mostrano però anche che i termini divergenti devono elidersi nella sezione d'urto di diffusione in cui la fase dell'ampiezza è inessenziale. La strada piú semplice da seguire per effettuare correttamente i calcoli consiste nel considerare dapprima la diffusione in un campo coulombiano schermato, porre cioè

$$\Phi(q) = \frac{4\pi Z |e|}{q^2 + \delta^2}, \tag{118,9}$$

dove δ è una piccola costante di schermaggio ($\delta \ll |\boldsymbol{p}|$). In tal modo viene eliminata la divergenza nell'ampiezza di diffusione, e nell'espressione finale per la sezione d'urto si potrà poi porre $\delta = 0$.

Portando la (118,9) nella (118,7) otteniamo

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi} Z^2 \alpha^2 \bar{u}(p') \left[(\gamma^0 \varepsilon + m) J_1 + \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{J}\right] u(p),$$

dove abbiamo introdotto le notazioni

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \frac{d^3 f}{[(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{f})^2 + \delta^2][(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{p})^2 + \delta^2][\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{f}^2 + i0]}, \\ \boldsymbol{J} &= \int \frac{\boldsymbol{f} d^3 f}{[(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{f})^2 + \delta^2][(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{p})^2 + \delta^2][\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{f}^2 + i0]} \equiv \frac{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}'}{2} J_2. \end{aligned} \tag{118,10}$$

Qui $\boldsymbol{p}^2 = \varepsilon^2 - m^2 = \boldsymbol{p}'^2$ e l'integrale $\boldsymbol{J}$ è simmetrico rispetto a $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p}'$; da considerazioni di simmetria vettoriale è a priori evidente che il vettore $\boldsymbol{J}$ deve essere diretto lungo $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}'$. Eliminando ora le matrici $\boldsymbol{\gamma}$ mediante le relazioni

$$\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{p} u = (\gamma^0 \varepsilon - m) u,$$
$$\bar{u}' \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{p}' = \bar{u}' (\gamma^0 \varepsilon - m),$$

otteniamo

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi} Z^2\alpha^2 \bar{u}(p')\,[\gamma^0\varepsilon(J_1+J_2)+m(J_1-J_2)]\,u(p). \qquad (118,11)$$

Continuiamo i calcoli passando preventivamente (come già fatto nel § 81) dalle ampiezze bispinoriali u e u' ai corrispondenti spinori tridimensionali w e w'. Effettuando direttamente la moltiplicazione troviamo

$$\bar{u}'u = w'^*\{(\varepsilon+m)-(\varepsilon-m)\cos\theta + i\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma}(\varepsilon-m)\operatorname{sen}\theta\}\,w,$$

$$\bar{u}'\gamma^0 u = w'^*\{(\varepsilon+m)+(\varepsilon-m)\cos\theta - i\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma}(\varepsilon-m)\operatorname{sen}\theta\}\,w,$$

dove

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}, \quad \boldsymbol{n}' = \frac{\boldsymbol{p}'}{|\boldsymbol{p}'|}, \quad \cos\theta = \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}'.$$

Allora l'ampiezza (118,11) è rappresentabile nella forma[1])

$$M_{fi}^{(2)} = 4\pi w'^*(A^{(2)} + B^{(2)}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma})\,w,$$

$$A^{(2)} = -\frac{1}{2\pi^2} Z^2\alpha^2\{[(\varepsilon+m)+(\varepsilon-m)\cos\theta]\,\varepsilon(J_1+J_2)+$$
$$+[(\varepsilon+m)-(\varepsilon-m)\cos\theta]\,m(J_1-J_2)\},$$

$$B^{(2)} = \frac{}{2\pi^2} Z^2\alpha^2(\varepsilon-m)\operatorname{sen}\theta\,[\varepsilon(J_1+J_2)-m(J_1-J_2)]. \qquad (118,12)$$

L'ampiezza di diffusione in prima approssimazione, in notazioni analoghe, ha la forma

$$M_{fi}^{(1)} = 4\pi w'^*(A^{(1)} + B^{(1)}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma})\,w,$$

$$A^{(1)} = \frac{Z\alpha}{q^2}[(\varepsilon+m)+(\varepsilon-m)\cos\theta], \qquad (118,13)$$

$$B^{(1)} = -i\frac{Z\alpha}{q^2}(\varepsilon-m)\operatorname{sen}\theta,$$

dove $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$.

La sezione d'urto di diffusione e gli effetti di polarizzazione si esprimono attraverso le quantità $A = A^{(1)} + A^{(2)}$ e $B = B^{(1)} + B^{(2)}$ mediante le formule ricavate nel III, § 140. Cosí, la sezione d'urto di diffusione di elettroni non polarizzati vale

$$d\sigma = (|A|^2 + |B|^2)\,do' \approx d\sigma^{(1)} + 2\,(A^{(1)}\operatorname{Re}A^{(2)} - iB^{(1)}\operatorname{Im}B^{(2)})\,do'.$$

Dopo la sostituzione delle (118,12-13), un semplice calcolo dà

$$d\sigma^{(2)} = -do'\,\frac{Z^3\alpha^3\varepsilon^3}{\pi^2 p^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\times$$

$$\times\left[\left(1-v^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{Re}(J_1+J_2)+\frac{m^2}{\varepsilon^2}\operatorname{Re}(J_1-J_2)\right], \qquad (118,14)$$

[1]) La definizione delle quantità A e B corrisponde qui alla definizione data nel § 37, e nel III, § 140 e differisce per un fattore moltiplicativo dalla definizione del § 81.

dove $v = |\boldsymbol{p}|/\varepsilon$ è la velocità dell'elettrone, θ l'angolo di diffusione. In conseguenza della diffusione gli elettroni si polarizzano e il vettore polarizzazione degli elettroni finali è

$$\zeta' = \frac{2\,\mathrm{Re}\,(AB^*)}{|A|^2+|B|^2}\,\boldsymbol{\nu} \approx \frac{2\,(A^{(1)}\,\mathrm{Re}\,B^{(2)} - iB^{(1)}\,\mathrm{Im}\,A^{(2)})}{|A^{(1)}|^2+|B^{(1)}|^2}\,\boldsymbol{\nu}$$

oppure, sostituendovi le (118,12-13),

$$\zeta' = \frac{4Z\alpha m p^4}{\pi^2\varepsilon^2}\,\frac{\mathrm{sen}^3\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1-v^2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{Im}\,(J_1-J_1)\,\boldsymbol{\nu}. \qquad (118,15)$$

Passiamo ora a valutare gli integrali J_1 e J_2. Questo calcolo viene facilitato dall'applicazione del metodo di parametrizzazione in base alla formula (127,2). L'integrale J_1 assume la forma

$$J_1 = -2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{d^3f\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\cdot\delta\,(1-\xi_1-\xi_2-\xi_3)}{\{[(p'-f)^2+\delta^2]\,\xi_1+[(p-f)^2+\delta^2]\,\xi_2+[f^2-p^2-i0]\,\xi_3\}^3}.$$

L'integrazione in $d\xi_3$ elimina la funzione delta; raggruppando i termini nel denominatore otteniamo

$$J_1 = -2\int_0^1\int_0^{1-\xi_2} \frac{d^3f\,d\xi_1\,d\xi_2}{\{\delta^2(\xi_1+\xi_2)+p^2(2\xi_1+2\xi_2-1)-2f\,(\xi_1 p'+\xi_2 p)+f^2-i0\}^3}.$$

Introducendo, in luogo di f, la nuova variabile $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{f} - \xi_1\boldsymbol{p}' - \xi_2\boldsymbol{p}$, riconduciamo l'integrazione in d^3f ad un integrale del tipo

$$\int \frac{d^3k}{(k^2-a^2-i0)^3} = i\,\frac{\pi^2}{4a^3},$$

e quindi

$$J_1 = -\frac{i\pi^2}{2}\int_0^1\int_0^{1-\xi_2} \frac{d\xi_1\,d\xi_2}{\{p^2(\xi_1^2+\xi_2^2-2\xi_1-2\xi_2+1)+2\xi_1\xi_2 pp'-\delta^2(\xi_1+\xi_2)-i0\}^{3/2}}.$$

In luogo di ξ_1 e ξ_2 introduciamo le combinazioni simmetriche: $x = \xi_1 + \xi_2$, $y = \xi_1 - \xi_2$. L'integrazione in dy (nei limiti da 0 a x) è elementare e dà

$$J_1 = -\frac{i\pi^2}{2\,|p|^3}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\left[bx^2-2x+1-\frac{\delta^2}{p^2}\,x-i0\right]\left[(1-x)^2-\frac{\delta^2}{p^2}\,x-i0\right]^{1/2}},$$

dove

$$b = \frac{p^2+pp'}{2p^2} = \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Per valutare l'integrale in dx per $\delta \to 0$, dividiamo la regione d'integrazione in due parti:

$$\int_0^1 \ldots dx = \int_0^{1-\delta_1} \ldots dx + \int_{1-\delta_1}^1 \ldots dx, \quad 1 \gg \delta_1 \gg \frac{1}{|p|}.$$

Nel primo integrale possiamo porre $\delta = 0$; allora[1])

$$\int_0^{1-\delta_1} \ldots dx = \frac{1}{2(1-b)} \ln \frac{(1-x)^2}{(bx^2-2x+1-i0)} \Big|_0^{1-\delta_1} =$$

$$= \frac{1}{2(1-b)} \left[\ln \frac{\delta_1^2}{1-b} + i\pi \right].$$

Nel secondo integrale, invece, si può porre $x = 1$ ovunque, all'infuori del termine $(1-x)^2$, e si può inoltre porre $\delta = 0$ nella prima parentesi nel denominatore. In tal modo[2])

$$\int_{1-\delta_1}^1 \ldots dx = -\frac{1}{1-b} \int_0^{\delta_1} \frac{dx'}{\left(x'^2 - \frac{\delta^2}{p^2} - i0\right)^{1/2}} =$$

$$= -\frac{1}{1-b} \left[\int_{\delta/|p|}^{\delta_1} \frac{dx'}{\left(x'^2 - \frac{\delta^2}{p^2}\right)^{1/2}} + i \int_0^{\delta/|p|} \frac{dx'}{\left(\frac{\delta^2}{p^2} - x'^2\right)^{1/2}} \right] =$$

$$= -\frac{1}{1-b} \left[\ln \frac{2|p|\delta_1}{\delta} + i\frac{\pi}{2} \right].$$

Nella somma dei due integrali la quantità δ_1, come doveva essere, si elide e si ottiene

$$J_1 = \frac{i\pi^2}{2|p|^3 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \ln \left(\frac{2|p|}{\delta} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right). \tag{118,16}$$

L'integrale J_2 si calcola in modo analogo e vale

$$J_2 = J_1 - \frac{\pi^3 \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right)}{4|p|^3 \cos^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} - \frac{i\pi^2}{2|p|^3 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \ln \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}. \tag{118,17}$$

---

[1]) La regola di aggiramento (il termine $i0$) permette di determinare la variazione dell'argomento dell'espressione sotto il simbolo di logaritmo nel passaggio da 0 a $1 - \delta_1$: nell'aggiramento dal basso del punto di diramazione l'argomento varia da 0 a $-\pi$.

[2]) Anche qui la regola di aggiramento determina il segno della radice nel passaggio dai valori positivi a quelli negativi dell'espressione sotto il segno di radice.

Per ottenere i risultati definitivi rimane da sostituire queste espressioni nelle (118,14-15); troviamo cosí[1]:

$$d\sigma^{(2)} = \frac{\pi (Z\alpha)^3 \varepsilon}{4 |p|^3 \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right) do', \tag{118,18}$$

$$\zeta' = \frac{2Z\alpha m |p|}{\varepsilon^2} \frac{\operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2} \ln \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\left(1 - v^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2}} \mathbf{v}. \tag{118,19}$$

Nella prima approssimazione di Born le sezioni d'urto di diffusione di un elettrone e di un positrone (in uno stesso campo) sono uguali. In seconda approssimazione questa simmetria viene a mancare. Per la diffusione di un positrone (carica $+ |e|$) l'ampiezza in prima approssimazione (118,6) ha il segno opposto, mentre $M_{fi}^{(2)}$ non cambia. Perciò la sezione d'urto $d\sigma^{(2)}$, che rappresenta il termine d'interferenza tra $M_{fi}^{(1)}$ e $M_{fi}^{(2)}$, cambierà di segno. Lo stesso accadrà con l'espressione (118,19) per il vettore polarizzazione. Piú in generale, il passaggio dalle formule per la diffusione di un elettrone alle formule per la diffusione di un positrone può essere eseguito mediante la sostituzione formale $Z \to -Z$.

§ 119. *Correzioni radiative alla diffusione di un elettrone in un campo esterno*

Occupiamoci ora del calcolo delle correzioni radiative alla diffusione di un elettrone in un campo esterno (*J. Schwinger*, 1949).

La parte corrispondente dell'ampiezza di diffusione è rappresentata dai diagrammi (118,2). Il primo di essi dà all'ampiezza il contributo

$$-(\bar{u}'\gamma^0 u) \frac{\mathcal{P}(-q^2)}{4\pi} D(-q^2) \cdot e\Phi(q),$$

dove $\mathcal{P}(-q^2)$ è l'operatore di polarizzazione relativo al cappio nel diagramma stesso. Il contributo del secondo diagramma è

$$-(\bar{u}'\Lambda^0 u)\, e\Phi(q),$$

dove Λ^0 è il termine correttivo nell'operatore di vertice ($\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Lambda^\mu$); secondo la (113,6)

$$\Lambda^0 = \gamma^0 [f(-q^2) - 1] - \frac{1}{2m} \sigma^{0\nu} q_\nu g(-q^2).$$

---

[1]) I risultati esatti vennero ottenuti per la prima volta da *W. A. McKinley* e *H. Feshbach* (1948) sulla base delle espressioni esatte degli sfasamenti parziali di diffusione. Il calcolo secondo la teoria delle perturbazioni venne eseguito da *R. H. Dalitz* (1950).

Sommando i contributi dei due diagrammi, otteniamo[1])

$$M_{fi}^{(3)} = -(\bar{u}'\gamma^0 Q_{\text{rad}} u)\, e\Phi(q),$$

$$Q_{\text{rad}}(q) = f(-q^2) - 1 - \frac{1}{q^2}\mathcal{F}(-q^2) + \frac{1}{2m} g(-q^2)\, q\gamma. \quad (119,1)$$

Esaminiamo innanzitutto il problema della divergenza infrarossa contenuta nel fattore di forma $f(-q^2)$ e quindi presente anche nell'ampiezza di diffusione (119,1).

È stato già detto (§ 95) che l'ampiezza esatta della diffusione elastica pura è di per se stessa nulla, cioè non ha senso. Un senso fisico è posseduto solo dall'ampiezza di diffusione definita come un processo in cui può venire emesso un numero qualsiasi di fotoni molli di energia minore di un certo valore dato $\omega_{\max}$, per il quale vale la relazione

$$\omega_{\max} \ll m.$$

In altre parole ha un senso solo la somma

$$d\sigma = d\sigma_{\text{el}} + d\sigma_{\text{el}} \int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega + d\sigma_{\text{el}} \frac{1}{2!} \int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_1} \int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_2} + \ldots, \quad (119,2)$$

dove $d\sigma_{\text{el}}$ è la sezione d'urto di diffusione senza emissione di fotoni, e dw_ω è la probabilità differenziale che un elettrone emetta un fotone di frequenza ω. Qui si suppone che $d\sigma_{\text{el}}$ venga calcolato sotto forma di serie perturbativa, cioè sotto forma di sviluppo in potenze di α[2]). Allora, dopo il raggruppamento di tutti i termini dello stesso ordine in α, da tutti i termini della (119,2) noi otterremo $d\sigma$ in forma di sviluppo secondo α, in cui ogni termine sarà finito.

Nella prima approssimazione di Born $d\sigma_{\text{el}} \sim \alpha^2$. Questo termine, naturalmente, ha un senso di per se stesso. Se, invece, noi vogliamo tenere conto anche della correzione successiva in $d\sigma_{\text{el}}$ (termine $\sim\alpha^3$) allora occorre prendere anche il secondo termine della somma (119,2): essendo $dw_\omega \sim \alpha$, moltiplicando quest'ultimo per $d\sigma_{\text{el}} \sim \alpha^2$ si ottiene anche da qui una quantità $\sim\alpha^3$. Mostriamo che sommando queste due quantità la divergenza infrarossa viene eliminata.

---

[1]) Nell'eseguire le trasformazioni ricordare che se $q^\mu = (0, q)$, allora $q_\mu = (0, -q)$! Perciò $\sigma^{0\nu} q_\nu = -\gamma^0 q\gamma$.

[2]) Per quanto riguarda la probabilità dw_ω, la necessità di tenere conto delle correzioni radiative dipende dalla quantità $\omega_{\max}$; il limite $\omega \to 0$ corrisponde al caso classico, in cui le correzioni radiative scompaiono; perciò con la scelta di un $\omega_{\max}$ sufficientemente piccolo le si può sempre rendere piccole.

Il termine divergente nel fattore di forma f ha, secondo la (114,17), la forma[1])

$$-\frac{\alpha}{2} K \left(\frac{|q|}{2m}\right) \ln \frac{m}{\lambda}.$$

Il termine corrispondente nell'ampiezza (119,1) è

$$\frac{\alpha}{2} K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot (\bar{u}'\gamma^0 u)\, e\Phi(q),$$

e nella sezione d'urto di diffusione (118,5)

$$d\sigma^{\text{infrar}} = -\alpha K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot |\bar{u}'\gamma^0 u|^2 \, |e\Phi(q)|^2 \frac{do'}{16\pi^2}.$$

Confrontando questa espressione con la sezione d'urto di Born

$$d\sigma^{(1)} = |\bar{u}'\gamma^0 u|^2 \, |e\Phi(q)|^2 \frac{do'}{16\pi^2},$$

troviamo che

$$d\sigma^{\text{infrar}} = -\alpha K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot d\sigma^{(1)}. \tag{119,3}$$

D'altra parte, il secondo termine nella (119,2), in cui $\int dw_\omega$ è sostituito con la (117,11), dà

$$d\sigma_{\text{el}} \int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega = \alpha K \ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} \cdot d\sigma^{(1)}. \tag{119,4}$$

Infine, sommando la (119,3) con la (119,4), otteniamo

$$-d\sigma^{(1)} \cdot \alpha K \left(\frac{|q|}{2m}\right) \ln \frac{m}{2\omega_{\max}}. \tag{119,5}$$

Noi vediamo che il contributo divergente proveniente dai fotoni virtuali molli ($|\boldsymbol{k}| \sim \lambda$) si elide effettivamente con il contributo proveniente dall'emissione di fotoni reali dello stesso tipo. Una situazione simile ha luogo in qualsiasi altro processo di diffusione.

Nel contempo si manifesta una dipendenza della sezione d'urto di diffusione da $\omega_{\max}$. Questa dipendenza è una conseguenza del fatto che la quantità $\omega_{\max}$ entra nella definizione stessa della diffusione, intesa come processo nel quale può venire emesso un numero qualsiasi di fotoni molli. È naturale che la sezione d'urto di tale processo sarà tanto piú piccola quanto piú basso sarà il limite $\omega_{\max}$

---

[1]) Di questo è facile convincersi usando la relazione

$$\frac{|q|}{m} = \frac{1-\xi}{\sqrt{\xi}}$$

tra $|q|$ e la variabile ξ, attraverso la quale è espressa la (114,17).

che noi poniamo alle frequenze dei fotoni, che vengono emessi nel dato processo di diffusione.

Troviamo ora l'espressione completa della correzione radiativa alla sezione d'urto di diffusione. Procedendo secondo le regole standard (vedi la (66,7)), per la sezione d'urto, mediata sulle polarizzazioni dell'elettrone finale, si trova

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma_{\text{rad}} = |e\Phi(q)|^2 \operatorname{Tr}\{(\hat{p}' + m)(\gamma^0 + \gamma^0 Q_{\text{rad}}) \times \\ \times (\hat{p} + m)(\gamma^0 + \gamma^0 \bar{Q}_{\text{rad}})\} \frac{do'}{32\pi^2}. \qquad (119,6)$$

Secondo la (119,1),

$$Q_{\text{rad}} = a + b\gamma q, \qquad \bar{Q}_{\text{rad}} = \gamma^0 Q^+_{\text{rad}} \gamma^0 = a - b\gamma q,$$

$$a = f(-q^2) - 1 - \frac{1}{q^2}\mathcal{F}(-q^2), \quad b = \frac{2}{2m} g(-q^2).$$

Limitandoci ai termini lineari in a e b, la traccia nella (119,6) è uguale a

$$\frac{1}{4}\operatorname{Tr}\{\cdots\} = 2\left(\varepsilon^2 - \frac{q^2}{4}\right)(1 + 2a) - 2bmq^2.$$

Perciò

$$d\sigma_{\text{rad}} = 2\left\{f_\lambda(-q^2) - 1 - \frac{1}{q^2}\mathcal{F}(-q^2) - \frac{q^2}{4\varepsilon^2 - q^2} g(-q^2)\right\} d\sigma^{(1)}, \qquad (119,7)$$

dove $d\sigma^{(1)}$ è la sezione d'urto di diffusione di Born di elettroni non polarizzati (81,5); al fattore di forma f è stato apposto l'indice λ per ricordare che esso « è troncato rispetto alla massa del fotone λ ».

Rimane ora da aggiungere alla (119,7) la sezione d'urto di emissione di fotoni molli. Se rappresentiamo f_λ nella forma

$$f_\lambda(-q^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} K\left(\frac{|q|}{2m}\right) \ln\frac{m}{\lambda} + \alpha K_2, \qquad (119,8)$$

allora, secondo la (117,11), aggiungere questa sezione d'urto significa semplicemente sostituire nella (119,7) f_λ con

$$f_{\omega_{\max}} = 1 - \frac{\alpha}{2} K\left(\frac{|q|}{2m}\right) \ln\frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{\alpha}{2} K_1 + \alpha K_2. \qquad (119,9)$$

Con questa sostituzione la (119,7) dà il risultato definitivo.

Notiamo che nel limite non relativistico[1])

$$f_{\omega_{\max}} = 1 - \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{11}{24}\right), \quad q^2 \ll m^2. \qquad (119,10)$$

---

[1]) Questa espressione differisce dall'espressione non relativistica (114,20) per la sostituzione

$$\ln\lambda \to \ln 2\omega_{\max} - 5/6.$$

Prestiamo attenzione al fatto che la peculiarità del campo esterno entra nella correzione radiativa alla sezione d'urto solo per tramite di $d\sigma^{(1)}$; il fattore entro parentesi graffa nella (119,7), invece, ha carattere universale. Nell'approssimazione non relativistica

$$d\sigma_{\text{rad}} = -d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{19}{30} \right), \quad q^2 \ll m^2 \qquad (119,11)$$

(qui entrano i contributi di tutti i termini della (119,7)). Nel caso opposto, ultrarelativistico, invece, il contributo fondamentale è dato dal termine con $f_{\omega_{\max}} - 1$, e si ottiene

$$d\sigma_{\text{rad}} = -d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{q^2}{m^2} \ln \frac{\varepsilon}{\omega_{\max}}, \quad q^2 \gg m^2. \qquad (119,12)$$

In conclusione notiamo che le correzioni radiative qui esaminate non portano alla comparsa di effetti di polarizzazione di qualsiasi genere, nuovi rispetto alla prima approssimazione di Born (a differenza delle correzioni della seconda approssimazione di Born esaminate nel § 118). Ciò è dovuto al fatto che la peculiarità della prima approssimazione di Born è connessa, in ultima analisi, al carattere hermitiano della matrice S. Questa proprietà, tuttavia, si conserva anche se si tiene conto delle correzioni radiative, poiché in questa approssimazione mancano stati intermedi reali nel canale di diffusione (e quindi il secondo membro della relazione di unitarietà si annulla)[1]).

§ 120. *Spostamento radiativo dei livelli atomici*

Le correzioni radiative portano ad uno spostamento dei livelli energetici degli stati legati di un elettrone in un campo esterno (il cosiddetto *spostamento di Lamb*). Il caso piú interessante di questo genere è costituito dallo spostamento dei livelli dell'atomo di idrogeno (o di ioni idrogenoidi)[2]).

[1]) Il calcolo delle correzioni radiative a processi che compaiono solo nella seconda approssimazione della teoria delle perturbazioni è notevolmente piú complesso e noi non lo riporteremo in questo libro. Ci limiteremo qui a dare alcuni riferimenti: a) a correzioni radiative alla diffusione di un fotone su un elettrone: L. M. Brown, R. Feynman, Phys. Rev. 85, 231 (1952); b) all'annichilazione di una coppia in due fotoni: J. Harris, L. M. Brown, Phys. Rev. 105, 1656 (1957); c) alla diffusione elettrone-elettrone ed elettrone-positrone: M. Redhead, Proc. Roy. Soc. A220, 219 (1953); R. V. Polovin, ŻETF 31, 449 (1956); d) alla radiazione di frenamento: P. I. Fomin, ŻETF 35, 707 (1958).

[2]) Lo spostamento dei livelli dell'idrogeno venne calcolato per la prima volta con precisione logaritmica sulla base di un esame non relativistico da *H. A. Bethe* (1947); quel calcolo serví da spinta iniziale per tutto lo sviluppo successivo dell'elettrodinamica quantistica. La differenza tra i livelli $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$ venne per la prima volta calcolata esattamente (nella prima approssimazione non nulla della teoria delle perturbazioni) da *N. M. Kroll* e *W. E. Lamb* (1949), mentre la formula completa per lo spostamento di questi livelli fu trovata da *V. Weisskopf* e *J. B. French* (1949).

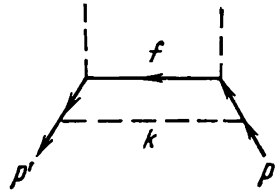
Il metodo corretto per calcolare le correzioni ai livelli energetici è basato sull'uso del propagatore elettronico esatto (§ 106). Ma se

$$Z\alpha \ll 1, \tag{120,1}$$

allora è piú comodo ricorrere ad un metodo piú semplice, in cui il campo esterno è considerato una piccola perturbazione.

Nell'approssimazione del primo ordine rispetto al campo esterno la correzione radiativa nell'interazione di un elettrone con un campo elettrico costante è descritta da quegli stessi due diagrammi (118,2), che noi abbiamo già esaminati in relazione al problema sulla diffusione di un elettrone in un campo di tal fatta; il passaggio da un problema all'altro richiede soltanto una semplice riformulazione (vedi piú avanti).

È facile comprendere, tuttavia, che in tal modo si può trovare solo quella parte dello spostamento del livello che è dovuta all'interazione con fotoni virtuali di frequenza sufficientemente alta. In effetti, consideriamo, ad esempio, la correzione radiativa successiva (rispetto al campo) all'ampiezza di diffusione di un elettrone:



(120,2)

(a differenza di (118,2,*b*) questo diagramma contiene due vertici del campo esterno). Nella regione di integrazione in d^4k, in cui k_0 è sufficientemente grande, questa correzione contiene una potenza in piú di $Z\alpha$ ed è perciò inessenziale. Ma l'introduzione nel diagramma di un secondo vertice del campo esterno introduce in esso anche un altro propagatore elettronico $G(f)$. Per piccoli k (e per terminali p e p' non relativistici) risultano essere importanti gli impulsi degli elettroni virtuali f prossimi al punto singolare del propagatore $G(f)$. Il piccolo denominatore che viene in tal modo a comparire compensa il piccolo fattore $Z\alpha$ in piú. Questo vale, evidentemente, per le correzioni a tutti gli ordini rispetto al campo esterno. In altre parole, nel campo delle piccole frequenze dei fotoni virtuali il campo esterno deve essere considerato esattamente.

Dividiamo lo spostamento cercato δE_s[1]) del livello in due parti:

$$\delta E_s = \delta E_s^{(\mathrm{I})} + \delta E_s^{(\mathrm{II})} \tag{120,3}$$

[1]) In questo paragrafo E_s designa l'energia dell'elettrone nell'atomo che non include la sua energia di quiete. L'indice s designa l'insieme dei numeri quantici che determinano lo stato dell'atomo.

dovute rispettivamente all'interazione con fotoni virtuali di frequenze che cadono nelle regioni I) $k_0 > \varkappa$, II) $k_0 < \varkappa$. Scegliamo $\varkappa$ in modo che

$$(Z\alpha)^2 m \ll \varkappa \ll m \tag{120,4}$$

($Z^2\alpha^2 m$ è l'ordine di grandezza dell'energia di legame dell'elettrone nell'atomo). Allora nella regione I sarà sufficiente tenere conto del campo del nucleo solo in prima approssimazione. Nella regione II, invece, occorre tenere conto del campo del nucleo in maniera esatta, ma, in compenso (in virtú della condizione $\varkappa \ll m$), si può risolvere il problema in approssimazione non relativistica non solo per quanto riguarda l'elettrone, ma anche per quanto riguarda tutti gli stati intermedi. Con la condizione (120,4) i domini di applicabilità dei due metodi di calcolo si sovrappongono; questo permette di eseguire una « saldatura » rigorosa delle due parti della correzione al livello.

Parte dello spostamento dovuta alle alte frequenze

Esaminiamo dapprima la regione I. Qui si può utilizzare la correzione all'ampiezza di diffusione (119,1), dalla quale, però, è necessario escludere preventivamente il contributo dovuto ai fotoni virtuali relativi alla regione II. Questi fotoni danno soltanto un piccolo contributo al fattore di forma g, il quale, di conseguenza, non necessita di cambiamenti. Alla funzione f, invece, i fotoni virtuali di piccola frequenza danno un contributo grande a causa della divergenza infrarossa. Perciò come funzione f nella (119,1) si può impiegare la funzione $f_\varkappa$, dalla quale è già stata esclusa la regione $k_0 < \varkappa$.

Questa esclusione potrebbe essere fatta direttamente, sottraendo da f l'integrale sulla regione $k_0 < \varkappa$. È, tuttavia, possibile ottenere il risultato necessario senza nuovi calcoli, utilizzando i risultati del § 119.

A tal fine, notiamo che l'esclusione delle frequenze $k_0 < \varkappa$ può considerarsi come uno dei possibili modi di troncamento nell'infrarosso. Il risultato per la correzione alla sezione d'urto di diffusione non può, ovviamente, dipendere dal modo in cui si opera il troncamento, alla condizione che in questo stesso modo venga troncata anche la probabilità di emissione di fotoni reali molli, cioè che nel concetto di diffusione « elastica » venga inclusa anche l'emissione di fotoni di frequenza compresa tra $\varkappa$ e il valore dato $\omega_{\max}$. Se prendiamo $\omega_{\max} = \varkappa$, diventa allora inutile tenere conto in maniera esplicita dell'emissione dei fotoni. Da qui risulta chiaro che $f_\varkappa$ si ottiene dalla funzione $f_{\omega_{\max}}$, definita nel § 119, con la semplice sostituzione di $\omega_{\max}$ con $\varkappa$. In particolare, nel caso non relativistico

$$f_\varkappa - 1 = -\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varkappa} + \frac{11}{24}\right). \tag{120,5}$$

Trasformiamo ora la correzione (119,1) all'ampiezza di diffusione rappresentandola come il risultato della corrispondente correzione all'energia potenziale efficace dell'elettrone nel campo. Confrontando l'ampiezza (119,1)

$$-e\,(u'^{*}\mathrm{Q}_{\mathrm{rad}}\Phi u)$$

con l'ampiezza di diffusione di Born (118,6)

$$-e\,(u'^{*}\Phi u),$$

vediamo che il ruolo di tale correzione è svolto (nella rappresentazione degli impulsi) dalla funzione

$$e\delta\Phi(\boldsymbol{q}) = e\mathrm{Q}_{\mathrm{rad}}(\boldsymbol{q})\,\Phi(\boldsymbol{q}). \tag{120,6}$$

Nel caso non relativistico, prendendo $\mathcal{F}$ e g rispettivamente dalla (110,14) e dalla (114,20), e sostituendo f con $f_{\varkappa}$ (120,5), otteniamo

$$\delta\Phi(\boldsymbol{q}) = \left\{-\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varkappa}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right)+\frac{\alpha}{4\pi m}\,\boldsymbol{q}\boldsymbol{\gamma}\right\}\Phi(\boldsymbol{q}). \tag{120,7}$$

La corrispondente funzione $\delta\Phi(\boldsymbol{r})$ nella rappresentazione delle coordinate ha la forma[1])

$$\delta\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varkappa}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right)\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) - i\,\frac{\alpha}{4\pi m}\,\boldsymbol{\gamma}\nabla\Phi(\boldsymbol{r}). \tag{120,8}$$

Troveremo lo spostamento del livello $\delta E_s^{(\mathrm{I})}$ mediando $e\delta\Phi(\boldsymbol{r})$ rispetto alla funzione d'onda dello stato imperturbato dell'elettrone nell'atomo, cioè come il corrispondente elemento di matrice diagonale[2]):

$$\delta E_s^{(\mathrm{I})} = \frac{e\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varkappa}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right)\langle s\,|\,\Delta\Phi\,|\,s\rangle - i\,\frac{e\alpha}{4\pi m}\,\langle s\,|\,\boldsymbol{\gamma}\nabla\Phi\,|\,s\rangle. \tag{120,9}$$

Nell'eseguire la media nel primo termine, è sufficiente usare la funzione d'onda non relativistica. Nel secondo termine, invece, tale approssimazione è insufficiente: l'approssimazione di ordine zero rispetto alle funzioni non relativistiche si annulla per la mancanza nelle matrici $\boldsymbol{\gamma}$ di elementi diagonali. Perciò qui occorre usare la

---

[1]) Sottolineiamo la differenza di questa correzione al potenziale dalla correzione considerata nel § 111. Quest'ultima includeva in sé solo l'effetto della polarizzazione nel vuoto (diagramma (118,2,*a*)) sul campo coulombiano in quanto tale. La correzione (120,8), invece, si riferisce già all'interazione del campo con l'elettrone e include in sé anche l'effetto dei cambiamenti del moto dell'elettrone (diagramma (118,2,*b*)).

[2]) Rigorosamente parlando, i fattori di forma determinati nel § 114 si riferivano all'operatore di vertice per due terminali elettronici liberi ($p^2 = p'^2 = m^2$). Per un elettrone nell'atomo, invece, l'energia E_s è un livello che non è, generalmente, in alcun modo connesso con $\boldsymbol{p}$. Questa differenza, tuttavia, nella regione I può essere trascurata.

funzione relativistica approssimata trovata nel § 33 $\psi = \binom{\varphi}{\chi}$, conservando in essa le piccole (in rappresentazione standard) componenti χ. Abbiamo

$$\psi^*\gamma\psi = \varphi^*\sigma\chi - \chi^*\sigma\varphi$$

e utilizzando la (33,4)

$$\chi = \frac{1}{2m}\,\sigma\mathbf{p}\varphi = -\frac{i}{2m}\,\sigma\nabla\varphi,$$

otteniamo

$$\langle s\,|\,\gamma\nabla\Phi\,|\,s\rangle = -\frac{i}{2m}\int\{\varphi^*(\sigma\nabla\Phi)(\sigma\nabla\varphi) + (\nabla\varphi^*\cdot\sigma)(\sigma\nabla\Phi)\,\varphi\}\,d^3x =$$

$$= \frac{i}{2m}\int\{\varphi^*\Delta\Phi\cdot\varphi - 2i\sigma\varphi^*[\nabla\Phi\cdot\nabla\varphi]\}\,d^3x$$

(nella trasformazione dell'integrale è stata usata l'identità (33,5) ed è stata eseguita l'integrazione per parti). Poiché $\Phi = \Phi(r)$,

$$\nabla\Phi = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{d\Phi}{dr},$$

e quindi

$$-i\sigma[\nabla\Phi\cdot\nabla] = \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}\,\sigma\mathbf{l},$$

dove $\mathbf{l} = -i\,[\boldsymbol{r}\nabla]$ è l'operatore del momento orbitale. Infine, riunendo le espressioni ottenute e sostituendole nella (120,9), otteniamo

$$\delta E_s^{(\mathrm{I})} = \frac{e^3}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varkappa} + \frac{19}{30}\right)\langle s\,|\,\Delta\Phi\,|\,s\rangle + \frac{e}{4\pi m^2}\langle s\,|\,\sigma\mathbf{l}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dr}\,|\,s\rangle, \tag{120,10}$$

dove ora in ambedue i termini la media è calcolata rispetto alla funzione d'onda non relativistica.

Parte dello spostamento dovuta alle basse frequenze

Per calcolare la seconda parte dello spostamento dei livelli usiamo un trucco basato, in ultima analisi, sulla condizione di unitarietà.

In conseguenza della possibilità di emissione di un fotone lo stato dell'atomo è quasi-stazionario (e non rigorosamente stazionario). A tale stato si può assegnare un valore complesso dell'energia, del quale la parte immaginaria è uguale a $-w/2$, dove w è la probabilità di emissione del fotone (vedi III, § 134). Nell'approssimazione non relativistica la radiazione è una radiazione di dipolo, e secondo la (45,7), abbiamo

$$\operatorname{Im}\delta E_s = -\frac{1}{2}w_s = -\frac{2}{3}\sum_{s'}|\boldsymbol{d}_{ss'}|^2(E_s - E_{s'})^3$$

(dove la sommatoria è estesa a tutti i livelli piú bassi, $E_{s'} < E_s$), oppure, in forma equivalente,

$$\operatorname{Im} \delta E_s = -\frac{2}{3} \int_0^\infty d\omega \cdot \sum_{s'} |\boldsymbol{d}_{ss'}|^2 (E_s - E_{s'})^3 \delta (E_s - E_{s'} - \omega). \quad (120,11)$$

Per trovare ora la parte reale di δE_s è necessario considerare E_s una variabile complessa ed eseguire il prolungamento analitico. Ciò è possibile se si considera la funzione delta come originata dai punti singolari. La regola di aggiramento dei poli viene data, come al solito, aggiungendo una parte immaginaria negativa alle masse delle particelle virtuali, nel nostro caso alle masse $m_{s'}$, dell'elettrone negli stati intermedi dell'atomo. Il ruolo di queste masse è svolto da $m_{s'} = m + E_{s'}$, e quindi è necessario porre

$$E_{s'} \to E_{s'} - i0$$

da cui discende la sostituzione

$$\delta (E_s - E_{s'} - \omega) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{E_s - E_{s'} - \omega + i0} \quad (120,12)$$

(cfr. la (108,3)).

Sostituendo la (120,12) nella (120,11), troveremo cosí

$$\operatorname{Im} \delta E_s = \operatorname{Im} \frac{2}{3\pi} \int_0^\infty d\omega \cdot \sum_{s'} |\boldsymbol{d}_{ss'}|^2 \frac{(E_s - E_{s'})^3}{E_s - E_{s'} - \omega + i0}$$

Il prolungamento analitico cercato si ottiene ora semplicemente tralasciando il segno Im. Noi dobbiamo, tuttavia, tener conto soltanto di quella parte di δE_s che è connessa al contributo dato dalle frequenze della regione II: $\omega < \varkappa$. A tal fine è sufficiente sostituire il limite superiore dell'integrale con $\varkappa$. Integrando, otteniamo il risultato

$$\delta E_s^{(\mathrm{II})} = \frac{2}{3\pi} \sum_{s'} |\boldsymbol{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{\varkappa}{E_{s'} - E_s + i0} \quad (120,13)$$

(in virtú della disuguaglianza (120,4) nel limite superiore abbiamo trascurato la differenza $E_s - E_{s'}$ rispetto a $\varkappa$). D'ora in avanti a noi interesserà soltanto la parte reale del livello; questa si ottiene sostituendo nella (120,13) l'argomento del logaritmo con $\varkappa / | E_{s'} - E_s |$.

Trasformiamo nell'espressione (120,13) il termine con $\ln \varkappa$ sostituendo gli elementi di matrice del momento di dipolo $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{r}$ con gli elementi di matrice dell'impulso $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ e della sua derivata $\dot{\boldsymbol{p}}$:

$$\sum_{s'} |\boldsymbol{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 = -\frac{e^2}{m^2} \sum_{s'} |\boldsymbol{p}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s) =$$

$$= \frac{ie^2}{2m^2} \sum_{s'} \{(\dot{\boldsymbol{p}})_{ss'} \boldsymbol{p}_{s's} - \boldsymbol{p}_{ss'} (\dot{\boldsymbol{p}})_{s's}\}.$$

Sostituendo ora $\dot{\mathbf{p}}$ in accordo con l'equazione del moto dell'elettrone $\dot{\mathbf{p}} = -e\nabla\Phi$, otteniamo

$$\sum_{s'} |\boldsymbol{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 = -\frac{ie^3}{2m^2} \sum_{s'} \{(\nabla\Phi)_{ss'} \boldsymbol{p}_{s's} - \boldsymbol{p}_{ss'} (\nabla\Phi)_{s's}\} =$$

$$= \frac{ie^3}{2m^2} \langle s | \mathbf{p}\nabla\Phi - \nabla\Phi\mathbf{p} | s\rangle = \frac{e^3}{2m^2} \langle s | \Delta\Phi | s\rangle. \qquad (120,14)$$

Si può quindi riscrivere la (120,13) nella forma

$$\delta E_s^{(\mathrm{II})} = \frac{e^3}{3\pi m^2} \langle s | \Delta\Phi | s\rangle \ln \frac{2\varkappa}{m} +$$

$$+ \frac{2e^2}{3\pi} \sum_{s'} |\boldsymbol{r}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{m}{2|E_s - E_{s'}|}. \qquad (120,15)$$

Spostamento totale

Infine, sommando le due parti, troviamo la formula seguente per lo spostamento complessivo del livello:

$$\delta E_s = \frac{2e^2}{3\pi} \sum_{s'} |\boldsymbol{r}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{m}{2|E_s - E_{s'}|} +$$

$$+ \frac{e^3}{3\pi m^2} \frac{19}{30} \langle s | \Delta\Phi | s\rangle + \frac{e^3}{4\pi m^2} \langle s | \boldsymbol{\sigma}\mathbf{l} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} | s\rangle \qquad (120,16)$$

(come ci si doveva aspettare, la quantità ausiliaria $\varkappa$ è scomparsa dal risultato)[1].

Tutti gli elementi di matrice nella (120,16) vengono calcolati a partire dalle funzioni d'onda non relativistiche dell'elettrone nell'atomo. Per l'atomo di idrogeno (o di uno ione idrogenoide) queste funzioni dipendono solo da tre numeri quantici: il numero quantico principale n, il momento angolare orbitale l e la sua proiezione m (ma non dipendono dal momento angolare totale j); i livelli energetici corrispondenti dipendono solo da n. Introduciamo la notazione[2])

$$L_{nl} = \frac{n^3}{2m(Ze^2)^4} \sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm' | \boldsymbol{r} | nlm\rangle|^2 \times$$

$$\times (E_{n'} - E_n)^3 \ln \frac{m(Ze^2)^2}{2|E_{n'} - E_n|}. \qquad (120,17)$$

---

[1]) La determinazione delle correzioni di ordine piú elevato allo spostamento dei livelli richiede calcoli molto complessi. L'elenco piú completo di tali correzioni e la loro deduzione sistematica (insieme alla bibliografia relativa) è possibile trovarli negli articoli: G. W. Erickson, D. R. Yennie, Ann. of Physics 35, 271, 447 (1965).

[2]) Gli elementi di matrice di $\boldsymbol{r}$ sono diagonali rispetto al numero j; di conseguenza nella (120,16) la sommatoria su s si riconduce alla sommatoria su n, l, m.

I livelli energetici sono proporzionali a $(Ze^2)^2$, mentre la dimensione caratteristica dell'atomo è proporzionale a Ze^2; perciò le quantità L_{nl}, definite in base alla (120,17), non dipendono da Z[1]). Queste quantità possono essere calcolate solo numericamente.

Esaminiamo ora separatamente i casi $l = 0$ e $l \neq 0$. Nel caso $l = 0$ l'ultimo termine della (120,16) scompare. Per il secondo termine usiamo l'equazione

$$e\Delta\Phi = 4\pi Ze^2\delta(\boldsymbol{r}),$$

alla quale soddisfa il potenziale del campo coulombiano del nucleo. Da qui

$$\langle nlm \,|\, \Delta\Phi \,|\, nlm\rangle = 4\pi Ze^2 \,|\, \psi_{nlm}(0)\,|^2 = \begin{cases} 4m^3 (Ze^2)^4 n^{-3}, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0 \end{cases}$$

(vedi la (34,3)). Nel primo termine, invece, introduciamo la notazione (120,17) e usiamo ancora una volta l'uguaglianza (120,14):

$$\sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm' \,|\, \boldsymbol{r} \,|\, n00\rangle|^2 (E_{n'} - E_n)^3 = \frac{e}{2m^2}\langle n00 \,|\, \Delta\Phi \,|\, n00\rangle = \frac{2m\,(Ze^2)^4}{n^3}.$$

Come risultato otteniamo la seguente espressione per lo spostamento dei termini s:

$$\delta E_{n0} = \frac{4mc^2Z^4\alpha^5}{3\pi n^3}\left[\ln\frac{1}{(Z\alpha)^2} + L_{n0} + \frac{19}{30}\right] \qquad (120,18)$$

(unità ordinarie). Riportiamo alcuni valori numerici delle quantità L_{n0}

$n =$	1	2	3	4	∞
$L_{n0} =$	$-2,984$	$-2,812$	$-2,768$	$-2,750$	$-2,721$

Essendo i livelli imperturbati $E_n = -mc^2\,(Z\alpha)^2/2n^2$; il valore dello spostamento radiativo relativo è

$$\left|\frac{\delta E_{n0}}{E_{n0}}\right| \sim Z^2\alpha^3 \ln\frac{1}{Z\alpha}. \qquad (120,19)$$

Nel caso $l \neq 0$ nella (120,16) viene a mancare il secondo termine. Il terzo, invece, può essere calcolato mediante le formule riportate nel § 34; con questo termine compare una dipendenza dello spostamento dei livelli anche dal numero j. Otteniamo cosí

$$\delta E_{nlj} = \frac{4mc^2Z^4\alpha^5}{3\pi n^3}\left[L_{nl} + \frac{3}{8}\,\frac{j\,(j+1) - l\,(l+1) - 3/4}{l\,(l+1)\,(2l+1)}\right], \quad l \neq 0. \qquad (120,20)$$

In tal modo, lo spostamento radiativo rimuove l'ultima degenerazione che era rimasta dopo che si era tenuto conto dell'interazione spin-orbita; e cioè la degenerazione dei livelli energetici con gli

[1]) In virtú dell'isotropia dello spazio la somma (120,17) non dipende, beninteso, nemmeno dal numero m.

stessi valori di n e j, ma con valori $l = j \pm 1/2$ differenti. Cosí, il valore numerico è $L_{21} = +0{,}030$ e dalle (120,18-20) si ottiene la seguente quantità per la differenza tra i livelli $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$ dell'atomo di idrogeno:

$$E_{20\,1/2} - E_{21\,1/2} = 0{,}41 mc^2\alpha^5$$

(a questa differenza corrisponde una frequenza di 1050 MHz).

§ 121. *Spostamento radiativo dei livelli di atomi mesici*

Alla fine del § 115 è stato chiarito l'importante ruolo che svolge l'effetto della polarizzazione del vuoto di elettroni nella correzione radiativa (al secondo ordine) al momento magnetico del muone. In misura ancora maggiore una situazione analoga ha luogo (già in prima approssimazione) per lo spostamento radiativo dei livelli del muonio: un sistema idrogenoide composto di un protone e di un mesone μ (*A. D. Galanin, I. Ja. Pomerančuk*, 1952).

Nel calcolo eseguito nel paragrafo precedente per lo spostamento dei livelli di un atomo ordinario si è tenuto conto, in particolare, dell'effetto della polarizzazione del vuoto di elettroni (cappio elettronico nel diagramma (118,2,*a*)). Se, analogamente, teniamo conto per l'atomo mesico dell'effetto della polarizzazione del vuoto di muoni, allora tutto il calcolo resta valido anche per questo caso, con la sola differenza che ovunque la massa dell'elettrone $m = m_e$ deve essere sostituita con la massa del muone m_μ. Poiché, tuttavia, il valore relativo dello spostamento dei livelli risulta essere indipendente dalla massa dell'elettrone (vedi la (120,19)), per l'idrogeno mesico si otterrebbe lo stesso risultato.

È facile vedere, tuttavia, che un contributo notevolmente maggiore nello spostamento dei livelli dell'atomo mesico proviene dall'effetto della polarizzazione del vuoto di elettroni. Effettivamente, la sostituzione del cappio muonico nel diagramma con il cappio elettronico significa la sostituzione dell'operatore di polarizzazione muonico con il relativo operatore elettronico. Ma l'operatore di polarizzazione $\mathcal{P}(q^2)$ è inversamente proporzionale al quadrato della massa della particella (per valori non relativistici di q^2). È chiaro, perciò, che la sostituzione indicata porta ad un aumento dell'effetto nel rapporto $(m_\mu/m_e)^2$. È proprio questo contributo che determinerà l'ordine di grandezza dello spostamento dei livelli, che sarà

$$\frac{\delta E}{|E|} \sim \alpha^3 \left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2,$$

cioè di quattro ordini di grandezza maggiore che per l'idrogeno ordinario[1]). Per visualizzare meglio l'origine di questo effetto ricordia-

[1]) Per una ragione analoga il contributo della polarizzazione del vuoto di muoni nello spostamento dei livelli dell'atomo dell'idrogeno ordinario sarà, al contrario, trascurabile.

mo che la distorsione del potenziale coulombiano per effetto della polarizzazione del vuoto di elettroni si estende fino a distanze $\sim 1/m_e$ (§ 111). Nell'atomo ordinario di idrogeno l'elettrone si trova a distanze dal nucleo dell'ordine di grandezza $1/m_e\alpha$, cioè fuori della regione principale di distorsione del campo; nell'idrogeno mesico, invece, il muone si trova a distanze $\sim 1/m_\mu\alpha$, che vanno proprio a cadere nella regione indicata.

Per un calcolo esatto dello spostamento dei livelli dell'atomo mesico non si può, tuttavia, usare l'espressione approssimata non relativistica dell'operatore di polarizzazione, come abbiamo fatto nella formula (120,7) usata per calcolare lo spostamento dei livelli dell'atomo ordinario. Il problema sta qui nel fatto che gli impulsi caratteristici del muone nell'atomo di idrogeno mesico sono $|\boldsymbol{p}_\mu| \sim \alpha m_\mu$. Per il muone tali valori sono non relativistici, mentre diventano relativistici per l'elettrone.

Di conseguenza, dobbiamo usare l'espressione relativistica completa (111,5) per il potenziale efficace del campo del nucleo alterato per effetto della polarizzazione del vuoto di elettrone d'onda del muone nell'atomo:

$$\delta E_{nl} = -|e| \int |\psi_{nl}|^2 \delta\Phi(r)\, d^3x = -|e| \int_0^\infty R_{nl}^2(r)\, \delta\Phi(r)\, r^2\, dr, \qquad (121,1)$$

dove R_{nl} è la parte radiale della funzione d'onda coulombiana (non relativistica). Per uno ione idrogenoide di carica nucleare $Z|e|$ le funzioni $R_{nl}(r)$ dipendono da r solo attraverso la combinazione adimensionale $\rho = Z\alpha m_\mu r$ (la distanza misurata in unità coulombiane). Tenendo conto di questo e sostituendo $\delta\Phi(r)$ dalla (111,5) (con carica $Z|e|$ invece di e_1), riconduciamo l'integrale (121,1) alla forma

$$\delta E_{nl} = -\frac{2}{3\pi} Z\alpha^3 m_\mu Q_{nl}\left(\frac{m_e}{Z\alpha m_\mu}\right), \qquad (121,2)$$

dove

$$Q_{nl}(x) = \int_0^\infty \rho\, d\rho \int_1^\infty R_{nl}^2(\rho)\, e^{-2x\rho\zeta}\left(1 + \frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\, d\zeta.$$

Così, per alcuni dei primi livelli dell'idrogeno mesico il calcolo numerico dà per lo spostamento i valori seguenti:

$$\frac{\delta E_{10}}{|E_{10}|} = -6{,}4\cdot 10^{-3}, \quad \frac{\delta E_{20}}{|E_{20}|} = -2{,}8\cdot 10^{-4}, \quad \frac{\delta E_{21}}{|E_{21}|} = -2{,}0\cdot 10^{-5}.$$

§ 122. Equazione relativistica per gli stati legati

Il metodo, applicato nei paragrafi precedenti al calcolo dello spostamento radiativo dei livelli atomici, è inapplicabile per la soluzione di problemi consistenti nella determinazione delle corre-

zioni ai livelli del positronio, che è un sistema di due particelle equivalenti, nessuna delle quali può venire considerata rispetto all'altra come sorgente di campo esterno.

Il metodo sistematico di soluzione di questo problema è basato sul fatto che i livelli energetici degli stati legati sono punti singolari dell'ampiezza esatta della diffusione reciproca di queste due particelle (come funzione della somma delle loro energie nel sistema del baricentro). Effettivamente, il positronio, in ciascuno dei suoi livelli discreti, può considerarsi come una « particella intermedia » di massa determinata, attraverso la cui formazione può avvenire il processo di diffusione elettrone-positrone; a ciascuno stato intermedio « ad una particella » corrisponde un polo dell'ampiezza di diffusione (ovviamente, questi poli cadono nella regione non fisica dei 4-impulsi delle particelle interagenti).

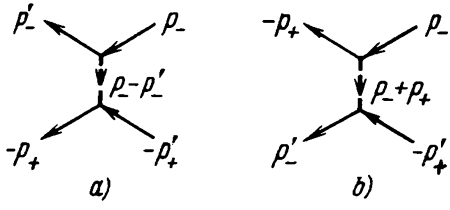
Secondo la (103,17) l'ampiezza esatta di diffusione si compone della parte di vertice esatta « a quattro gambe » $\Gamma_{ik,\,lm}$ e delle ampiezze di polarizzazione u delle particelle. Queste ultime, evidentemente, non hanno alcuna relazione con le singolarità, e di conseguenza è piú comodo ignorarle completamente e limitarsi a parlare dei poli della parte di vertice, cioè della funzione

$$\Gamma_{ik,\,lm}(p'_-,\ -p_+;\ p_-,\ -p'_+), \tag{122,1}$$

dove le notazioni dei 4-impulsi dei terminali esterni del diagramma (103,12) si riferiscono alla diffusione di un positrone su un elettrone.

Sottolineiamo che l'affermazione circa la presenza di poli si riferisce proprio all'ampiezza esatta di diffusione ovvero alla parte di vertice esatta; in ciascun termine della serie perturbativa, preso separatamente, il polo manca. Quest'ultima circostanza è evidente già dal fatto che nei diagrammi di Feynman di ciascuna approssimazione figurano solo linee elettroniche (e fotoniche), ma non compaiono linee relative alla « particella composta », cioè del positronio preso nel suo insieme. Da qui discende, a sua volta, che il calcolo dell'ampiezza di diffusione in prossimità dei poli richiede la somma di una successione infinita di diagrammi. Determiniamo ora quali sono i diagrammi che entrano in questa successione.

Nella prima approssimazione non nulla (prima rispetto ad α) della teoria delle perturbazioni alla parte di vertice (122,1) corrispondono i due diagrammi del secondo ordine:

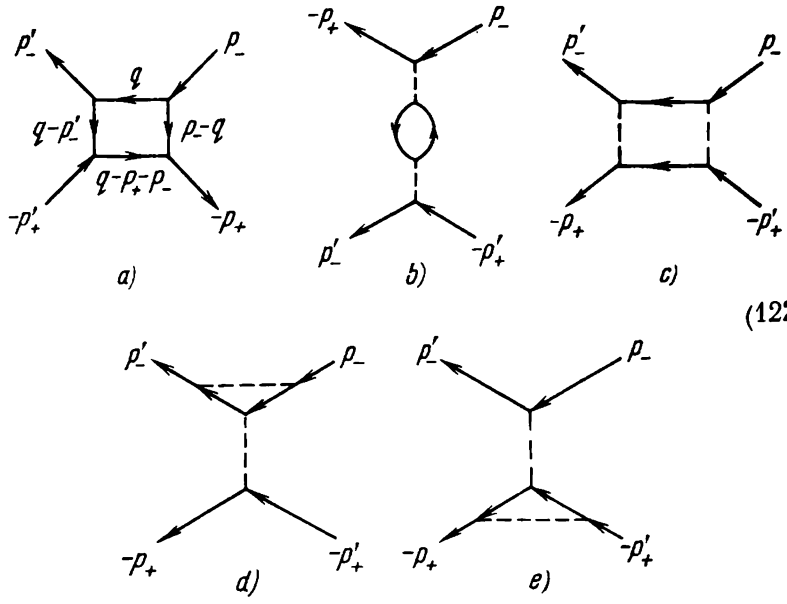


(122,2)

oppure, in forma analitica:

$$\Gamma_{ik,\,lm} = -e^2\gamma^{\mu}_{il}\gamma^{\nu}_{km}D_{\mu\nu}(p_- - p'_-) + e^2\gamma^{\mu}_{im}\gamma^{\nu}_{kl}D_{\mu\nu}(p_- + p_+). \quad (122,3)$$

Nell'approssimazione successiva (seconda rispetto ad α) abbiamo 10 diagrammi del quarto ordine:



(122,4)

ed altri 5 diagrammi che differiscono da quelli riportati per la sostituzione $p_- \leftrightarrow -p'_+$. Tutti questi diagrammi hanno, rispetto ai diagrammi (122,2), una potenza di $e^2 = \alpha$ in piú. Mostriamo, tuttavia, come nel diagramma *a*) questa potenza in piú sia compensata dalla piccolezza del denominatore (per piccoli impulsi dell'elettrone e del positrone).

Consideriamo tutte le quantità nel sistema « del baricentro ». Tuttavia, poiché i 4-impulsi dei terminali esterni dei diagrammi non si suppongono fisici (cioè $p^2 \neq m^2$), allora, benché in questo sistema $\boldsymbol{p}_+ = -\boldsymbol{p}_-$, abbiamo però anche che $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$. In tal modo, per i 4-impulsi dei terminali abbiamo

$$\begin{gathered} p_- = (\varepsilon_-, \boldsymbol{p}), \qquad p_+ = (\varepsilon_+, -\boldsymbol{p}), \\ p'_- = (\varepsilon'_-, \boldsymbol{p}'), \qquad p'_+ = (\varepsilon'_+, -\boldsymbol{p}'), \\ \varepsilon_- + \varepsilon_+ = \varepsilon'_- + \varepsilon'_+. \end{gathered} \quad (122,5)$$

L'energia di legame dell'elettrone e del positrone nel positronio è $\sim m\alpha^2$. Perciò nell'intorno dei poli dell'ampiezza di diffusione, cioè

nella regione che a noi interessa, si ha

$$|p| \sim |p'| \sim m\alpha \ll m,$$
$$|\varepsilon_- - m| \sim |\varepsilon_+ - m| \sim \frac{p^2}{m} \sim m\alpha^2, \ldots \tag{122,6}$$

Il diagramma (122,4,a) dà nella parte di vertice il contributo

$$\Gamma^{(4a)}_{ik,\,lm} = -ie^4 \int (\gamma^\lambda G(q)\gamma^\mu)_{il} (\gamma^\nu G(q - p_- - p_+)\gamma^\rho)_{km} \times$$
$$\times D_{\lambda\rho}(q - p'_-) D_{\mu\nu}(p_- - q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \tag{122,7}$$

Nell'integrale (122,7) è essenziale la regione dei valori di $q^\mu = (q_0, \boldsymbol{q})$ in prossimità dei poli di ambedue le funzioni G simultaneamente. In questa regione $|\boldsymbol{q}|$ e $|q_0 - m|$ sono piccoli e per i propagatori elettronici abbiamo

$$G(q) = \frac{\gamma^0 q_0 - \boldsymbol{\gamma q} + m}{(q_0 + m)(q_0 - m) - \boldsymbol{q}^2 + i0} \approx \frac{\gamma^0 + 1}{2} \frac{1}{q_0 - m - \dfrac{\boldsymbol{q}^2}{2m} + i0}, \tag{122,8}$$

$$G(q - p_- - p_+) \approx \frac{\gamma^0 - 1}{2} \frac{1}{q_0 - \varepsilon_- - \varepsilon_+ + m + \dfrac{\boldsymbol{q}^2}{2m} - i0}.$$

I poli di queste due espressioni, come si vede, giacciono da una parte e dall'altra rispetto all'asse reale nel piano della variabile complessa q_0; chiudendo il cammino d'integrazione su quest'asse, ad esempio nel semipiano superiore, calcoliamo l'integrale in dq_0 valutando il residuo nel polo corrispondente[1]). Come risultato troveremo

$$\Gamma^{(4a)} \sim e^4 \int \frac{d^3q}{(q - p'_-)^2 (p_- - q)^2 \left(2m - \varepsilon_- - \varepsilon_+ + \dfrac{\boldsymbol{q}^2}{m}\right)},$$

e da qui, tenendo conto della (122,6), otterremo

$$\Gamma^{(4a)} \sim \alpha^2 \frac{(m\alpha)^3}{(m\alpha)^4 m\alpha^2} = \frac{1}{m^2\alpha}.$$

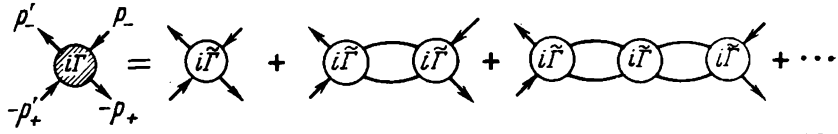
Dello stesso ordine di grandezza è anche il contributo in Γ dato dal diagramma del secondo ordine (122,2,a) (primo termine nella (122,3)); questo dimostra l'affermazione fatta precedentemente. Una situazione analoga viene a crearsi anche in tutte le approssimazioni successive della teoria delle perturbazioni.

In tal modo, il calcolo della parte di vertice in prossimità dei suoi poli, che è ciò che a noi interessa, richiede che venga eseguita

[1]) Per il diagramma (122,4,c), invece, che si differenzia dal diagramma (122,4,a) solo per la direzione relativa delle linee elettroniche, ambedue i poli sarebbero risultati nello stesso semipiano rispetto all'asse reale, e quindi, dopo le approssimazioni fatte, l'integrale si sarebbe annullato.

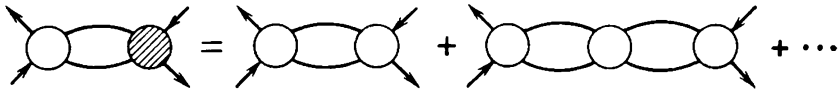
la somma di una successione infinita di diagrammi « anomalmente grandi » con stati intermedi del tipo delle linee interne del diagramma (122,4,*a*). La caratteristica di questi diagrammi è che essi possono venire tagliati tra i terminali p_-, $-p_+$ e p'_-, $-p'_+$ in parti unite tra loro solo da due linee elettroniche[1]). L'insieme di tutti i diagrammi che non soddisfano questa condizione verrà chiamato parte di vertice « compatta » e verrà designato con $\tilde{\Gamma}_{ik,lm}$. Poiché i diagrammi anomalmente grandi non compaiono in essa, queste quantità si possono calcolare nell'ambito dell'ordinaria teoria delle perturbazioni. Cosí, ad esempio, in prima approssimazione $\tilde{\Gamma}$ è determinato dai due diagrammi del secondo ordine (122,2) e in seconda approssimazione da otto diagrammi del quarto ordine (tutti i diagrammi, ad eccezione di (122,4,*a-b*)).

Classificando le parti di vertice non compatte secondo il numero di « legami doppi » in esse contenuti, si può rappresentare il Γ totale sotto forma di una serie infinita:

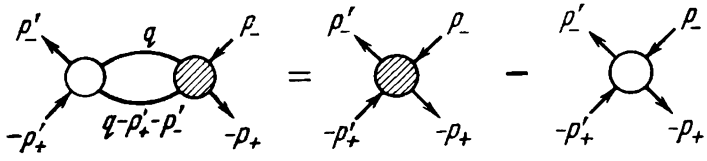


(122,9)

dove le linee interne continue in grassetto sono i propagatori esatti $\mathcal{G}$ (una serie di questo tipo è spesso detta « a scala »). Per sommare questa serie, « moltiplichiamola » da sinistra per $\tilde{\Gamma}$[2]):



Confrontando ora questa serie con la serie originaria (122,9), noi vediamo che



(122,10)

---

[1]) Questa definizione include tutti i diagrammi anomalmente grandi, ma, accanto ad essi, include anche alcuni diagrammi « normali », come ad esempio il diagramma (122,4,*b*).

[2]) Moltiplichiamo, cioè, tutti i termini della serie per $\tilde{\Gamma}$ e per i due $\mathcal{G}$ ed eseguiamo quindi la relativa integrazione sui 4-impulsi dei nuovi legami interni.

Questa uguaglianza grafica è equivalente alla seguente equazione integrale:

$$i\Gamma_{lk,\,lm}(p'_-,\,-p_+;\,p_-,\,-p'_+)=i\widetilde{\Gamma}_{ik,\,lm}(p'_-,\,-p_+;\,p_-,\,-p'_+)+$$
$$+\int\widetilde{\Gamma}_{ir,\,sm}(p'_-,\,q-p'_+-p'_-;\,q,\,-p'_+)\,\mathcal{G}_{st}(q)\times$$
$$\times\mathcal{G}_{nr}(q-p'_+-p'_-)\,\Gamma_{tk,\,ln}(q,\,-p_+;\,p_-,\,q-p'_+-p'_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \qquad (122,11)$$

Le funzioni $\widetilde{\Gamma}$ e $\mathcal{G}$ vengono calcolate secondo la teoria delle perturbazioni, dopo di che l'equazione (122,11) fornisce, in linea di principio, la possibilità di calcolare Γ con precisione arbitraria.

Per la determinazione dei livelli energetici è sufficiente conoscere solo la posizione dei poli della funzione Γ. In prossimità dei poli $\Gamma \gg \widetilde{\Gamma}$, e quindi si può trascurare il primo termine nel secondo membro della (122,11) (secondo diagramma da destra nella (122,10)); cosí, l'equazione diventa omogenea rispetto a Γ. In questa equazione le variabili p_+, p_- ed anche gli indici k, l diventano parametri, e la dipendenza da essi rimane arbitraria (non è, cioè, determinata dalla equazione)[1]). Omettendo questi parametri (e contemporaneamente anche gli apici delle rimanenti variabili p'_+, p'_-), otteniamo l'equazione

$$i\Gamma_{i,\,m}(p_-;\,-p_+)=\int\widetilde{\Gamma}_{ir,\,sm}(p_-,\,q-p_+-p_-;\,q,\,-p_+)\times$$
$$\times\mathcal{G}_{st}(q)\,\mathcal{G}_{nr}(q-p_+-p_-)\,\Gamma_{t,\,n}(q;\,q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \qquad (122,12)$$

(*E. E. Salpeter*, *H. A. Bethe*, 1951).

Scritta nel sistema del baricentro ($\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- = 0$), l'equazione (122,12) ha soluzioni solo per determinati valori di $\varepsilon_+ + \varepsilon_-$, che danno proprio i livelli energetici del positronio. La funzione $\Gamma_{i,m}$ svolge qui solo un ruolo ausiliario. Al suo posto è, in pratica, piú comodo introdurre un'altra funzione:

$$\chi_{sr}(p_1,\,p_2)=\mathcal{G}_{st}(p_1)\,\Gamma_{t,\,n}(p_1;\,p_2)\,\mathcal{G}_{nr}(p_2). \qquad (122,13)$$

Allora l'equazione (122,12) assume la forma

$$i\,[\mathcal{G}^{-1}(p_-)\,\chi(p_-,\,-p_+)\,\mathcal{G}^{-1}(-p_+)]_{im}=$$
$$=\int\widetilde{\Gamma}_{ir,\,sm}(p_-,\,q-p_+-p_-;\,q,\,-p_+)\,\chi_{sr}(q,\,q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \qquad (122,14)$$

in cui $\widetilde{\Gamma}$ figura come il nucleo di un operatore integrale. Come abbiamo già ricordato, $\widetilde{\Gamma}$ può essere calcolato secondo la teoria delle perturbazioni; lo stesso vale, certamente, anche per la funzione $\mathcal{G}^{-1}$.

[1]) Cfr. analoga situazione alla fine del § 106, dove nel passaggio all'equazione integrale omogenea (106,23) scompariva la dipendenza dalla variabile $\boldsymbol{r}'$.

Mostriamo che nella prima approssimazione (rispetto ad α) della teoria delle perturbazioni la (122,14) si riduce, come ci si doveva aspettare, all'equazione di Schrödinger non relativistica per il positronio.

In prima approssimazione non relativistica $\widetilde{\Gamma}$ è determinato dal solo diagramma (122,2, *a*) (il diagramma del tipo di annichilazione (122,2, *b*) in questa approssimazione si annulla)[1]). Come è stato fatto in una situazione analoga nel § 83 è comodo usare il propagatore fotonico nel gauge coulombiano (77,12-13), in cui è sufficiente lasciare solo la componente D_{00}. Allora

$$\widetilde{\Gamma}_{ir,\,sm}(p_-,\ q-p_+-p_-;\ q,-p_+)=$$
$$=-e^2\gamma^0_{is}\gamma^0_{rm}D_{00}(q-p_-)=-U(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_-)\,\gamma^0_{is}\gamma^0_{rm},$$

dove

$$U(\boldsymbol{q})=-\frac{4\pi e^2}{q^2}$$

è la trasformata di Fourier dell'energia potenziale d'interazione coulombiana tra positrone ed elettrone. L'equazione (122,14) assume la forma

$$i\chi_{im}(p_-,\ -p_+)=\Big[G(p_-)\,\gamma^0\int U(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_-)\times$$
$$\times\,\chi(q,\ q-p_+-p_-)\,\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\cdot\gamma^0G(-p_+)\Big]_{im},\qquad(122,15)$$

dove, inoltre, i propagatori esatti $\mathcal{G}$ sono stati sostituiti con propagatori di elettroni liberi G. Per questi ultimi abbiamo le espressioni approssimate (cfr. la (122,8))

$$G(p_-)\approx\frac{1+\gamma^0}{2}\,g(p_-),\quad G(-p_+)=\frac{1-\gamma^0}{2}\,g(p_+),$$

dove sono stati messi in evidenza i fattori matriciali, e $g(p)$ è la funzione scalare

$$g(p)=\frac{1}{\varepsilon-m-\dfrac{p^2}{2m}+i0}.\qquad(122,16)$$

Nel sostituire queste espressioni nella (122,15) notiamo che tutti gli elementi di matrice non nulli

$$\left[\frac{1+\gamma^0}{2}\,\gamma^0\chi\gamma^0\,\frac{1-\gamma^0}{2}\right]_{im}=\left[\frac{\gamma^0+1}{2}\,\chi\,\frac{\gamma^0-1}{2}\right]_{im}$$

---

[1]) Ricordiamo che le velocità delle particelle nel positronio $v/c\sim\alpha$. In questo senso gli sviluppi in α e in $1/c$ sono reciprocamente connessi.

coincidono con gli elementi $-\chi_{im}$. Perciò l'equazione matriciale (122,15) è equivalente all'equazione per la funzione scalare

$$i\chi(p_-, -p_+) = -g(p_-)\,g(p_+)\int U(q-p_-)\,\chi\times$$
$$\times(q,\ q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \qquad (122,17)$$

Introduciamo ora in luogo di p_+, p_- le variabili

$$p \equiv (\varepsilon,\ \boldsymbol{p}) = \frac{p_- - p_+}{2}, \qquad P = p_- + p_+$$

(4-impulsi del moto relativo delle particelle e del positronio come un tutt'uno). Nel sistema del baricentro

$$P = (E + 2m,\ 0),$$

dove l'energia totale è denotata con $E + 2m$, cioè E è il livello energetico contato a partire dalla massa di quiete. Usando queste variabili, riscriviamo la (122,17) nella forma

$$i\chi(p,\ P) = -g\left(p+\frac{P}{2}\right)g\left(-p+\frac{P}{2}\right)\int U(q-p)\,\chi\times$$
$$\times\left(q-\frac{P}{2},\ P\right)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} = -g\left(p+\frac{P}{2}\right)g\left(-p+\frac{P}{2}\right)\int U\times$$
$$\times(q'-p)\,\chi(q',\ P)\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}.$$

P figura in questa equazione solo come parametro, la funzione χ compare nel secondo membro dell'uguaglianza solo sotto forma di integrale

$$\psi(q) = \int_{-\infty}^{\infty}\chi(q,\ P)\,dq_0.$$

Integrando in $d\varepsilon$ ambedue i membri dell'uguaglianza, otteniamo un'equazione chiusa rispetto a ψ:

$$\psi(p) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(p+\frac{P}{2}\right)g\left(-p+\frac{P}{2}\right)d\varepsilon\int U(q-p)\,\psi(q)\frac{d^3q}{(2\pi)^3},$$

dove

$$g\left(\pm p+\frac{P}{2}\right) = \frac{1}{\pm\varepsilon+\frac{E}{2}-\frac{p^2}{2m}+i0}.$$

Chiudendo il cammino d'integrazione in $d\varepsilon$ nel semipiano superiore della variabile complessa ε, valutiamo l'integrale calcolando il residuo nel polo corrispondente; si ottiene infine

$$\left(\frac{p^2}{m}-E\right)\psi(p)+\int U(p-q)\,\psi(q)\frac{d^3q}{(2\pi)^3} = 0. \qquad (122,18)$$

Questa è l'equazione di Schrödinger per il positronio nella rappresentazione degli impulsi, vedi III (130,4).

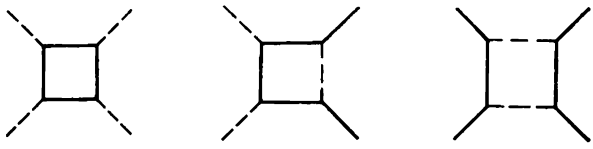
Se ci fossimo limitati per $\tilde{\Gamma}$ ai diagrammi (122,2) tenendo, però, conto in essi (ed anche in $\mathcal{G}$) dei termini successivi dello sviluppo in $1/c$, avremmo ottenuto l'equazione di Breit (§ 83). I diagrammi (122,4) (insieme con i termini successivi dello sviluppo in $1/c$) danno le correzioni radiative ai livelli del positronio: i calcoli diventano, però, molto complessi. Riportiamo, a titolo di informazione, la differenza tra i livelli fondamentali dell'orto- e del parapositronio calcolata tenendo conto di queste correzioni[1])

$$E(^3S_1) - E(^1S_0) = \alpha^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} \left\{ \frac{7}{6} - \left(\frac{16}{9} + \ln 2 \right) \frac{\alpha}{\pi} \right\} \qquad (122,19)$$

(il primo termine entro parentesi graffa dà la separazione fina, cfr. problema 2, § 84). Notiamo che la correzione radiativa al livello è dello stesso ordine di grandezza della probabilità di annichilazione del positronio (vedi la (89,4)). Questo significa che, nell'approssimazione considerata, il livello $^1S_0$ diventa complesso (E ($^1S_0$) nella (122,19) è la sua parte reale). È ovvio che il carattere complesso dei livelli si ottiene automaticamente dall'equazione (122,14) nell'approssimazione corrispondente.

§ 123. *Doppia relazione di dispersione*

L'ordine seguente di complessità, dopo la parte di vertice con tre linee esterne è il blocco a quattro terminali. Nell'elettrodinamica quantistica sono possibili tre diagrammi semplici di questo tipo:



a) *b)* *c)* (123,1)

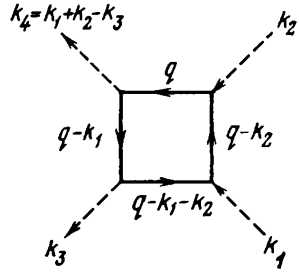
Il primo di essi descrive la diffusione di un fotone su un altro fotone. Gli altri rappresentano termini singoli delle correzioni radiative alla diffusione fotone-elettrone (diagramma *b*) e alla diffusione elettrone-elettrone (diagramma *c*).

Questo paragrafo è dedicato allo studio di alcune proprietà generali dei diagrammi di questo tipo. Ma, per semplificare e per fissare le idee, noi parleremo sempre di un diagramma determinato, il (123,1,*a*).

---

[1]) R. Karplus, A. Klein, Phys. Rev. 87, 848 (1952).

Denotiamo gli impulsi relativi alle linee di tale diagramma nel modo seguente:



(123,2)

I 4-impulsi k_1, k_2, k_3, k_4 sono relativi a fotoni reali, e quindi i rispettivi quadrati sono nulli.

Separando la dipendenza dalle polarizzazioni dei fotoni, possiamo esprimere l'ampiezza M_{fi} corrispondente al diagramma (123,2) attraverso alcune funzioni scalari dei 4-impulsi dei fotoni. Si ottengono cosí le ampiezze invarianti, di cui abbiamo parlato nel § 71; la separazione di tali ampiezze per la diffusione fotone-fotone verrà fatta nel paragrafo seguente. Essendo degli scalari, queste ampiezze dipendono solo da variabili scalari; come tali possiamo scegliere, ad esempio, due qualsiasi tra le grandezze

$$s = (k_1 + k_2)^2, \quad t = (k_1 - k_3)^2, \quad u = (k_1 - k_4)^2, \quad (123,3)$$
$$s + t + u = 0;$$

nel seguito noi scegliamo nel ruolo di variabili indipendenti s e t.

Ciascuna delle ampiezze invarianti (che noi designeremo qui con la stessa lettera M) può venire rappresentata mediante un integrale del tipo

$$M = \int \frac{iB\, d^4q}{[q^2-m^2]\,[(q-k_4)^2-m^2]\,[(q-k_1-k_2)^2-m^2]\,[(q-k_2)^2-m^2]}, \quad (123,4)$$
$$m^2 \to m^2 - i0,$$

dove B è una certa funzione di tutti i 4-impulsi; i fattori nel denominatore provengono dai propagatori dei quattro elettroni virtuali.

Per s e t sufficientemente piccoli le ampiezze M sono reali (piú esattamente possono essere rese tali mediante una opportuna scelta del moltiplicatore di fase). Effettivamente, la piccolezza di s garantisce l'impossibilità di creazione da parte dei fotoni di particelle reali (coppia elettrone-positrone) nel canale s, e la piccolezza di t garantisce un'analoga impossibilità nel canale t[1]). In altre parole, in ambedue

[1]) Il verso delle linee esterne nel diagramma (123,2) corrisponde al canale s. Nel canale t le linee entranti sono la 1 e la 3, quindi i 4-impulsi dei fotoni iniziali sarebbero k_1 e $-k_3$. I domini fisici della diffusione di un fotone da parte di un fotone, in variabili s, t, u corrispondono ai settori tratteggiati nella fig. 10. Cosí al canale s corrisponde il dominio: $s > 0$, $t < 0$, $u < 0$.

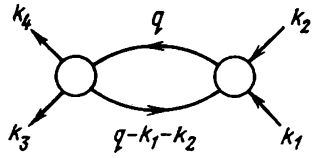
i canali mancano stati intermedi reali che potrebbero portare, secondo la condizione di unitarietà, alla comparsa di una parte immaginaria nell'ampiezza.

Facciamo ora aumentare s tenendo fisso il valore (piccolo) di t. Per $s \geqslant 4m^2$ nell'ampiezza M compare una parte immaginaria connessa con la possibilità di creazione di una coppia da parte dei due fotoni nel canale s. Di conseguenza per M si può scrivere la relazione di dispersione « rispetto alla variabile s »:

$$M(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_{1s}(s', t)}{s' - s - i0} ds', \tag{123,5}$$

dove $A_{1s}(s, t)$ designa la parte immaginaria di $M(s, t)$.

Come per qualsiasi diagramma del tipo

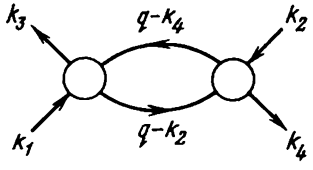


$A_{1s}(s, t)$ si calcola secondo la regola (112,9) sostituendo nell'integrale (123,4) i fattori di polo con le relative funzioni δ:

$$2iA_{1s}(s, t) = (2\pi i)^2 \int \frac{iB\delta(q^2 - m^2)\,\delta[(q - k_1 - k_2)^2 - m^2]}{[(q - k_4)^2 - m^2]\,[(q - k_2)^2 - m^2]} d^4q, \tag{123,6}$$

dove l'integrazione viene eseguita sulla metà dello spazio q in cui $q^0 > 0$.

Noi possiamo fare un passo avanti molto importante, notando che l'integrale (123,6) ha una struttura (nel senso dei suoi fattori singolari) dello stesso tipo dell'ampiezza della reazione rappresentata da un diagramma della forma



Di conseguenza, anche le proprietà di analicità di $A_{1s}(s, t)$, in quanto funzione di t, sono simili alle proprietà di analicità di questa ampiezza. In particolare, nella funzione $A_{1s}(s, t)$ può comparire (con l'aumentare di t) una parte immaginaria solo quando i due fattori nel denominatore si annulleranno contemporaneamente. Questo, però, non può accadere immediatamente dopo il raggiungimento del valore $t = 4m^2$, soglia della creazione di una coppia nel canale t. Ciò è

dovuto al fatto che la presenza nell'espressione integranda di funzioni δ limita la regione d'integrazione nello spazio q, che può cosí risultare incompatibile col valore $t = 4m^2$. L'estensione della regione d'integrazione dipende dal valore di s (gli argomenti delle funzioni δ contengono k_1 e k_2). Dipende perciò da s anche il valore di frontiera $t = t_c(s)$, oltre il quale la funzione $A_{1s}(s, t)$ diventa complessa.

Come la funzione $M(s, t)$ si esprime attraverso la sua parte immaginaria $A_{1s}(s, t)$ mediante la formula (123,5), cosí la funzione $A_{1s}(s, t)$ si esprime, a sua volta, attraverso $A_2(s, t) = \operatorname{Im} A_{1s}(s, t)$ mediante una relazione di dispersione « rispetto alla variabile t »:

$$A_{1s}(s, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{t_c(s)}^{\infty} \frac{A_2(s, t')}{t' - t - i0} dt'. \qquad (123,7)$$

Sostituendo ora la (123,7) nella (123,5) otteniamo la *rappresentazione di Mandelstam* per la funzione $M(s, t)$ (*relazione di dispersione doppia*)

$$M(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{4m^2}^{\infty} \int\limits_{t_c(s)}^{\infty} \frac{A_2(s', t')}{(s' - s - i0)(t' - t - i0)} dt' ds' \qquad (123,8)$$

(*S. Mandelstam*, 1958).

La funzione $A_2(s, t)$ è detta *densità spettrale doppia* della funzione $M(s, t)$. È possibile ricavare questa funzione dall'integrale (123,6) mediante una seconda applicazione della regola della sostituzione (112,9). Denotando, per brevità,

$$l_1 = q, \quad l_2 = q - k_4, \quad l_3 = q - k_2, \quad l_4 = q - k_1 - k_2, \qquad (123,9)$$

otteniamo

$$(2i)^2 A_2(s, t) = (2\pi i)^4 \int iB\delta(l_1^2 - m^2)\,\delta(l_2^2 - m^2)\,\delta \times$$
$$\times (l_3^2 - m^2)\,\delta(l_4^2 - m^2)\, d^4q, \qquad (123,10)$$

dove l'integrazione è estesa alla regione $q^0 > 0$.

Occorre, tuttavia, tenere presente che la formula (123,10) ha solo un significato simbolico. Infatti, la regione $s > 0$, $t > 0$ non è fisica. Corrispondentemente, in questa regione le grandezze $l_1, l_2, \ldots$ per q reali risultano, generalmente parlando, complesse; il concetto di funzione δ per valori complessi dell'argomento non è completamente determinato. Sarebbe piú esatto parlare direttamente di valutazione dei residui nei corrispondenti poli dell'integrale originario (123,4). Nel nostro caso, tuttavia, questo non ha importanza. La condizione dell'annullarsi dei quattro denominatori nella (123,4) o dei quattro argomenti delle funzioni δ determina completamente le componenti del 4-vettore q. Passando all'integrazione su $l_1^2, l_2^2, \ldots$ (vedi piú avanti) e operando formalmente con la quantità (123,10)

secondo le regole solite, troviamo (a meno del segno) l'espressione per A_2.

Per i calcoli successivi scegliamo il sistema di riferimento del baricentro (relativo al canale s). Allora

$$k_1 = (\omega, \boldsymbol{k}), \quad k_2 = (\omega, -\boldsymbol{k}), \quad k_3 = (\omega, \boldsymbol{k}'), \quad k_4 = (\omega, -\boldsymbol{k}'), \tag{123,11}$$

$$s = 4\omega^2, \quad t = -(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2 = -4\omega^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2},$$

$$u = -(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')^2 = -4\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \tag{123,12}$$

dove θ è l'angolo tra $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}'$ (angolo di diffusione). Dirigiamo l'asse x delle coordinate cartesiane spaziali lungo il vettore $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}'$, e l'asse y lungo $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$[1]).

Trasformiamo ora l'integrale (123,10) prendendo i quadrati $l_1^2, l_2^2, \ldots$ in qualità di nuove variabili d'integrazione (in luogo delle quattro componenti di q). Abbiamo

$$\frac{\partial (l_1^2)}{\partial q^\mu} = 2 l_{1\mu}, \ldots$$

Per lo jacobiano della trasformazione troviamo

$$\frac{\partial (l_1^2, l_2^2, l_3^2, l_4^2)}{\partial (q^0, q_x, q_y, q_z)} = 16D,$$

dove D è il determinante composto dalle 16 componenti dei quattro 4-vettori $l_1, l_2, \ldots$ L'integrazione nella (123,10) si riduce semplicemente alla sostituzione delle funzioni B e D nell'espressione integranda con i loro valori per[2])

$$l_1^2 = l_2^2 = l_3^2 = l_4^2 = m^2. \tag{123,13}$$

Dalle condizioni $l_1^2 = l_4^2 = m^2$ otteniamo, come già nel § 112,

$$q^0 = \omega, \quad \boldsymbol{q}^2 = \omega^2 - m^2. \tag{123,14}$$

Le rimanenti due condizioni danno

$$(q - k_4)^2 - m^2 = -2qk_4 = -2\omega^2 - 2q\boldsymbol{k}' = 0,$$
$$(q - k_2)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2q\boldsymbol{k} = 0,$$

e quindi

$$q\boldsymbol{k} = q\boldsymbol{k}' = -\frac{s}{4},$$

---

[1]) Per $t > 0$: $(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2 < 0$, cioè il vettore $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$ è immaginario. Questa difficoltà, tuttavia, è facilmente superabile sviluppando tutte le espressioni vettoriali per $t < 0$ ed eseguendo quindi il prolungamento analitico per $t > 0$.

[2]) Questo modo di integrare tiene automaticamente conto solo di uno degli zeri degli argomenti per ciascuna delle funzioni δ.

oppure, per componenti:

$$q^0 = \omega, \quad q_x = -\frac{s}{2(s+t)}, \quad q_y = 0,$$

$$q_z = \pm\sqrt{\omega^2 - m^2 - q_x^2} = \pm\left[\frac{st - 4m^2(s+t)}{4(s+t)}\right]^{1/2}. \qquad (123,15)$$

In tal modo, l'integrale (123,10) è uguale a

$$A_2(s, t) = \frac{\pi^4}{4D}\sum(-iB), \qquad (123,16)$$

dove la sommatoria è estesa ai due valori di q della (123,15).

Il determinante D può essere scritto mediante il tensore antisimmetrico unitario:

$$D = e_{\mu\nu\rho\sigma} l_1^\mu l_2^\nu l_3^\rho l_4^\sigma = -e_{\mu\nu\rho\sigma} q^\mu k_4^\nu k_2^\rho k_1^\sigma =$$

$$= -e_{\mu\nu\rho\sigma}(q - k_1)^\mu (k_4 - k_1)^\nu (k_2 - k_1)^\rho k_1^\sigma$$

(nella trasformazione è stata usata l'antisimmetria di $e_{\mu\nu\rho\sigma}$). Notando che dei quattro fattori solo k_1 ha la componente temporale, troviamo

$$D = -\omega q\,[(k + k')(k - k')].$$

Sviluppando questa espressione per $t < 0$ e prolungandola quindi analiticamente per $t > 0$, otteniamo

$$D = -\omega q_z \sqrt{s+t}\sqrt{-t} \to \pm\frac{i}{4}\{st[st - 4m^2(s+t)]\}^{1/2}. \qquad (123,17)$$

La scelta del segno necessario in questa espressione può essere stabilita sulla base delle considerazioni seguenti. Poniamo, per semplicità, $B = 1$. Allora si vede che nella regione fisica ($s > 0$, $t < 0$) abbiamo $A_{1s}(s, t) < 0$. Effettivamente, ambedue i denominatori nell'espressione integranda nella (123,6) hanno lo stesso segno (negativo):

$$(q - k_4)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2qk' < -2\omega(\omega - |q|) < 0,$$

$$(q - k_2)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2qk < -2\omega(\omega - |q|) < 0$$

(qui è stato utilizzato il fatto che in forza della presenza di due funzioni δ al numeratore, vale la (123,14) e quindi $|q| < \omega$)[1]. Dalla (123,7) risulta allora chiaro che anche la funzione $A_2(s, t)$ deve essere negativa per $s > 0$, $t > 0$ (se si tiene conto del fatto che, come è evidente dalla (123,16), questa funzione è di segno costante). Questo significa che nella (123,17) occorre prendere il segno superiore, e otteniamo quindi definitivamente

$$A_2 = -\pi^4 \frac{\sum B}{\{st[st - 4m^2(s+t)]\}^{1/2}}. \qquad (123,18)$$

[1]) Questo non è, ovviamente, casuale. In realtà, il fatto che A_{1s} è negativo discende dalla condizione di unitarietà, come è particolarmente evidente per $t = 0$, quando A_{1s} determina la sezione d'urto totale.

Poiché, per il suo stesso senso, la funzione $A_2(s, t)$ deve essere reale, allora oltre alla positività di s e t c'è anche la condizione di positività dell'espressione tra parentesi quadra nel denominatore

$$st - 4m^2(s+t) \geqslant 0, \qquad s > 0, \quad t > 0. \tag{123,19}$$

Queste disuguaglianze delimitano la regione sulla quale deve eseguirsi l'integrazione nell'integrale doppio di dispersione (123,8) (parte tratteggiata nella fig. 22). La frontiera di questa regione è determinata dalla curva

$$st - 4m^2(s+t) = 0$$

con gli asintoti $s = 4m^2$ e $t = 4m^2$.

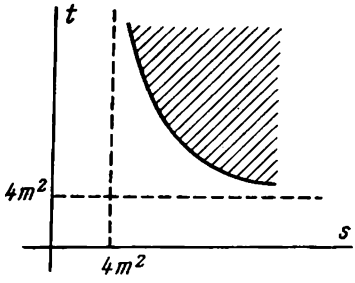


Fig. 22

Le relazioni di dispersione nella forma (123,5) e (123,8) non tengono ancora conto delle condizioni di rinormalizzazione, e, applicati alla lettera, gli integrali risulterebbero divergenti e richiederebbero la regolarizzazione. La condizione di rinormalizzazione per le ampiezze $M(s, t)$ consiste nell'esigere

$$M(0, 0) = 0. \tag{123,20}$$

In effetti, l'ampiezza della diffusione di un fotone su un fotone deve annullarsi quando $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ (e quindi anche $s = t = 0$), poiché $k = 0$ significa che il potenziale è costante nel tempo e nello spazio, e quindi ad esso non corrisponde alcun campo fisico (ritorneremo ancora su questa condizione piú dettagliatamente nel paragrafo seguente).

Per tenere automaticamente conto di questa condizione, occorre scrivere la relazione di dispersione « con una sottrazione » (come abbiamo fatto nel passaggio dalla (108,8) alla (108,13)). A tale relazione si arriverà in modo naturale eseguendo dapprima una trasformazione identica della relazione (123,8) mediante l'identità

$$\frac{1}{(s'-s)(t'-t)} = \frac{st}{(s'-s)(t'-t)s't'} + \frac{s}{(s'-s)s't'} + \frac{t}{(t'-t)s't'} + \frac{1}{s't'}.$$

Sostituendo nell'espressione integranda nella (123,8), otteniamo

$$M(s, t) = \frac{st}{\pi^2}\int\int \frac{A_2(s', t')\,ds'\,dt'}{(s'-s)(t'-t)s't'} + \\ + \frac{s}{\pi}\int \frac{f(s')\,ds'}{(s'-s)s'} + \frac{t}{\pi}\int \frac{g(t')\,dt'}{(t'-t)t'} + C,$$

dove

$$f(s)=\frac{1}{\pi}\int\frac{A_2(s,\ t')}{t'}\,dt',\quad g(t)=\frac{1}{\pi}\int\frac{A_2(s',\ t)}{s'}\,ds',$$

$$C=\frac{1}{\pi^2}\int\int\frac{A_2(s',\ t')}{s't'}\,ds'\,dt'.$$

Queste ultime uguaglianze, tuttavia, hanno senso solo alla condizione che tutti gli integrali convergano. In caso contrario alle funzioni $f(s)$ e $g(t)$ e alla costante C dovrebbero essere assegnati a priori valori dati, corrispondenti alla condizione della rinormalizzazione. Precisamente occorre porre

$$C=0,\quad f(s)=A_{1s}(s,\ 0),\quad g(t)=A_{1t}(0,\ t),$$

(dove A_{1t} è la parte immaginaria di $M(s,\ t)$ che compare con l'aumentare di t per un piccolo valore fissato di s e A_{1s} è tale parte immaginaria che appare con l'aumentare di s per un piccolo t fissato). La prima di queste uguaglianze è evidente: $C = M(0,\ 0) = 0$. La seconda (e analogamente la terza) si ricava confrontando l'uguaglianza

$$M(s,\ 0)=\frac{s}{\pi}\int\frac{f(s')\,ds'}{(s'-s)\,s'}$$

con la relazione di dispersione semplice (123,5), scritta con la « sottrazione » corrispondente alla condizione (123,20):

$$M(s,\ t)=\frac{s}{\pi}\int\frac{A_{1s}(s',\ t)}{(s'-s)\,s'}\,ds'. \tag{123,21}$$

In tal modo, l'espressione definitiva per la doppia relazione di dispersione « con sottrazione » ha la forma:

$$M(s,\ t)=\frac{st}{\pi^2}\int\int\frac{A_2(s',\ t')}{(s'-s)(t'-t)\,s't'}\,ds'\,dt'+$$
$$+\frac{s}{\pi}\int\frac{A_{1s}(s',\ 0)}{(s'-s)\,s'}\,ds'+\frac{t}{\pi}\int\frac{A_{1t}(0,\ t')}{(t'-t)\,t'}\,dt'. \tag{123,22}$$

Se i valori di s, t cadono nella regione d'integrazione, allora gli integrali (123,21-22) vanno intesi, come sempre, nel senso del limite per

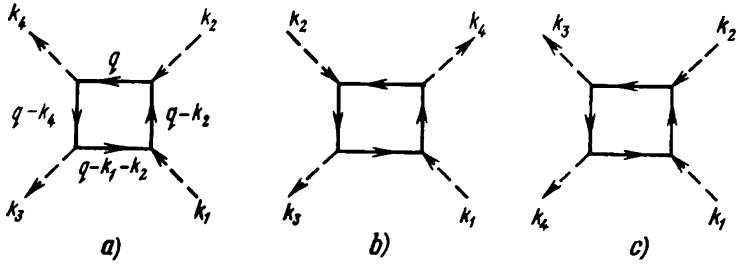
$$s\to s+i0,\quad t\to t+i0. \tag{123,23}$$

§ 124. *Diffusione fotone-fotone*

La diffusione della luce da parte della luce (nel vuoto) è un processo peculiare dell'elettrodinamica quantistica; nell'elettrodinamica classica esso manca in conseguenza della linearità delle equazioni di Maxwell[1]).

[1]) Nel caso limite delle piccole frequenze questo processo venne studiato per la prima volta da *H. Euler* (1936), e nel caso ultrarelativistico da *A. I. Akhiezer* (1937). La soluzione completa del problema venne trovata da *R. Karplus, M. Neumann* (1951).

In elettrodinamica quantistica la diffusione fotone-fotone è descritta come il risultato della creazione da parte dei due fotoni iniziali di una coppia virtuale elettrone-positrone e della successiva annichilazione di questa coppia nei quanti finali. L'ampiezza di questo processo (nella prima approssimazione non nulla) è rappresentata da sei diagrammi « quadrati » con tutte le possibili disposizioni relative dei quattro terminali. Questi sono i diagrammi



(124,1)

e ancora tre diagrammi che differiscono da questi solo per l'inversione della direzione d'aggiramento del cappio elettronico interno. Il contributo di questi ultimi coincide con il contributo dei diagrammi (124,1), e quindi l'ampiezza totale di diffusione è

$$M_{fi} = 2\,(M^{(a)} + M^{(b)} + M^{(c)}), \tag{124,2}$$

dove $M^{(a)}$, $M^{(b)}$, $M^{(c)}$ sono rispettivamente i contributi dei diagrammi a, b, c.

Secondo la (65,19) la sezione d'urto di diffusione è

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}\,|M_{fi}|^2 \frac{do'}{(2\omega)^2}, \tag{124,3}$$

dove do' è l'elemento di angolo solido per la direzione di $\boldsymbol{k}'$ nel sistema di riferimento del baricentro.

Ampiezze invarianti

Separando i fattori di polarizzazione dei quattro fotoni, rappresentiamo M_{fi} nella forma

$$M_{fi} = e_1^{\lambda} e_2^{\mu} e_3^{\nu *} e_4^{\rho *} M_{\lambda\mu\nu\rho}; \tag{124,4}$$

il 4-tensore $M_{\lambda\mu\nu\rho}$ (chiamato tensore di diffusione fotone-fotone) è una funzione dei 4-impulsi di tutti i fotoni. Se scriviamo gli argomenti delle funzioni con segni corrispondenti ai versi dei terminali esterni del diagramma, allora in forza della simmetria del gruppo di diagrammi (124,1) è evidente che il tensore

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,\ k_2,\ -k_3,\ -k_4)$$

sarà simmetrico rispetto a qualsiasi scambio dei quattro argomenti e contemporaneamente dei quattro indici relativi. In forza dell'inva-

rianza di gauge l'ampiezza (124,4) non deve cambiare per la sostituzione $e \to e +$ costante k. In altre parole, deve essere

$$k_1^\lambda M_{\lambda\mu\rho\sigma} = k_2^\mu M_{\lambda\mu\rho\sigma} = \ldots = 0. \tag{124,5}$$

Come è facile intuire, da qui discende, in particolare, che lo sviluppo del tensore di diffusione in potenze dei 4-impulsi k_1, k_2, ... deve iniziarsi a partire dai termini contenenti i prodotti di quattro loro componenti. In tal modo, vale in ogni caso la relazione

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(0,\ 0,\ 0,\ 0) = 0. \tag{124,6}$$

Per evidenziare concretamente le ampiezze invarianti è opportuno, tuttavia, scegliere sin dall'inizio un determinato gauge per i 4-vettori polarizzazione e, piú precisamente il gauge in cui

$$e_1^\mu = (0,\ \boldsymbol{e}_1), \quad e_2^\mu = (0,\ \boldsymbol{e}_2), \ \ldots \tag{124,7}$$

Allora

$$M_{fi} = M_{iklm} e_{1i} e_{2k} e_{3l}^* e_{4m}^*, \tag{124,8}$$

dove M_{iklm} è un tensore tridimensionale.

Come direzioni indipendenti della polarizzazione introduciamo per ciascun fotone una coppia di versori di polarizzazione tridimensionali $\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$, scegliendoli come segue:

$$\boldsymbol{e}_1^{(1)} = \boldsymbol{e}_2^{(1)} = \boldsymbol{e}_3^{(1)} = \boldsymbol{e}_4^{(1)} = \frac{[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']}{|[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']|}, \quad \boldsymbol{e}_1^{(2)} = \frac{1}{\omega}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}_1^{(1)}] = -\boldsymbol{e}_2^{(2)},$$

$$\boldsymbol{e}_3^{(2)} = \frac{1}{\omega}[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_3^{(1)}] = -\boldsymbol{e}_4^{(2)}. \tag{124,9}$$

Dopo di ciò il tensore M_{iklm} può essere rappresentato nella forma

$$M_{iklm} = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} e_{1i}^{(\lambda_1)} e_{2k}^{(\lambda_2)} e_{3l}^{(\lambda_3)} e_{4m}^{(\lambda_4)}; \tag{124,10}$$

le 16 grandezze $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ sono funzioni di s, t, u e svolgono il ruolo di ampiezze invarianti; non tutte e sedici sono, però, indipendenti.

Notiamo, innanzitutto, che $\boldsymbol{e}^{(1)}$ sono vettori assiali, mentre $\boldsymbol{e}^{(2)}$ sono vettori polari. Essendo M_{iklm} un vero tensore tridimensionale e $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ veri scalari dalla richiesta di P invarianza discende che nei gruppi di indici $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ deve comparire un numero pari di indici 1 e 2; tutte le altre quantità $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ si annullano. Inoltre, l'ampiezza M_{fi} deve essere invariante rispetto allo scambio dei due fotoni iniziali o dei due fotoni finali. Se eseguiamo simultaneamente i due scambi ($k_1 \leftrightarrow k_2$, $k_3 \leftrightarrow k_4$), le variabili s, t, u non varieranno, mentre lo scambio negli indici di polarizzazione porterà alle relazioni $M_{1212} = M_{2121}$, $M_{1221} = M_{2112}$.

Infine, l'inversione del tempo significa la sostituzione

$$\boldsymbol{k} \leftrightarrow -\boldsymbol{k}'; \ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2 \leftrightarrow -\boldsymbol{e}_3^*, -\boldsymbol{e}_4^*$$

(cfr. le (71,14), (71,15)); per questa sostituzione i versori (124,9) si trasformano come segue

$$e_1^{(1)},\ e_2^{(1)} \leftrightarrow -e_3^{(1)},\ -e_4^{(1)};\ e_1^{(2)},\ e_2^{(2)} \leftrightarrow e_3^{(2)},\ e_4^{(2)}.$$

La condizione di T invarianza per l'ampiezza di diffusione M_{fi} porta, di conseguenza, all'uguaglianza $M_{1122} = M_{2211}$.

In tal modo, si hanno in tutto 8 ampiezze invarianti non nulle, delle quali 5 indipendenti:

$$M_{1111},\ M_{2222},\ M_{1122} = M_{2211},\ M_{1212} = M_{2121},\ M_{1221} = M_{2112}. \quad (124,11)$$

Se nella (124,3) scriviamo, in luogo di M_{fi}, una delle ampiezze $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$, si ottiene la sezione d'urto di diffusione per date polarizzazioni dei fotoni iniziali e finali. La sezione d'urto, sommata sulle polarizzazioni finali e mediata su quelle iniziali, si ottiene mediante la sostituzione

$$|M_{fi}|^2 \to \frac{1}{4}\{|M_{1111}|^2 + |M_{2222}|^2 + 2|M_{1212}|^2 + \\ + 2|M_{1221}|^2 + 2|M_{1122}|^2\}. \quad (124,12)$$

Le relazioni di simmetria (124,11) legano tra di loro le diverse ampiezze invarianti come funzioni delle stesse variabili. Altre relazioni funzionali sorgono come conseguenza della simmetria per crossing (§ 79), se si tiene presente che l'ampiezza M_{fi} descrive in tutti i canali una stessa reazione (diffusione reciproca di due fotoni) e perciò non deve cambiare per il passaggio da un canale ad un altro.

Il passaggio dal canale s (al quale corrisponde la direzione delle frecce nei diagrammi (124,1)) al canale t si realizza mediante lo scambio degli indici 2 e 3 di tutte le variabili (impulsi e polarizzazioni), cioè con la sostituzione $s \leftrightarrow t$, e con la sostituzione di λ_2 e λ_3 nel tensore di diffusione; il passaggio dal canale s al canale u si realizza mediante un analogo scambio degli indici 2 e 4 (con $s \leftrightarrow u$). In tal modo troviamo le seguenti uguaglianze[1]):

$$\begin{aligned}
&M_{1111}(s, t, u) = M_{1111}(t, s, u) = M_{1111}(u, t, s),\\
&M_{2222}(s, t, u) = M_{2222}(t, s, u) = M_{2222}(u, t, s),\\
&M_{1122}(s, t, u) = M_{1221}(u, t, s) = M_{1212}(t, s, u), \qquad (124,13)\\
&M_{1221}(s, t, u) = M_{1221}(t, s, u),\\
&M_{1212}(s, t, u) = M_{1212}(u, t, s),\\
&M_{1122}(s, t, u) = M_{1122}(s, u, t).
\end{aligned}$$

---

[1]) Poiché le tre variabili s, t, u non sono indipendenti, sarebbe allora sufficiente scrivere in tutte le funzioni due argomenti (ad esempio, i primi due); noi manteniamo qui tutte e tre le variabili solo per una piú chiara comprensione della simmetria rispetto agli scambi delle variabili stesse.

Di fatto è perciò suffioiente calcolare in tutto tre ampiezze invarianti, ad esempio M_{1111}, M_{2222} e M_{1122}.

Le relazioni (124,13) si riferiscono alle ampiezze totali, cioè alle somme dei contributi di tutti e tre i diagrammi (124,1). Questi stessi contributi, però, sono connessi tra di loro da relazioni evidenti da un confronto dei diagrammi. Cosí, il diagramma *b*) si ottiene da *a*) mediante la sostituzione $k_2 \leftrightarrow -k_4$, $e_2 \leftrightarrow e_4^*$, e quindi i loro contributi alle ampiezze invarianti si ottengono l'uno dall'altro con la sostituzione delle variabili $s \leftrightarrow u$ e degli indici $\lambda_2 \leftrightarrow \lambda_4$; analogamente il contributo del diagramma *c*) si ottiene da *a*) operando la sostituzione $t \leftrightarrow u$, $\lambda_3 \leftrightarrow \lambda_4$. Abbiamo perciò

$$\frac{1}{2} M_{1111}(s, t, u) = M^{(a)}_{1111}(s, t, u) + M^{(a)}_{1111}(u, t, s) + M^{(a)}_{1111}(s, u, t),$$

$$\frac{1}{2} M_{2222}(s, t, u) = M^{(a)}_{2222}(s, t, u) + M^{(a)}_{2222}(u, t, s) + \\ + M^{(a)}_{2222}(s, u, t), \qquad (124,14)$$

$$\frac{1}{2} M_{1122}(s, t, u) = M^{(a)}_{1122}(s, t, u) + M^{(a)}_{1221}(u, t, s) + M^{(a)}_{1122}(s, u, t).$$

In tal modo, è sufficiente calcolare soltanto i contributi di un solo diagramma nelle quattro ampiezze: $M^{(a)}_{1111}$, $M^{(a)}_{2222}$, $M^{(a)}_{1221}$, $M^{(a)}_{1122}$; le prime tre di queste funzioni sono esse stesse, a loro volta, simmetriche in s e t, come è chiaro dalla forma del diagramma *a*) (simmetrico rispetto allo scambio dei terminali k_2 e k_3).

Calcolo delle ampiezze

L'integrale $M^{(a)}_{fi}$, corrispondente al diagramma (124,1,*a*), ha la forma (123,4), dove

$$B^{(a)} = \frac{e^4}{\pi^2} \operatorname{Tr} \{\hat{e}_1 (\hat{q} - \hat{k}_2 + m) \hat{e}_2 (\hat{q} + m) e_4^* \times \\ \times (\hat{q} - \hat{k}_4 + m) \hat{e}_3^* (\hat{q} - \hat{k}_1 - \hat{k}_2 + m)\}. \quad (124,15)$$

Designiamo con $B^{(a)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ il valore di questa espressione, nella quale per ciascuno dei vettori $e = (0, \boldsymbol{e})$ in qualità di $\boldsymbol{e}$ è scelto uno dei versori $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$ (124,9); l'integrale (123,4) con tale B è $M^{(a)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$.

Gli integrali (123,4) divergono logaritmicamente. In accordo con la condizione (124,6) la loro regolarizzazione si esegue mediante la

sottrazione del valore per $k_1 = k_2 = \ldots = 0$[1]). Il calcolo degli integrali regolarizzati è, tuttavia, particolarmente complicato.

Il metodo piú naturale per calcolare le ampiezze della diffusione fotone-fotone si basa sull'uso della rappresentazione di Mandelstam (*B. de Tollis*, 1964). Questo metodo tiene conto nella maniera piú completa della simmetria dei diagrammi ed esclude quasi totalmente le difficoltà delle integrazioni. Illustriamo il procedimento sull'esempio dell'ampiezza M_{1111}.

La funzione $A_{1s}^{(a)}(s, t)$ si calcola secondo la (123,6). Per la presenza nell'integrale di due funzioni δ, a noi serve il valore di B solo per

$$l_1^2 = q^2 = m^2, \quad l_4^2 = (q - k_1 - k_2)^2 = m^2. \tag{124,16}$$

Il calcolo secondo le regole standard porta allora al risultato

$$B_{1111}^{(a)} = \frac{4e^4}{\pi^2}\left\{8\,(e^{(1)}q)^4 - \left[4\,(e^{(1)}q)^2 + \frac{s}{2}\right](k_2 q + k_4 q) + \right.$$
$$\left. + 2\,(k_2 q)\,(k_4 q) - \frac{st}{4}\right\}. \tag{124,17}$$

A noi serve (per poterlo sostituire poi nella (123,22)) il valore di A_{1s} solo per $t = 0$. Questa uguaglianza significa che $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$ e $k_2 = k_4$. Allora l'integrale (123,6) assume la forma

$$[A_{1s}^{(a)}(s, 0)]_{1111} = -\frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}}\int \frac{B_{1111}^{(a)}\, do_q}{[(q - k_2)^2 - m^2]^2} \tag{124,18}$$

(cfr. deduzione della (112,10)). Introducendo l'angolo ϑ formato da $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{k}$ e l'angolo φ formato da $\boldsymbol{e}^{(1)}$ e dalla proiezione di $\boldsymbol{q}$ nel piano perpendicolare al vettore $\boldsymbol{k}$, abbiamo (per $t = 0$)

$$qk_2 = qk_4 = \omega\,(\omega - |\boldsymbol{q}|\cos\vartheta), \quad qe^{(1)} = -|\boldsymbol{q}|\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$
$$(q - k_2)^2 - m^2 = -2\omega\,(\omega - |\boldsymbol{q}|\cos\vartheta).$$

---

[1]) Notiamo che nella somma dei contributi di tutti i diagrammi le parti divergenti dei diagrammi si elidono. Di ciò è facile convincersi notando che la forma asintotica dell'integrale (per $q \to \infty$) è

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}^{(a)} \sim \int \mathrm{Tr}\,(\gamma_\nu \hat{q} \gamma_\rho \hat{q} \gamma_\mu \hat{q} \gamma_\lambda \hat{q})\,\frac{d^4 q}{(q^2)^4}.$$

Mediando sulle direzioni di q (cfr. la (127,10)), la traccia è facilmente calcolabile e dà

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}^{(a)} \sim (g_{\lambda\mu} g_{\nu\rho} + g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} - 2 g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) \int \frac{d^4 q}{(q^2)^2}.$$

La sommatoria sui diagrammi significa la simmetrizzazione di questa espressione sugli indici λ, μ, ν, ρ, a risultato della quale l'espressione si annulla. Sottolineiamo, tuttavia, che questo ha, in un certo senso, un carattere di casualità e non elimina l'esigenza della regolarizzazione, anche se questa si riduce, in tal modo, alla sottrazione di una quantità finita.

Dopo la sostituzione nelle (124,17-18) l'integrale in $do_q = \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ si valuta in modo elementare e dà come risultato

$$[A_{1s}^{(a)}(s,\,0)]_{1111} = -4\pi e^4 \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{16m^2}{s}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}-\left(1+\frac{8m^2}{s}\right)\operatorname{Arch}\frac{\sqrt{s}}{2m}\right]. \qquad (124,19)$$

La funzione $[A_{1t}^{(a)}(0,\,t)]_{1111}$, in forza della simmetria di $M_{1111}^{(a)}$, si differenzia dalla (124,19) solo per la sostituzione $s \to t$.

Per calcolare la funzione $A_2^{(a)}(s,\,t)$ è necessario, secondo la (123,18), il valore di $B^{(a)}$ per valori della (123,15) che soddisfino, oltre la (124,16), anche le condizioni $(q-k_2)^2 = m^2$, $(q-k_4)^2 = m^2$; allora

$$k_2 q = k_4 q = 0, \quad (e^{(1)}q)^2 = q_z^2 = \frac{st-4m^2(s+t)}{s+t}.$$

La sostituzione nella (124,17) e quindi della (124,17) nella (123,18) dà

$$[A_2^{(a)}(s,\,t)]_{1111} = 8\pi^2 e^4 \frac{\dfrac{st}{4}-8\left[\dfrac{st-4m^2(s+t)}{4(s+t)}\right]^2}{\{st\,[st-4m^2(s+t)]\}^{1/2}}. \qquad (124,20)$$

Dopo il calcolo delle funzioni A_{1s}, A_{1t}, A_2 la relazione di dispersione (123,22) dà l'ampiezza M direttamente sotto forma di integrali definiti semplici e doppi. Riportiamo qui, per eventuali rimandi, il risultato finale per tutte e quattro le ampiezze $M^{(a)}$, sufficienti, secondo la (124,14), per il calcolo completo delle ampiezze di diffusione[1])

$$\frac{1}{4\alpha^2}M_{1111}^{(a)}(s,\,t) = \frac{1}{3}+\frac{s-t}{s+t}[B(s)-B(t)]-$$
$$-\left\{1-4\frac{t-2s}{s(s+t)}-\frac{2st}{(s+t)^2}\right\}T(s)-\left\{1-4\frac{s-2t}{t(s+t)}-\frac{2st}{(s+t)^2}\right\}\times$$
$$\times T(t)+\left\{1-\frac{2}{st}\left(4-\frac{st}{s+t}\right)^2\right\}I(s,\,t),$$

$$\frac{1}{4\alpha^2}M_{2222}^{(a)}(s,\,t) = -1+\frac{s-t}{s+t}[B(s)-B(t)]-$$
$$-\left\{1+\frac{4t}{s(s+t)}-\frac{2st}{(s+t)^2}\right\}T(s)-\left\{1+\frac{4s}{t(s+t)}-\right.$$
$$\left.-\frac{2st}{(s+t)^2}\right\}T(t)+\left\{1-\frac{2st}{(s+t)^2}\right\}I(s,\,t), \qquad (124,21)$$

---

[1]) Per alcuni dettagli delle trasformazioni degli integrali, per le diverse rappresentazioni delle funzioni trascendenti B, T, I e le espressioni limite vedi B. de Tollis, Nuovo Cimento 32, 757 (1964); 35, 1182 (1965).

$$\frac{1}{4\alpha^2} M^{(a)}_{1122}(s, t) = -\frac{5}{9} + \frac{s-t}{s+t} B(s) + \left\{ \frac{5}{3} + \frac{16}{3t} - \right.$$
$$\left. - \frac{2s}{s+t} \right\} B(t) - \left\{ 1 + \frac{4}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} [T(s) + T(t)] +$$
$$+ \left\{ 1 - \frac{4}{t} + \frac{8}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} I(s, t),$$
$$\frac{1}{4\alpha^2} M^{(a)}_{1221}(s, t) = \frac{1}{9} - \left\{ \frac{5}{3} + \frac{16}{3s} - \frac{2t}{s+t} \right\} B(s) -$$
$$- \left\{ \frac{5}{3} + \frac{16}{3t} - \frac{2s}{s+t} \right\} B(t) + \left\{ 1 + \frac{4}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} \times$$
$$\times [T(s) + T(t)] - \left\{ 1 - \frac{4}{s} - \frac{4}{t} + \frac{8}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} I(s, t).$$

Qui $B(s)$, $T(s)$, $I(s, t)$ designano le seguenti funzioni:

$$B(s) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4}{s}} \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{-s}}{2} - 1, & s < 0, \\ \sqrt{\frac{4}{s} - 1} \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{s}}{2} - 1, & 0 < s < 4, \\ \sqrt{1 - \frac{4}{s}} \operatorname{Arch} \frac{\sqrt{s}}{2} - 1 - \frac{i\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{s}}, & 4 < s; \end{cases}$$

(124,22)

$$T(s) = \begin{cases} \left(\operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{-s}}{2} \right)^2, & s < 0, \\ -\left(\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{s}}{2} \right)^2, & 0 < s < 4, \\ \left(\operatorname{Arch} \frac{\sqrt{s}}{2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{4} - i\pi \operatorname{Arch} \frac{\sqrt{s}}{2}, & 4 < s; \end{cases}$$

$$I(s, t) = I(t, s) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dy}{y(1-y) - \frac{s+t}{st}} \{ \ln [1 - i0 - sy(1-y)] +$$
$$+ \ln [1 - i0 - ty(1-y)] \}.$$

(Per semplificare la scrittura delle formule, nelle espressioni (124,21-22), e solo in esse, le lettere s e t designano i rapporti s/m^2, $/m^2$.)

Sezione d'urto di diffusione

Al caso limite delle piccole frequenze ($\omega \ll m$) corrispondono valori piccoli delle variabili s, t, u. I primi termini dello sviluppo delle

ampiezze invarianti in queste variabili sono

$$M_{1111} = M_{2222} = \frac{4e^4}{45m^4}(s^2 + t^2 + u^2),$$
$$M_{1122} = \frac{e^4}{45m^4}(-4s^2 + 7t^2 + 7u^2). \tag{124,23}$$

La sezione d'urto differenziale per la diffusione di fotoni non polarizzati calcolata secondo queste ampiezze è (in unità ordinarie)

$$d\sigma = \frac{139}{4\pi^2(90)^2}\alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\omega}{mc^2}\right)^6 (3 + \cos^2\theta)^2\, do' \tag{124,24}$$

e la sezione d'urto totale[1])

$$\sigma = \frac{973}{10125\pi}\alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\omega}{mc^2}\right)^6 = 0{,}030\alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\omega}{mc^2}\right)^6, \quad \hbar\omega \ll mc^2. \tag{124,25}$$

Nel caso opposto, ultrarelativistico, la sezione d'urto totale per la diffusione di fotoni non polarizzati è

$$\sigma = 4{,}7\alpha^4 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2, \quad \hbar\omega \gg mc^2. \tag{124,26}$$

La dipendenza di questa sezione d'urto dalla frequenza è prevedibile sulla base di considerazioni di dimensione: per $\hbar\omega \gg mc^2$ la sezione d'urto totale non deve dipendere da m, e allora $\alpha^4 c^2/\omega^2$ è l'unica espressione della dimensione necessaria, proporzionale a e^8; il coefficiente della (124,26) è il risultato di calcoli numerici.

Infine, riportiamo la sezione d'urto differenziale di diffusione ad angoli piccoli nel caso ultrarelativistico:

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{\pi^2\omega^2}\ln^4\frac{1}{\theta}\, do, \quad \frac{m}{\omega} \ll \theta \ll 1. \tag{124,27}$$

Questa espressione è valida con precisione logaritmica: il termine successivo dello sviluppo contiene il grande logaritmo con esponente inferiore di una unità. La formula (124,27) non è applicabile qualora si voglia eseguire il passaggio al limite $\theta = 0$ (diffusione in avanti). Al suo posto abbiamo qui

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{\pi^2\omega^2}\ln^4\frac{\omega}{m}\, do, \quad \theta \ll \frac{m}{\omega}. \tag{124,28}$$

Questa espressione è facile da ottenere mediante le formule generali (124,21), ponendo in esse $t = 0$ e notando che per $s \gg 1$ la potenza piú alta (la seconda) del grande logaritmo è contenuta solo nella funzione

$$T\left(\frac{s}{m^2}\right) \approx \frac{1}{4}\ln^2\frac{s}{m^2} \approx \ln^2\frac{\omega}{m}.$$

Con questa precisione sono differenti da zero solo le ampiezze

$$M_{1111} = M_{2222} = M_{1212} = -16e^4\ln^2\frac{\omega}{m}.$$

---

[1]) Nel passare da $d\sigma$ a σ occorre introdurre il fattore 1/2, che tiene conto dell'identità dei due fotoni finali.

Questo significa, in particolare, che in questo caso la polarizzazione del fotone non cambia per la diffusione.

Nella fig. 23 è rappresentato il grafico della dipendenza della sezione d'urto di diffusione totale dalla frequenza (in scala logaritmica su ambedue gli assi). La sezione d'urto decresce sia andando verso

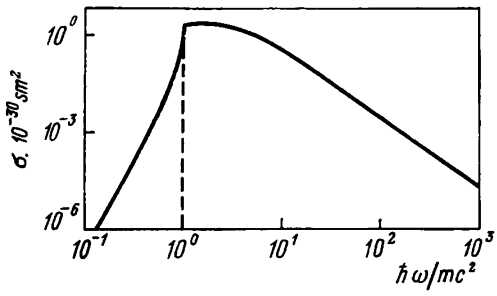


Fig. 23

le frequenze piccole che verso quelle grandi e raggiunge il massimo per $\omega \approx 1{,}5\ m$. La brusca svolta della curva per $\omega = m$ riflette un cambiamento del carattere del processo in relazione al fatto che compare la possibilità di produzione di coppie elettroniche reali.

Caso delle piccole frequenze

Nel caso delle piccole frequenze ($\omega \ll m$) l'ampiezza della diffusione fotone-fotone si può ottenere anche in un altro modo, partendo dai termini correttivi nella funzione di Lagrange di un campo elettromagnetico debole (vedi piú avanti, § 126).

La piccola correzione nell'hamiltoniano d'interazione V′ differisce solo per il segno dalla piccola correzione nel lagrangiano. Secondo la (126,19) abbiamo

$$V' = -\frac{e^4}{45\cdot 8\pi^2 m^4}\int \{(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)^2+7\,(\mathbf{EH})^2\}\,d^3x. \qquad (124,29)$$

Poiché questo operatore è del quarto ordine rispetto al campo, esso ha elementi di matrice relativi alla transizione che ci interessa già in prima approssimazione.

Per eseguire il calcolo occorre fare nella (124,29) le seguenti sostituzioni:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} = \sqrt{4\pi}\sum_{k\lambda}(\mathbf{c}_{k\lambda}\mathbf{e}_{k\lambda}e^{-ikx}+\mathbf{c}^{+}_{k\lambda}\mathbf{e}^{*}_{k\lambda}e^{ikx}) \qquad (124,30)$$

(λ designa la polarizzazione) dopo di che l'elemento della matrice S si calcola come segue:

$$S_{fi} = -i\langle f|\int V'\,dt\,|i\rangle = -i\langle 0|\,c_{k_3\lambda_3}\times$$
$$\times\, c_{k_4\lambda_4}\int V'\,dt\,c^{+}_{k_1\lambda_1}c^{+}_{k_2\lambda_2}\,|0\rangle \qquad (124,31)$$

(cfr. §§ 73, 78). Con la normalizzazione di **A** definita nella (124,30), l'ampiezza di diffusione M_{fi} si ottiene direttamente da S_{fi} secondo la relazione

$$S_{fi} = i\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_3+k_4-k_1-k_2)\,M_{fi} \qquad (124,32)$$

(cfr. § 65). Il valore medio nella (124,31) si calcola secondo il teorema di Wick mediante la (78,3), dove le contrazioni vanno operate, naturalmente, solo tra gli operatori « esterni » $c_{k\lambda}$, $c^{+}_{k\lambda}$ e gli operatori interni **A**.

Riportiamo, per eventuali rimandi, l'ampiezza di diffusione espressa in forma esplicita attraverso le polarizzazioni e le direzioni dei fotoni:

$$M_{fi} = \frac{4}{45}\frac{\alpha^2\omega^4}{m^4}(7R-10S),$$
$$R = P(1234)+P(1324)+P(1432), \qquad (124,33)$$
$$S = Q(1234)+Q(1324)+Q(1432),$$

$$\begin{aligned}
P(1234) = {} & (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_3)+(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_2)- \\
& -(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)\{(1-\boldsymbol{n}_3\boldsymbol{n}_4)[(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_1)+(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_2)]- \\
& -(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_3)-(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_1)- \\
& -(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_2)-(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_3)\}- \\
& -(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)\{(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)[(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_3)+(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_4)]- \\
& -(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)-(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_3)- \\
& -(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)-(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_4)\}+ \\
& +(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)[(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_4)(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)+(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3)(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_4)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(1234) = {} & (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_3)+ \\
& +(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_3)+ \\
& +(1-\boldsymbol{n}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)+ \\
& +(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)(1-\boldsymbol{n}_3\boldsymbol{n}_4),
\end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_3 = -\boldsymbol{n}_4 = \boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$, $\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{k}'/\omega$.

§ 125. *Diffusione coerente di un fotone nel campo di un nucleo*

Un altro effetto non lineare (oltre alla diffusione di un fotone su un altro fotone) è costituito dalla diffusione coerente (elastica) di un fotone nel campo elettrico costante creato da un nucleo fisso. Questo processo è descritto anch'esso dai diagrammi quadrati (124,1), nei quali, però, due linee fotoniche vengono sostituite da linee del campo esterno[1]). Uno studio esauriente di questo processo a tutt'oggi non esiste. Di conseguenza, noi ci limiteremo qui ad alcune stime qualitative.

In forza delle richieste di invarianza di gauge l'ampiezza di diffusione per $\omega \to 0$ deve contenere i prodotti delle componenti dei 4-impulsi del fotone iniziale (k) e del fotone finale (k') (analogamente a come lo sviluppo dell'ampiezza della diffusione fotone-fotone inizia con prodotti di quattro componenti dei 4-impulsi di tutti i fotoni). In altre parole, l'ampiezza di diffusione di un fotone di piccola frequenza è proporzionale a ω^2. Tenendo inoltre conto del fatto che l'ampiezza contiene il campo esterno (il campo del nucleo di carica Ze) al secondo ordine, concludiamo che la sezione d'urto di diffusione è

$$d\sigma \sim Z^4\alpha^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 do \quad (\omega \ll m). \tag{125,1}$$

La dipendenza dalla frequenza si trova, naturalmente, in accordo con le conclusioni generali del § 60[2]).

Per una stima della sezione d'urto alle alte frequenze usiamo il teorema ottico (§ 72). Lo stato intermedio che compare nel secondo membro della relazione di unitarietà è, nel caso considerato, uno stato con una coppia elettrone-positrone (a tale stato corrisponde il taglio dei diagrammi lungo due linee elettroniche interne tra due terminali fotonici). Di conseguenza, il teorema ottico lega l'ampiezza di diffusione elastica del fotone ad angolo zero con la sezione d'urto totale di creazione di una coppia di fotoni nel campo del nucleo σ_{cop}. Definendo l'ampiezza $f(\omega, \theta)$ di diffusione ad angolo θ in modo tale che la sezione d'urto di diffusione sia $d\sigma = |f|^2 do$ (cfr. la (72,5)), abbiamo

$$\operatorname{Im} f(\omega, 0) = \frac{\omega}{4\pi}\sigma_{\text{cop}}.$$

---

[1]) I diagrammi con una linea fotonica esterna virtuale e tre reali corrispondono a processi di disintegrazione in due fotoni di un fotone, che si trova in un campo esterno (e al processo inverso di « fusione » di due fotoni in uno).

[2]) Notiamo che il coefficiente della (125,1) non è calcolabile mediante la funzione di Lagrange, trovata nel § 126, del campo elettromagnetico omogeneo (come, invece, è stato possibile fare nel caso della diffusione fotone-fotone). La ragione di questo consiste nel fatto che, nel processo considerato, sono importanti le distanze dal nucleo $r \sim 1/m$, sulle quali il campo del nucleo non può essere considerato omogeneo.

La sezione d'urto σ_{cop} è differente da zero, ovviamente, solo per $\omega > 2m$. Nel caso ultrarelativistico, prendendo σ_{cop} dalla (92,8) e limitandoci ad una precisione logaritmica, otteniamo

$$\operatorname{Im} f(\omega, 0) = \frac{7}{9\pi}(Z\alpha)^2 r_e \frac{\omega}{m} \ln \frac{\omega}{m} \quad (\omega \gg m). \tag{125,2}$$

La parte reale dell'ampiezza di diffusione si ricava dalla parte immaginaria mediante la relazione di dispersione. In questo caso, nell'integrale di dispersione rispetto alle frequenze risulta importante il campo delle frequenze $\omega \sim m$, dove il grande logaritmo in $\operatorname{Im} f(\omega, 0)$ manca. Perciò, con la stessa precisione logaritmica, la parte reale dell'ampiezza è trascurabile (per $\omega \gg m$) rispetto alla parte immaginaria, e per la sezione d'urto di diffusione ad angolo zero abbiamo

$$d\sigma|_{\theta=0} = \frac{49}{81\pi^2}(Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^2 \ln^2 \frac{\omega}{m}\, do \quad (\omega \gg m) \tag{125,3}$$

(*F. Rohrlich, R. L. Gluckstern*, 1952).

Il termine logaritmico usato qui nella sezione d'urto di creazione di coppie da parte di un fotone proviene dal dominio degli angoli molto piccoli (§ 92). Solo limitatamente a questo stesso campo ($\theta \lesssim (m/\omega)^2$) può essere applicata la formula (125,3); questo campo dà, perciò, un contributo molto piccolo nella sezione d'urto totale di diffusione. Il contributo fondamentale alla sezione d'urto totale è dato (come anche nel processo di creazione di coppie) dal dominio degli angoli $\theta \lesssim m/\omega$; questo si può facilmente capire sulla base della relazione generale di unitarietà (per angoli non nulli), che lega tra loro le ampiezze di diffusione di un fotone e di creazione di coppie da parte di un fotone. In questa regione, tuttavia, il termine logaritmico manca, e quindi la sezione d'urto totale di diffusione è

$$\sigma \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^2 \theta^2 \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \tag{125,4}$$

(*H. A. Bethe, F. Rohrlich*, 1952).

§ 126. *Correzioni radiative alle equazioni del campo elettromagnetico*

Nella quantizzazione del campo elettrone-positrone (§ 25) abbiamo visto che nell'espressione per l'energia del vuoto compare una costante infinita, che può essere scritta nella forma[1])

$$\mathscr{E}_0 = -\sum_{p\sigma} \varepsilon_{p\sigma}^{(-)}, \tag{126,1}$$

[1]) Usiamo qui la lettera $\mathscr{E}$ in luogo di E al fine di evitare confusione con la notazione dell'intensità del campo elettrico.

dove $-\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}$ sono le frequenze negative delle soluzioni dell'equazione di Dirac. Di per se stessa, questa costante non ha alcun senso fisico, poiché l'energia del vuoto è nulla per definizione. D'altro canto, in presenza del campo elettromagnetico i livelli energetici $\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}$ variano. Queste variazioni sono finite ed hanno un senso fisico ben determinato. Esse descrivono la dipendenza delle proprietà dello spazio dal campo e cambiano le equazioni del campo elettromagnetico nel vuoto.

Il cambiamento delle equazioni del campo si esprime nel cambiamento della lagrangiana relativa. La densità lagrangiana L è un invariante relativistico e quindi può essere funzione solo degli invarianti $\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2$ e $\boldsymbol{EH}$. L'espressione ordinaria

$$L_0 = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2) \tag{126,2}$$

è il primo termine dello sviluppo dell'espressione generale in potenze degli invarianti.

Troveremo ora la lagrangiana per il caso in cui i campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ variano nello spazio e nel tempo con una lentezza tale da poter essere considerati come omogenei e costanti. Per avere queste condizioni è necessario che la frequenza ω e il vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ caratteristici della variazione del campo soddisfino le disuguaglianze

$$\omega \ll m, \quad |\boldsymbol{k}| \ll m. \tag{126,3}$$

In tal caso si può considerare che L non contenga derivate dei campi.

Tuttavia, perché il problema posto abbia senso è necessario ancora supporre che il campo elettrico sia sufficientemente debole. La ragione di questo sta nel fatto che un campo elettrico omogeneo può creare coppie dal vuoto. Lo studio del campo in quanto sistema chiuso è ammissibile solo se la probabilità di creazione di coppie è sufficientemente piccola. Piú precisamente, deve valere la disuguaglianza

$$|\boldsymbol{E}| \ll \frac{m^2}{e}\left(=\frac{m^2c^3}{e\hbar}\right) \tag{126,4}$$

(la variazione dell'energia di una carica e sulla distanza $\hbar/mc$ deve essere piccola rispetto a mc^2). Vedremo nel seguito (vedi anche problema 2), che in tal caso la probabilità di creazione di coppie è esponenzialmente piccola.

Se oltre al campo elettrico c'è anche un campo magnetico, allora, generalmente parlando, si può scegliere un sistema di riferimento nel quale $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ siano paralleli. In tal caso, il campo magnetico non influisce sul moto di una carica nella direzione di $\boldsymbol{E}$. È proprio in questo sistema di riferimento (nei calcoli che seguiranno si suppone di lavorare proprio in tale sistema) che deve essere soddisfatta la condizione (126,4).

Iniziamo il calcolo della lagrangiana col determinare la variazione dell'energia del vuoto W'. La quantità W' è data dalla variazione

dovuta al campo di « energia nulla » (126,1). Da questa quantità, tuttavia, devono ancora venire sottratti i valori medi dell'energia potenziale degli elettroni negli « stati » ad energia negativa. Quest'ultima sottrazione significa semplicemente che la carica totale del vuoto è nulla per definizione.

L'energia nulla in presenza del campo è

$$\mathscr{E}_0 = -\sum_{p\sigma} \varepsilon_{p\sigma}^{(-)} = \sum_{p\sigma} \int \psi_{p\sigma}^{(-)*}\, i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{p\sigma}^{(-)} d^3x,$$

dove $\psi_{p\sigma}^{(-)}$ sono le soluzioni a frequenza negativa dell'equazione di Dirac nel campo dato. Supporremo che l'integrazione venga eseguita su un volume unitario, e che le funzioni d'onda siano normalizzate all'unità in questo volume; allora $\mathscr{E}_0$ è l'energia nell'unità di volume. Secondo quanto detto sopra, occorre sottrarre da $\mathscr{E}_0$ la quantità

$$U_0 = \sum_{p\sigma} \int \psi_{p\sigma}^{(-)*} e\varphi \psi_{p\sigma}^{(-)} d^3x,$$

dove $\varphi = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{r}$ è il potenziale del campo omogeneo. Ma, secondo il teorema sulla derivazione di un operatore rispetto ad un parametro (vedi III (11,16)),

$$U_0 \equiv \boldsymbol{E} \sum_{p\sigma} \int \psi_{p\sigma}^{(-)*} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{E}} \psi_{p\sigma}^{(-)} d^3x = -\boldsymbol{E} \sum_{p\sigma} \frac{\partial \varepsilon_{p\sigma}^{(-)}}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E} \frac{\partial \mathscr{E}_0}{\partial \boldsymbol{E}}.$$

In tal modo, per la variazione totale di densità energetica del vuoto abbiamo

$$W' = \left(\mathscr{E}_0 - \boldsymbol{E} \frac{\partial \mathscr{E}_0}{\partial \boldsymbol{E}}\right) - \left(\mathscr{E}_0 - \boldsymbol{E} \frac{\partial \mathscr{E}_0}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}=0}. \qquad (126,5)$$

Leghiamo ora W' con la variazione della densità lagrangiana L' ($L = L_0 + L'$). A tal fine usiamo la formula generale

$$W = \sum \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L,$$

dove q sono le « coordinate generalizzate » del campo (vedi II, § 32). Per il campo elettromagnetico il ruolo delle quantità q è svolto dai potenziali $\boldsymbol{A}$ e φ. Poiché

$$\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla\varphi, \quad \boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}, \qquad (126,6)$$

allora di tutte le «velocità » $\dot{q}$, in L entra solo $\dot{\boldsymbol{A}}$, e la derivazione rispetto a $\dot{\boldsymbol{A}}$ è equivalente alla derivazione rispetto a $\boldsymbol{E}$. Perciò

$$W' = \boldsymbol{E} \frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{E}} - L'. \qquad (126,7)$$

Confrontando la (126,5) con la (126,7), troviamo

$$L' = -[\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0|_{E=H=0}]. \tag{126,8}$$

In tal modo, il calcolo di L' si riconduce al calcolo della somma (126,1)

Consideriamo dapprima il caso in cui si ha solo il campo magnetico. I livelli energetici « negativi » di un elettrone (carica $e = -|e|$) nel campo omogeneo costante $H_z = H$ sono

$$-\varepsilon_p^{(-)} = -\sqrt{m^2 + |e|H(2n-1+\sigma) + p_z^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \sigma = \pm 1 \tag{126,9}$$

(vedi problema al § 32). Per calcolare la somma teniamo presente che il numero di stati nell'intervallo dp_z e

$$\frac{|e|H}{2\pi}\frac{dp_z}{2\pi}$$

(vedi III, § 112); il primo fattore è il numero di stati con differenti valori di p_x, dai quali l'energia non dipende. Inoltre, tutti i livelli, ad eccezione del solo livello a $n = 0$, $\sigma = -1$, sono doppiamente degeneri: coincidono i livelli n, $\sigma = +1$ e $n+1$, $\sigma = -1$. Quindi

$$-\mathscr{E}_0 = \frac{|e|H}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sqrt{m^2+p_z^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{m^2+2|e|Hn+p_z^2}\right\}dp_z. \tag{126,10}$$

La divergenza dell'integrale nella (126,10) viene rimossa calcolando L' (126,8) dalla sottrazione del valore della somma per $H = 0$. Per operare questa « rinormalizzazione » è comodo calcolare dapprima l'espressione convergente

$$\mathfrak{D} \equiv -\frac{\partial^2\mathscr{E}_0}{(\partial m^2)^2} = -\frac{|e|H}{2(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\left\{(m^2+p_z^2)^{-3/2} + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty}(m^2+2|e|Hn+p_z^2)^{-3/2}\right\}dp_z =$$

$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\left\{\frac{1}{m^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2+2|e|Hn}\right\}.$$

La sommatoria entro parentesi graffa può essere ridotta alla somma di una progressione geometrica nel modo seguente:

$$\Phi = -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int_0^\infty e^{-m^2\eta}\left[2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2|e|Hn\eta} - 1\right]d\eta =$$

$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int_0^\infty e^{-m^2\eta}\left[\frac{2}{1-e^{-2|e|H\eta}} - 1\right]d\eta =$$

$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int_0^\infty e^{-m^2\eta}\,\mathrm{cth}\,(|e|H\eta)\,d\eta. \qquad (126,11)$$

Per trovare L' occorre ora integrare due volte Φ rispetto a m^2, e sottrarre quindi il valore della quantità ottenuta per $H = 0$. Troviamo

$$L' = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^3}\{\eta|e|H\,\mathrm{cth}\,(\eta|e|H) - 1\}\,d\eta + c_1 + c_2 m^2, \qquad (126,12)$$

dove c_1 e c_2 dipendono da H, ma non dipendono da m^2.

Da considerazioni di dimensione e di parità in $\boldsymbol{H}$ è evidente che L', come funzione di H e di m, deve avere la forma

$$L' = m^4 f\left(\frac{H^2}{m^4}\right).$$

Di conseguenza, in L' non devono comparire termini dispari in m^2, e perciò $c_2 = 0$. Il coefficiente c_1, invece, si può determinare dalla condizione che lo sviluppo di L' in potenze di H^2 deve iniziare con un termine $\sim H^4$. Infatti, un termine $\sim H^2$ in L' significherebbe semplicemente una variazione del coefficiente nella lagrangiana originaria $L_0 = -H^2/8\pi$. Ma ciò sarebbe, in sostanza, una ridefinizione dell'intensità del campo, e quindi, della carica. Perciò l'eliminazione dei termini $\sim H^2$ significa la rinormalizzazione della carica. È facile verificare che, a tale scopo, occorre porre

$$c_1 = \frac{H^2e^2}{3\cdot 8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta}\,d\eta.$$

Infine, operando ancora nella (126,12) la sostituzione di variabile $m^2\eta \to \eta$, otteniamo definitivamente

$$L'(H;\,E=0) = \frac{m^4}{8\pi^2}\int_0^\infty \left\{-\eta b\,\mathrm{cth}\,b\eta + 1 + \frac{b^2\eta^2}{3}\right\} e^{-\eta}\frac{d\eta}{\eta^3}, \qquad (126,13)$$

dove $b = |e|\,H/m^2$.

Torniamo ora al caso generale, quando accanto al campo magnetico c'è anche un campo elettrico parallelo $\boldsymbol{E}$, che soddisfa la condizione (126,4).

Per calcolare L' in questo caso non è, tuttavia, necessario risolvere nuovamente il problema della determinazione dei livelli energetici $(\varepsilon_p^{(-)})$ di un elettrone nel campo. È sufficiente notare che se cerchiamo la funzione d'onda, soluzione dell'equazione del secondo ordine (32,7), sotto forma di prodotto

$$\psi = \psi_E(z)\, e^{ip_x x} \chi_{n\sigma}(y)$$

(dove $\chi_{n\sigma}(y)$ è la funzione d'onda nel campo magnetico per $\boldsymbol{E} = 0$ e $p_z = 0$), allora la massa m e il campo H entreranno nell'equazione rispetto a $\psi_E(z)$ solo nella combinazione

$$m^2 + |e| H (2n + 1 + \sigma).$$

Se teniamo ora conto del fatto che la sommatoria su p_x (dal quale i livelli energetici non dipendono) dà, come prima, il fattore $|e| H/2\pi$, allora, da considerazioni di dimensione, possiamo scrivere la quantità

$$\Phi(H, E) \equiv \frac{\partial^2 L'}{(\partial m^2)^2}$$

nella forma

$$\Phi(H, E) = -\frac{|e| H}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{F\left(\dfrac{m^2 + |e| H (2n+1+\sigma)}{|e| H}\right)}{m^2 + |e| H (2n+1+\sigma)} =$$

$$= -\frac{b}{8\pi^2}\left\{F\left(\frac{1}{a}\right) + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F\left(\dfrac{1+2bn}{a}\right)}{1+2bn}\right\}, \qquad a = \frac{|e| E}{m^2} \qquad (126,14)$$

(ciascun termine di questa somma è la quantità $-d^2\varepsilon_p^{(-)}/(dm^2)^2$, sommata su tutti i numeri quantici, eccetto n). Qui F è una funzione per ora ignota, che noi cercheremo sulla base di considerazioni di invarianza relativistica.

Effettivamente, Φ deve essere funzione degli scalari $H^2 - E^2$ e $(EH)^2 = (\boldsymbol{EH})^2$:

$$\Phi(H, E) = f(H^2 - E^2, (EH)^2).$$

Perciò

$$\Phi(0, E) = f(-E^2, 0) = \Phi(iE, 0).$$

Ma la funzione $\Phi(iE, 0)$ si ricava dalla (126,11) mediante la sostituzione $H \to iE$; dopo una ridenominazione della variabile d'integrazione troviamo

$$\Phi(iE, 0) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-\eta/a} \operatorname{cotg} \eta \, d\eta. \qquad (126,15)$$

Confrontando questa espressione con il limite $\Phi(H \to 0, E)$, ricavato dalla (126,14), noi possiamo trovare la funzione F.

Il passaggio al limite $H \to 0$ nella (126,14) si può eseguire mediante la sostituzione della sommatoria su n con l'integrazione in $dn = dx/2b$:

$$\Phi(0, E) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty F\left(\frac{1+x}{a}\right)\frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{1/a}^\infty \frac{F(y)}{y}\,dy. \quad (126,16)$$

Uguagliando le espressioni (126,15) e (126,16) e derivando questa uguaglianza rispetto a $1/a \equiv z$, otteniamo

$$\frac{F(z)}{z} = -\int_0^\infty e^{-\eta z}\eta \operatorname{cotg}\eta\, d\eta.$$

Dopo questa operazione la sommatoria nella (126,14) si riduce nuovamente alla somma di una progressione geometrica, e i calcoli successivi sono analoghi a quelli eseguiti sopra: esprimiamo Φ attraverso m^2, E e H, integriamo due volte rispetto a m^2, sottraiamo il valore per $E = H = 0$ e determiniamo le costanti d'integrazione come fatto per la (126,13). Il risultato finale è[1])

$$L' = \frac{m^4}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\Big\{-(\eta a \operatorname{cotg}\eta a)(\eta b \operatorname{cth}\eta b) + 1 - \frac{\eta^2}{3}(a^2 - b^2)\Big\}\,d\eta, \quad (126,17)$$

$$a = \frac{|e|E}{m^2}\left(=\frac{|e|\hbar E}{m^2c^3}\right), \quad b = \frac{|e|H}{m^2}\left(=\frac{|e|\hbar H}{m^2c^3}\right).$$

Notiamo, però, subito un certo carattere di convenzionalità nella scrittura di questa formula. Essa è valida solo se viene osservata la condizione di piccolezza del campo elettrico: $a \ll 1$ (126,4) (condizione di cui non è stato tenuto conto esplicitamente nella (126,17)). Questo si manifesta nel fatto che l'espressione integranda nella (126,17) ha dei poli per $\eta = n\pi/a$ ($n = 1, 2, \ldots$), e quindi, nella forma in cui è stato scritto, l'integrale non ha, rigorosamente parlando, senso. Di conseguenza, la (126,17) può servire, in sostanza, solo per ottenere i termini della serie asintotica di potenze di a (vedi piú avanti) mediante uno sviluppo formale di $\operatorname{cotg} a$.

Matematicamente, all'integrale (126,17) si può dare un senso aggirando i poli nel piano della variabile complessa η. In questo caso in L', e di conseguenza anche nella densità d'energia W', compare

[1]) Questo risultato fu ottenuto da *W. Heisenberg* e *H. Euler* (1935). Nei calcoli da noi esposti sono state utilizzate anche le idee per una deduzione proposta da *V. Weisskopf* (1936).

una parte immaginaria. La complessità dell'energia significa, come sempre, la quasi-stazionarietà dello stato[1]). Nel caso considerato la stazionarietà è rotta dalla produzione di coppie, e la quantità $-2\operatorname{Im} W'$ è la probabilità w di creazione di una coppia nell'unità di volume nell'unità di tempo; poiché le piccole correzioni in W e L differiscono solo per il segno, allora la probabilità w, espressa attraverso E e H, è semplicemente uguale a

$$w = 2 \operatorname{Im} L'. \tag{126,18}$$

È evidente che questa quantità è proporzionale a $e^{-\pi/a}$ (vedi piú avanti la (126,20)). Proprio grazie alla piccolezza esponenziale di $\operatorname{Im} W'$, ha senso, per $a \ll 1$, la serie asintotica di potenze di a con un qualsiasi numero finito di termini.

Esaminiamo i casi limite della formula (126,17). In campi deboli ($a \ll 1$, $b \ll 1$) i primi termini dello sviluppo sono

$$L' = \frac{m^4}{8\pi^2} \frac{(a^2-b^2)^2+7\,(ab)^2}{45} = \frac{e^4}{45\cdot 8\pi^2 m^4}\left[(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2)^2+7\,(\boldsymbol{E}\boldsymbol{H})^2\right]. \tag{126,19}$$

In particolare, per $b = 0$ la correzione relativa è

$$\frac{L'}{L_0} = \alpha\frac{a^2}{45\pi}.$$

Notiamo inoltre che dopo che L è stato espresso (come nella (126,19)) attraverso gli invarianti $\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2$ e $\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}$, la formula diventa automaticamente applicabile in qualsiasi sistema di riferimento (e non solo in quello in cui $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{H}$).

La parte immaginaria in L' per $a \ll 1$ si ottiene dall'integrale (126,17) valutando il semiresiduo nel polo della cotangente piú vicino allo zero, cioè in $\eta a = \pi - i0$. Secondo la (126,18) questo dà la probabilità di creazione di una coppia da parte di un campo elettrico debole:

$$w = \frac{m^4}{4\pi^3}\,a^2 e^{-\pi/a} = \frac{1}{4\pi^3}\left(\frac{eE\hbar}{m^2c^3}\right)^2 \frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \exp\left(-\frac{\pi m^2c^3}{|e|\,\hbar E}\right). \tag{126,20}$$

Per un campo magnetico intenso ($a = 0$, $b \gg 1$) partiamo dalla formula (126,13), riscritta (dopo la sostituzione $b\eta \to \eta$) nella forma

$$L' = \frac{m^4b^2}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\eta/b}}{\eta}\left[\frac{1}{3}-\frac{\eta\operatorname{cth}\eta-1}{\eta^2}\right]d\eta.$$

Per $b \gg 1$ in questo integrale è importante la regione $1 \ll \eta \ll b$. Essendo in essa $e^{-\eta/b} \approx 1$, possiamo trascurare il secondo termine

[1]) La direzione dell'aggiramento nell'integrale deve essere scelta in modo tale che $\operatorname{Im} W' < 0$. Questa richiesta è soddisfatta dalla regola solita della sostituzione della massa $m^2 \to m^2 - i0$ (cioè, nel caso considerato, $a \to a + i0$).

tra parentesi e troncare l'integrale (con precisione logaritmica) nei limiti $\eta \approx 1$ e $\eta \approx b$. Allora

$$L' = \frac{m^4 b^2}{24\pi^2} \ln b \tag{126,21}$$

(un calcolo piú preciso in luogo di $\ln b$ dà $\ln b - 2{,}29$). In questo caso abbiamo il rapporto

$$\frac{L'}{L_0} \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln b.$$

Da qui si vede che le correzioni radiative alle equazioni del campo potrebbero raggiungere l'ordine relativo dell'unità solo in campi esponenzialmente grandi:

$$H \sim \frac{m^2}{|e|} e^{3\pi/\alpha}. \tag{126,22}$$

Nonostante ciò, le correzioni trovate hanno un senso: esse rompono la linearità delle equazioni di Maxwell e quindi portano ad effetti che sono, in linea di principio, osservabili (ad esempio, la diffusione della luce da parte della luce e della luce in un campo esterno).

Il legame delle intensità $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ con i potenziali $\boldsymbol{A}$ e φ rimane, per definizione, lo stesso di prima (126,6). Non subisce cambiamenti, quindi, nemmeno la prima coppia delle equazioni di Maxwell:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

La seconda coppia, invece, si ottiene facendo variare l'azione

$$S = \int (L_0 + L')\, d^4x$$

rispetto ad $\boldsymbol{A}$ e φ. Queste equazioni possono essere scritte nella forma

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{H} - 4\pi \boldsymbol{M}) = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}) \tag{126,23}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}) = 0, \tag{126,24}$$

dove sono state introdotte le notazioni:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{E}}, \qquad \boldsymbol{M} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{H}}. \tag{126,25}$$

Nella forma le equazioni (126,23-24) coincidono con le equazioni macroscopiche di Maxwell per un campo in un mezzo continuo[1]). Da ciò è chiaro che le grandezze $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{M}$ hanno il senso dei vettori polarizzazione elettrica e polarizzazione magnetica del vuoto.

[1]) Per eventuali confronti occorre ricordare che nell'elettrodinamica macroscopica il valore medio del campo magnetico viene designato con $\boldsymbol{B}$ e non con $\boldsymbol{H}$, come abbiamo scritto qui.

Notiamo, infine, che $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{M}$ si annullano per il campo di un'onda piana, nel quale, come è noto, ambedue gli invarianti $\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2$ e $\boldsymbol{EH}$ sono nulli. In altre parole, per un'onda piana le correzioni non lineari nel vuoto mancano.

PROBLEMI

1. Determinare la correzione al campo di una piccola carica fissa e_1, dovuta alla non linearità delle equazioni di Maxwell.

Soluzione. Per $\boldsymbol{H} = 0$ dalla (126,19) abbiamo

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{E}} = \frac{\alpha^2}{90\pi^2 m^4} \boldsymbol{E} E^2. \tag{1}$$

In un campo a simmetria centrale dalla (126,24) abbiamo

$$(E + 4\pi P) r^2 = \text{costante} = e_1 \tag{2}$$

(la costante è stata determinata usando la condizione che per $r \to \infty$ il campo coincide con il campo coulombiano della carica e_1). Risolvendo in modo approssimato la (2) otteniamo

$$E = \frac{e_1}{r^2}\left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{45\pi m^4 r^4}\right),$$

oppure

$$\Phi = \frac{e_1}{r}\left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{225\pi m^4 r^4}\right). \tag{3}$$

È necessario distinguere in (3) la correzione non lineare in e_1 dalla correzione lineare che compare nella (111,6) dovuta, in ultima analisi, alla eterogeneità del campo coulombiano. La correzione (3) è di ordine superiore in α, ma decresce piú lentamente con la distanza e cresce piú rapidamente con l'aumentare di e_1.

2. Stimare direttamente la probabilità di creazione di una coppia in un campo elettrico costante omogeneo debole in approssimazione quasi-classica con precisione esponenziale (*F. Sauter*, 1931).

Soluzione. Il moto in un campo debole $\boldsymbol{E}$ (di potenziale lentamente variabile $\varphi = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{r} = -Ez$) è quasi-classico. Poiché la funzione d'onda del positrone finale entra nell'ampiezza di reazione sotto forma di funzione iniziale « a frequenza negativa », allora si può considerare la creazione di una coppia come la transizione dell'elettrone da uno stato « a frequenza negativa » ad uno stato « a frequenza positiva ». Nel primo di questi stati, in presenza di un campo, l'impulso quasi-classico $p(z)$ è determinato dall'uguaglianza

$$\varepsilon = -\sqrt{p^2(z) + m^2} + |e| Ez, \tag{1}$$

e nel secondo

$$\varepsilon = +\sqrt{p^2(z) + m^2} + |z| Ez. \tag{2}$$

La transizione dal primo al secondo stato è una transizione attraverso una barriera di potenziale (regione dei $p(z)$ immaginari), che separa le regioni di dipendenza (1) e (2) con $p(z)$ reali per un dato ε. Le frontiere di questa barriera z_1 e z_2 sono situate in $p(z) = 0$, cioè

$$\varepsilon = -m + |e| Ez_1, \quad \varepsilon = +m + |e| Ez_2.$$

La probabilità di transizione attraverso una barriera quasi-classica è

$$w \sim \exp\left(-2\int_{z_2}^{z_1} |p(z)|\, dz\right) = \exp\left(-4\frac{m^3}{eE}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\, d\xi\right),$$

da cui

$$w \sim \exp\left(-\frac{\pi m^2}{|e|E}\right)$$

in accordo con la (126,20).

§ 127. *Calcolo di integrali su domini quadridimensionali*

Riportiamo qui alcune regole e formule utili per il calcolo degli integrali che compaiono nella teoria delle correzioni radiative.

La forma tipica di un integrale relativo ai diagrammi di Feynman è la seguente

$$\int \frac{f(k)\, d^4k}{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{127,1}$$

dove a_1, a_2, ... sono polinomi di secondo grado rispetto al 4-vettore k, $f(k)$ è un polinomio di grado generico n', e l'integrazione si esegue su tutto lo spazio quadridimensionale k.

Un metodo comodo per valutare tali integrali (proposto da *Feynman*, 1949) consiste nel trasformare preventivamente (parametrizzare) l'espressione integranda mediante l'introduzione di integrazioni supplementari rispetto alle variabili ausiliarie ξ_1, ξ_2, ... secondo la formula

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int_0^1 d\xi_1 \ldots \int_0^1 d\xi_n \frac{\delta(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n-1)}{(a_1\xi_1+a_2\xi_2+\ldots+a_n\xi_n)^n}. \tag{127,2}$$

Come risultato di tale trasformazione, al posto di n polinomi quadratici, compare nel denominatore l'n-esima potenza di un unico polinomio di secondo grado.

Eliminando la funzione δ con l'integrazione in $d\xi_n$ e introducendo nuove variabili mediante le relazioni

$$\xi_1 = x_{n-1},\ \xi_2 = x_{n-2} - x_{n-1},\ \ldots,\ \xi_{n-1} = x_1 - x_2,$$
$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n-1} = x_1,$$

otteniamo la formula (127,2) nella forma equivalente

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots$$
$$\ldots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{[a_1 x_{n-1} + a_2(x_{n-2}-x_{n-1}) + \ldots + a_n(1-x_1)]^n}. \tag{127,3}$$

Per $n = 2$ questa formula ha la forma

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a_1 x + a_2(1-x)]^2} \tag{127,4}$$

come è facilmente verificabile con un calcolo diretto. Per un n qualsiasi la formula può essere dimostrata per induzione da $n-1$ a n. In effetti, eseguendo nella (127,3) l'integrazione in dx_{n-1}, otteniamo nel secondo membro dell'uguaglianza la differenza tra due integrali $(n-2)$-pli dello stesso tipo. Supponendo che per essi la formula sia valida, otteniamo

$$\frac{1}{a_1-a_2}\left[\frac{1}{a_2a_3\ldots a_n}-\frac{1}{a_1a_3\ldots a_n}\right],$$

che coincide con l'espressione nel primo membro dell'uguaglianza (127,3).

Mediante la derivazione della (127,3) rispetto a $a_1, a_2, \ldots$ si possono ottenere formule analoghe per la parametrizzazione di integrali contenenti al denominatore polinomi qualsiasi a potenze superiori alla prima.

La regolarizzazione degli integrali divergenti si esegue mediante la sottrazione di integrali di tipo analogo. Per calcolare queste differenze può risultare opportuna una preventiva trasformazione della differenza delle espressioni integrande (ciascuna delle quali ha già subíto la trasformazione (127,2)) mediante la formula

$$\frac{1}{a^n}-\frac{1}{b^n}=-\int_0^1\frac{n(a-b)\,dz}{[(a-b)z+b]^{n+1}}. \tag{127,5}$$

Dopo la trasformazione (127,3) l'integrazione quadridimensionale nella (127,1) si riconduce alla forma

$$\int\frac{f(k)\,d^4k}{[(k-l)^2-\alpha^2]^n}, \tag{127,6}$$

dove l è un 4-vettore, e α^2 uno scalare, dipendenti entrambi dai parametri $x_1, \ldots, x_{n-1}$; supporremo lo scalare α^2 positivo.

Se l'integrale (127,6) converge, in esso si può eseguire la sostituzione delle variabili $k-l\to k$ (spostamento del centro delle coordinate), dopo di che l'integrale assume la forma

$$\int\frac{f(k)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} \tag{127,7}$$

(con una funzione $f(k)$ differente), e quindi il denominatore conterrà solo il quadrato k^2. Per quanto riguarda il numeratore, è sufficiente limitarsi a considerare le funzioni scalari $f=F(k^2)$. In effetti, per integrali con numeratori di altro tipo abbiamo

$$\int\frac{k^\mu F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}=0, \tag{127,8}$$

$$\int\frac{k^\mu k^\nu F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}=\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\int\frac{k^2F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}, \tag{127,9}$$

$$\int\frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}=\frac{1}{24}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\int\frac{(k^2)^2F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} \tag{127,10}$$

e cosí via, come è evidente già da considerazioni di simmetria (nell'integrazione su tutte le direzioni di k).

Nell'integrale di partenza (127,1) ciascuno dei fattori a_1, a_2, ... al denominatore ha (come funzione di k_0) due zeri, che vengono aggirati nell'integrazione in dk_0 secondo la regola solita (§ 76). Dopo la trasformazione dell'integrale alla forma (127,7), in luogo di $2n$ poli semplici l'espressione integranda contiene in tutto due poli di ordine n i quali vengono aggirati secondo la stessa regola (cammino C nella fig. 24). Spostando il cammino d'integrazione come indicato dalle frecce, lo si può far coincidere con l'asse immaginario del piano k_0 (C' nella fig. 24). In altre parole, la variabile k_0 viene sostituita con $k_0 = ik_0'$, dove k_0' è reale. Cambiando anche la notazione $\boldsymbol{k}$ in $\boldsymbol{k}'$, avremo

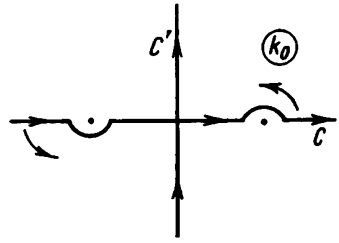


Fig. 24

$$k^2 = k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 \to -(k_0'^2 + \boldsymbol{k}'^2) = -k'^2, \tag{127,11}$$

dove k' è un 4-vettore nella metrica euclidea. Qui d^4k diventa

$$d^4k \to i d^4k' = ik'^2 d\frac{k'^2}{2}\, d\Omega,$$

dove $d\Omega$ è l'elemento d'angolo solido quadridimensionale. L'integrazione in $d\Omega$ dà $2\pi^2$ (vedi II, § 111), dopo di che

$$d^4k \to i\pi^2 k'^2 d(k'^2). \tag{127,12}$$

Denotando $k'^2 = z$, otteniamo infine

$$\int \frac{F(k^2)\, d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = (-1)^n i\pi^2 \int_0^\infty \frac{F(-z)\, z\, dz}{(z+\alpha^2)^n}. \tag{127,13}$$

In particolare

$$\int \frac{d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = \frac{(-1)^n i\pi^2}{\alpha^{2(n-2)}(n-1)(n-2)}. \tag{127,14}$$

La parte logaritmicamente divergente negli integrali (127,7) può essere separata nella forma

$$\int \frac{d^4k}{[(k-l)^2-\alpha^2]^2}. \tag{127,15}$$

È facile vedere che in tale integrale è legittima la trasformazione $k \to k + l$. In effetti, la differenza tra l'integrale originario e l'integrale trasformato

$$\int \left\{ \frac{1}{[(k-l)^2-\alpha^2]^2} - \frac{1}{(k^2-\alpha^2)^2} \right\} d^4k$$

rappresenta un integrale convergente, e quindi in esso la sostituzione $k \to k + l$ è legittima in ogni caso. Operando questa sostituzione e facendo quindi anche la sostituzione $k \to -k$, otteniamo la stessa grandezza col segno opposto; da qui discende che tale quantità è nulla.

Un integrale linearmente divergente deve avere la forma

$$\int \frac{k^\mu d^4k}{[(k-l)^2-\alpha^2]^2}, \tag{127,16}$$

ma, di fatto, tale integrale diverge solo logaritmicamente: l'espressione integranda tende asintoticamente (per $k \to \infty$) a $k^\mu/(k^2)^2$ e si annulla nella media sulle direzioni. Lo spostamento del centro delle coordinate, tuttavia, non lascia l'integrale (127,16) invariato, ma vi aggiunge una costante additiva. Mostriamo la validità di questa affermazione per il caso di uno spostamento infinitesimo $k \to k + \delta l$, calcolando la differenza

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{k^\mu}{[(k-\delta l)^2-\alpha^2]^2} - \frac{k^\mu + \delta l^\mu}{(k^2-\alpha^2)^2} \right\} d^4k. \tag{127,17}$$

Con precisione fino ai termini del primo ordine in δl

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{4k^\mu (k\delta l)}{(k^2-\alpha^2)^3} - \frac{\delta l^\mu}{(k^2-\alpha^2)^2} \right\} d^4k.$$

Nel primo termine il calcolo della media sulle direzioni sostituisce il numeratore con $k^2\delta l^\mu$ (cfr. la (127,9)), e quindi troviamo[1])

$$\Delta^\mu = \alpha^2 \delta l^\mu \int \frac{d^4k}{(k^2-\alpha^2)^3} = -\frac{i\pi^2}{2}\delta l^\mu. \tag{127,18}$$

Nelle espressioni definitive delle correzioni radiative figura spesso una funzione trascendente, definita dall'integrale

$$F(\xi) = \int_0^\xi \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx \tag{127,19}$$

(chiamata a volte *funzione di Spence*). Notiamo qui, per eventuali usi, alcune sue proprietà:

$$F(\xi) + F\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\ln^2\xi, \tag{127,20}$$

$$F(-\xi) + F(-1+\xi) = -\frac{\pi^2}{6} + \ln\xi \ln(1-\xi), \tag{127,21}$$

$$F(1) = \frac{\pi^2}{12}, \quad F(-1) = -\frac{\pi^2}{6}. \tag{127,22}$$

Lo sviluppo per piccoli ξ:

$$F(\xi) = \xi - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^3}{9} - \frac{\xi^4}{16} + \dots \tag{127,23}$$

[1]) Un calcolo molto piú complesso porta allo stesso risultato anche per un valore finito di l.

Capitolo XIII

FORMULE ASINTOTICHE DELL'ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

§ 128. *Comportamento asintotico del propagatore fotonico per grandi impulsi*

Nel § 110 abbiamo calcolato il primo termine (in α) dello sviluppo dell'operatore di polarizzazione $\mathcal{P}(k^2)$ e abbiamo trovato che per $|k^2| \gg m^2$, con precisione logaritmica, esso ha la forma

$$\mathcal{P}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \ln \frac{|k^2|}{m^2}. \tag{128,1}$$

In quella sede fu anche detto che, per il senso della deduzione di questa formula (in quanto correzione in prima approssimazione al propagatore fotonico $4\pi D^{-1} = k^2$) si supponeva soddisfatta la condizione

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \ll 1, \tag{128,2}$$

che limita l'applicabilità della formula dalla parte dei grandi $|k^2|$. Mostriamo ora che, in realtà, l'espressione (128,1) rimane valida anche alla condizione molto piú debole

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \lesssim 1. \tag{128,3}$$

Il procedimento per la dimostrazione consiste in quanto segue[1]). Osserviamo, innanzitutto, che anche se con la condizione (128,3) un contributo in $\mathcal{P}(k^2)$ può, in linea di principio, provenire dai termini di tutti gli ordini (in α) della serie perturbativa, in ciascun (n-esimo) ordine occorre però tenere conto solo dei termini $\sim\alpha^n \ln^n (|k^2|/m^2)$ contenenti un grande logaritmo alla stessa potenza di α; i termini contenenti il logaritmo elevato a potenze piú piccole sono evidentemente piccoli in forza della disuguaglianza $\alpha \ll 1$.

Inoltre, lo studio della serie perturbativa per $\mathcal{P}$ può essere ricondotto allo studio delle serie per $\mathcal{G}$ e Γ^μ mediante l'equazione di

---

[1]) L'impostazione del problema che noi andiamo esponendo, e i risultati ottenuti appartengono a *L. D. Landau, A. A. Abrikossov, I. M. Khalatnikov* (1954).

Dyson

$$\mathcal{P}(k^2) = i\frac{4\pi\alpha}{3}\,\mathrm{Tr}\int \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k)\,\Gamma^\mu(p+k,\,p;\,k)\,\mathcal{G}(p)\,\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \qquad (128,4)$$

(vedi la (104,4)). Poiché la funzione $\mathcal{P}(k^2)$ è gauge-invariante, per calcolarla si può scegliere un gauge qualsiasi per le quantità $\mathcal{G}$ e Γ. Il gauge piú comodo per questo scopo è il gauge di Landau, in cui il propagatore di fotoni liberi ha la forma (77,11)

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \qquad (128,5)$$

($D^{(l)} = 0$ nella (100,17)). Risulta che in questo gauge le serie perturbative per $\mathcal{G}$ e Γ^μ non contengono affatto termini con logaritmi alle potenze necessarie. Perciò nella (128,4) è sufficiente sostituire $\mathcal{G}$ e Γ^μ con le rispettive approssimazioni di ordine zero: $\mathcal{G} = G$, $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$. Allora l'espressione (128,4) si trasforma nell'integrale

$$\mathcal{P}(k^2) = i\,\frac{4\pi\alpha}{3}\,\mathrm{Tr}\int \gamma_\mu G(p+k)\,\gamma^\mu G(p)\,\frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \qquad (128,6)$$

Questo è l'integrale di Feynman corrispondente al diagramma (110,1) della prima approssimazione (in α), l'integrale che porta (dopo la relativa rinormalizzazione) alla formula (128,1).

Iniziando la dimostrazione delle affermazioni fatte, analizziamo innanzitutto l'origine del logaritmo nell'integrale (128,6). È facile vedere che il termine logaritmico proviene dalla seguente regione d'integrazione:

$$p^2 \gg |\,k^2\,| \quad \text{per} \quad |\,k^2\,| \gg m^2. \qquad (128,7)$$

Effettivamente, sviluppando formalmente G in potenze di $1/\hat{p}$, abbiamo

$$G(p) \approx \frac{1}{\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{p^2},$$

$$G(p-k) \approx \frac{1}{\hat{p}-\hat{k}} \approx \frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{\hat{p}}\,\hat{k}\,\frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{\hat{p}}\,\hat{k}\,\frac{1}{\hat{p}}\,\hat{k}\,\frac{1}{\hat{p}} =$$

$$= \frac{\hat{p}}{p^2} + \frac{\hat{p}\,\hat{k}\,\hat{p}}{(p^2)^2} + \frac{\hat{p}\,\hat{k}\,\hat{p}\,\hat{k}\,\hat{p}}{(p^2)^3}.$$

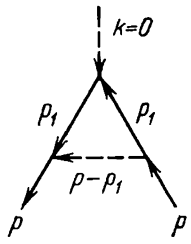
Sostituendo l'espressione ottenuta nella (128,6), il primo termine, indipendente da k, viene a cadere a seguito della regolarizzazione (in accordo con la condizione $\mathcal{P}/k^2 \to 0$ per $k^2 \to 0$). Il secondo termine si annulla nell'integrazione sulla direzione di p. Il terzo integrale, invece, diverge logaritmicamente rispetto a p^2; integrando nei limiti da $p^2 \sim |\,k^2\,|$ (limite inferiore della regione (128,7)) fino ad un certo « parametro ausiliario di troncamento » Λ^2, otteniamo

$$-\frac{\alpha}{3\pi}\,k^2 \ln\frac{\Lambda^2}{|\,k^2\,|}. \qquad (128,8)$$

Per la regolarizzazione occorre sottrarre da $\mathcal{F}/k^2$ il suo valore per $k^2 = 0$. Ma poiché la precisione logaritmica presuppone soddisfatta la condizione $|k^2| \gg m^2$, calcolando con questa precisione, la regolarizzazione viene realizzata mediante la sottrazione del valore per $|k^2| \sim m^2$; come conseguenza di ciò Λ^2 nell'argomento del logaritmo viene sostituito con m^2 e si arriva cosí alla (128,1).

Poiché le correzioni in $\mathcal{G}$ e Γ^μ che a noi interessano hanno carattere logaritmico, le funzioni $\mathcal{G}$ e Γ^μ con queste correzioni differiranno da G e γ^μ per fattori logaritmici lentamente variabili. Di conseguenza, anche nell'integrale esatto (128,4) sarà importante quella stessa regione (128,7) che era importante nell'integrale approssimato (128,6). Tuttavia, non si può porre semplicemente $k = 0$ in $\Gamma^\mu(p + k, p; k)$: a causa della divergenza quadratica dell'integrale la sua regolarizzazione richiede che si prendano in considerazione anche i due termini successivi dello sviluppo di $\Gamma^\mu(p + k, p; k)$ in potenze di k. Noi, tuttavia, ci limiteremo ad esaminare qui le correzioni in $\Gamma^\mu(p, p, 0)$; ciò sarà sufficiente a mettere chiaramente in evidenza il ruolo della scelta del gauge e la differenza nel carattere degli integrali generati dai diagrammi di vario tipo. Notiamo anche che non è necessario fare uno studio analogo anche per $\mathcal{G}$, poiché le correzioni in Γ e $\mathcal{G}$ sono legate tra loro dall'identità di Ward (105,8).

Alla prima correzione (in α) alla funzione $\Gamma(p, p; 0)$ corrisponde il diagramma



e rispettivamente l'integrale[1])

$$\Gamma^{\mu(1)} = -i\alpha \int \gamma^\lambda G(p_1)\, \gamma^\mu G(p_1)\, \gamma^\nu D_{\lambda\nu}(p - p_1) \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4}. \qquad (128,9)$$

Nel gauge ordinario abbiamo

$$D_{\lambda\nu}(p - p_1) = g_{\lambda\nu} \frac{4\pi}{(p - p_1)^2},$$

---

[1]) Per evitare equivoci, volendo fare un confronto con i risultati del § 114, ricordiamo che nel § 114 si supponeva che ambedue i terminali elettronici del diagramma fossero fisici, mentre qui si suppone $p^2 \gg |k^2| \gg m^2$, cioè ambedue le linee sono evidentemente non fisiche.

e nell'integrale è importante la regione $p_1^2 \gg p^2$, in cui esso diverge logaritmicamente. Valutando l'integrale

$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -4\pi\alpha i \int \frac{\gamma^\lambda \hat{p}_1 \gamma^\mu \hat{p}_1 \gamma_\lambda}{(p_1^2)^3} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \tag{128,10}$$

e regolarizzando il logaritmo, otteniamo

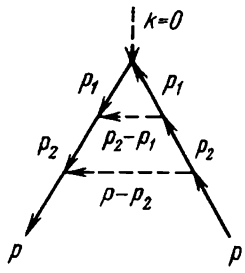
$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -\frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \ln \frac{p^2}{m^2}.$$

Nel gauge di Landau, invece, al posto della (128,10), otteniamo l'integrale

$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -4\pi\alpha i \int \{\gamma^\lambda \hat{p}_1 \gamma^\mu \hat{p}_1 \gamma_\lambda - p_1^2 \gamma^\mu\} \frac{d^4 p_1}{(p_1^2)^3 (2\pi)^4}.$$

Mediando sulle direzioni di p_1 ed eliminando le matrici γ, troviamo che quest'integrale si annulla e quindi il termine logaritmico in $\Gamma^{\mu(1)}$ viene a cadere[1]).

Per le correzioni del secondo ordine (in α) consideriamo il diagramma



L'integrale corrispondente è

$$\Gamma^{\mu(2)} = -\alpha^2 \int \gamma^\lambda G(p_2) \gamma^\nu G(p_1) \gamma^\mu G(p_1) \gamma^\rho G(p_2) \gamma^\sigma \times$$
$$\times D_{\nu\rho}(p_2 - p_1) D_{\lambda\sigma}(p - p_2) \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8}.$$

Nel gauge ordinario delle funzioni D questo integrale contiene un termine con il quadrato di un logaritmo dovuto alla regione d'integrazione

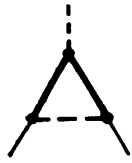
$$p_1^2 \gg p_2^2 \gg p^2. \tag{128,11}$$

---

[1]) Le correzioni in G^{-1} nei due gauges, ricavate dalla correzione $\Gamma^{(1)}$ mediante l'identità (105,8), sono, come ci si doveva attendere, in accordo coi risultati del § 116.

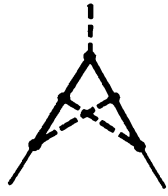
Effettivamente, trascurando p_2 nell'argomento della funzione $D_{\nu\rho}(p_2 - p_1)$, l'integrazione in d^4p_1 diventa uguale all'integrazione nella (128,9) e dà $\ln p_2^2$; la successiva integrazione in d^4p_2 ha nuovamente carattere di logaritmo e porta al quadrato $\ln^2(p_2^2/m^2)$. Se per le funzioni D scegliamo, invece, il gauge di Landau, in ambedue le integrazioni i termini logaritmici cadono.

Una situazione simile ha luogo per tutti gli altri diagrammi che entrano nel diagramma scheletro



(128,12)

I diagrammi di altri tipi, con linee fotoniche intersecantisi, che entrano, ad esempio, nel diagramma scheletro



(128,13)

(cfr. la (103,11)), non contengono affatto termini con logaritmi alla potenza necessaria in nessuno dei gauges (in essi è impossibile separare una regione di valori delle variabili in cui l'integrale possa essere ricondotto a successive integrazioni logaritmiche).

Questi ragionamenti (e ragionamenti analoghi per i successivi termini dello sviluppo di Γ in potenze di k) confermano che nel gauge di Landau non compaiono correzioni alle funzioni $\mathcal{G}$ e Γ contenenti le necessarie potenze del logaritmo, e quindi l'espressione (128,1) è effettivamente valida anche alla condizione (128,3).

La funzione $\mathcal{D}(k^2)$, relativa all'operatore di polarizzazione (128,1), ha la forma

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2}}. \tag{128,14}$$

In forza della condizione (128,3) non è necessario sviluppare questa espressione in potenze di α[1]).

[1]) Questa formula può essere dedotta anche dalle proprietà funzionali dei propagatori e delle parti di vertice, che esprimono la rinormalizzabilità dell'elettrodinamica quantistica; vedi L. D. L a n d a u, Sulla teoria quantistica del campo (Bohr Volume, Pergamon Press, Oxford 1955); N. N. B o g o l j u -

Esaminiamo meglio la crescita di $\mathscr{D}$ con l'avvicinarsi del logaritmo $\ln(|k^2|/m^2)$ al valore $3\pi/\alpha$. A questa crescita è connesso il limite dell'applicabilità della formula (128,14) per i grandi $|k^2|$. In effetti, la deduzione di questa formula è basata sul fatto che abbiamo trascurato il diagramma (128,13) (ed altri con un numero ancora maggiore di linee fotoniche in grassetto) rispetto al diagramma (128,12). Ma l'aggiunta di ciascuna linea di questo tipo porta nel diagramma il fattore $e^2\mathscr{D}$ contenente il propagatore esatto $\mathscr{D}$. In questo caso il ruolo di piccolo parametro è svolto, invece che da $\alpha = e^2$, dalla quantità

$$\frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|k^2|}{m^2}},$$

e quindi la legittimità delle omissioni indicate richiede che sia osservata la condizione

$$1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|k^2|}{m^2} \gg \alpha. \qquad (128,15)$$

Allora, mano a mano che $|k^2|$ cresce, il membro sinistro di questa disuguaglianza finisce con l'uguagliare, per ordine di grandezza, il parametro α; di conseguenza, abbiamo che scompare dalla teoria il parametro piccolo. Arriviamo cosí all'importante conclusione che l'elettrodinamica quantistica, come teoria che comprende anche le interazioni deboli, presenta insufficienze logiche. Ora, tutto il formalismo della teoria esistente è legato proprio alla possibilità di considerare l'interazione elettromagnetica come una piccola perturbazione.

Si potrebbe pensare che tale teoria debba essere integrata, nella regione delle altissime energie, con una teoria del « legame forte ». Ci sono, tuttavia, seri motivi di supporre che nell'ambito delle concezioni esistenti ciò non sia possibile, poiché l'elettrodinamica quantistica non solo risulta incompleta come teoria del « legame debole », ma è anche una teoria fisica basata su princípi logici non del tutto conseguenti.

A queste conclusioni si arriva con un'analisi delle difficoltà che insorgono in relazione alla formula (128,14), se nel corso della sua deduzione eseguiamo la rinormalizzazione non « en passant », ma mediante la preventiva introduzione della carica « intrinseca » (« nuda ») dell'elettrone e_c, che nel seguito dovrà essere scelta in modo da condurre al giusto valore osservabile della carica e (§ 107).

---

bov, D. V. Širkov, ŽETF 30, 77 (1956). Un'espressione sistematica del metodo basato sull'uso di queste proprietà (il cosiddetto metodo del gruppo di rinormalizzazione) è data nella monografia: N. N. Bogoljubov, D. V. Širkov, Vvedenie v teoriju kvantovannykh polej, « Nauka », Mosca, 1973 [vedi nota 2, pag. 556, N.d.T.].

Se l'integrale « viene troncato », come è stato fatto precedentemente, nel limite superiore ausiliario Λ^2, allora la carica intrinseca è una funzione di tale parametro, $e_c = e_c(\Lambda)$, e alla fine deve essere eseguito il passaggio al limite $\Lambda \to \infty$.

In tale approccio al problema, l'operatore di polarizzazione è

$$\mathcal{P}(k^2) = -\frac{e_c^2}{3\pi} k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}$$

(espressione (128,8) con e_c al posto di e), e rispettivamente

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}. \tag{128,16}$$

Definendo ora la carica fisica e in modo che

$$e_c^2 \mathcal{D}(k^2) \to \frac{4\pi}{k^2} e^2 \quad \text{per } k^2 \to \sim m^2,$$

otteniamo

$$e^2 = \frac{e_c^2}{1 + \frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}, \tag{128,17}$$

oppure

$$e_c^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \tag{128,18}$$

Queste formule, tuttavia, non danno ancora di per se stesse la possibilità di eseguire il passaggio al limite $\Lambda \to \infty$. Dalla (128,18) vediamo che mano a mano che Λ aumenta (per un dato valore di e^2) e_c^2 cresce; ma già per $e_c^2 \sim 1$ le formule diventano inapplicabili, essendo state dedotte sulla base della supposizione

$$e_c^2 \ll 1$$

che costituisce la condizione di applicabilità della teoria delle perturbazioni all'interazione « intrinseca».

Questa difficoltà può, tuttavia, essere superata mediante le seguenti considerazioni (*L. D. Landau, I. Ja. Pomerančuk*, 1955).

Sia Λ^2/k^2 talmente grande che

$$\frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} \gg 1,$$

ma resti sempre, nel contempo, soddisfatta anche la condizione $e_c^2 \ll 1$. Allora nella (128,16) si può trascurare l'unità nel denominatore:

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{12\pi^2}{k^2 e_c^2 \ln^2 \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}, \tag{128,19}$$

e corrispondentemente otteniamo

$$e^2 = \frac{3\pi}{\ln^2 \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \tag{128,20}$$

Introduciamo, al posto dell'operatore del 4-potenziale del campo elettromagnetico A^μ, il 4-vettore $\mathfrak{A}^\mu = e_c A^\mu$. Allora l'hamiltoniano d'interazione H_{int} non conterrà la carica intrinseca e_c, mentre l'hamiltoniano del campo libero H_0 (quadratico in A^μ) conterrà e_c^2 al denominatore. La funzione $\mathfrak{D}(k^2)$, definita rispetto a $\mathfrak{A}^\mu$ cosí come $\mathcal{D}(k^2)$ è definita rispetto a A^μ, ha la forma

$$\mathfrak{D}(k^2) = \frac{1}{e_c^2}\mathcal{D}(k^2) = \frac{12\pi^2}{k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}.$$

Questa espressione non contiene e_c. Questo significa che viene trascurato nell'hamiltoniano $H = H_0 + H_{int}$ il termine H_0 dipendente da e_c. Ma se è possibile trascurare H_0 rispetto a H_{int} (per grandi Λ) già per $e_c^2 \ll 1$, è naturale ritenere che ciò sia ancora piú legittimo per valori anche non piccoli di e_c^2.

In tal modo, la formula (128,19), e con essa anche la (128,20), non è piú legata alla condizione $e_c^2 \ll 1$ e il passaggio al limite $\Lambda \to \infty$ diventa possibile. Contemporaneamente, però, $e^2 \to 0$ indipendentemente dalla forma della funzione $e_c(\Lambda)$. Questo « annullarsi » della carica fisica sta a significare l'impossibilità di una rigorosa procedura di rinormalizzazione.

I ragionamenti esposti non possono, certamente, essere considerati come una rigorosa dimostrazione di questo risultato. Essi costituiscono, tuttavia, una seria indicazione circa una possibile incongruenza intrinseca nell'elettrodinamica quantistica esistente.

Nello stesso tempo, occorre sottolineare che in elettrodinamica quantistica le difficoltà descritte possono avere un valore puramente teorico. Esse insorgono ad energie fantasticamente alte $\sim me^{3\pi/2\alpha}$, che non presentano alcun interesse reale. È naturale attendersi che nella realtà le interazioni elettromagnetiche « si confondano » già molto prima con le interazioni forti, e di conseguenza, che l'elettrodinamica pura non abbia piú senso.

§ 129. *Separazione dei termini bilogaritmici nell'operatore di vertice*

Le correzioni della forma $(\alpha L)^n$ (dove L è un grande logaritmo) possono diventare importanti, come abbiamo già notato alla fine del paragrafo precedente, solo ad energie fantastiche ed hanno perciò un valore puramente teorico. Ma nelle ampiezze dei processi reali di diffusione compaiono delle correzioni di gran lunga maggiori, del

tipo $(\alpha L^2)^n$. Tali termini, contenenti un quadrato del logaritmo per ogni potenza di α, sono detti *termini bilogaritmici*.

Cosí, secondo la (114,21), la prima correzione al fattore di forma elettronico, cioè all'ampiezza di diffusione di un elettrone in un campo esterno, per grandi valori del quadrato dell'impulso trasferito $t = q^2$, contiene un termine dell'ordine di grandezza

$$\frac{\alpha}{4\pi} \ln^2 \frac{|t|}{m^2}. \tag{129,1}$$

La condizione di applicabilità della teoria delle perturbazioni richiede che questa quantità sia piccola; questa condizione viene violata ad energie

$$\varepsilon \sim \sqrt{t} \sim m e^{\sqrt{\pi/\alpha}}, \tag{129,2}$$

che, pur essendo molto alte, sono tuttavia di gran lunga inferiori ai valori dati dalla condizione (128,3). Proponiamoci ora di liberarci da questa restrizione e di ottenere formule che siano valide alla condizione

$$\alpha \ln^2 \frac{\varepsilon}{m} \lesssim 1. \tag{129,3}$$

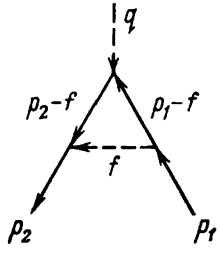
Osserviamo innanzitutto che con questa condizione le correzioni logaritmiche semplici

$$\sim \alpha \ln \frac{\varepsilon}{m} \lesssim \sqrt{\alpha} \ll 1$$

e quindi possono venire tralasciate. Poiché, d'altra parte, in $\mathcal{G}$ e $\mathcal{D}$ le correzioni bilogaritmiche mancano completamente, ciò significa che possiamo semplicemente porre queste funzioni uguali ai loro valori imperturbati G e D.

Il calcolo dell'operatore di vertice Γ, invece, richiede la sommatoria dei termini bilogaritmici che provengono da una serie infinita di diagrammi. A questo problema è dedicato il paragrafo seguente. Esponiamo, dapprima, un metodo che permetta di separare i termini bilogaritmici dai singoli integrali di Feynman ancora prima che siano di fatto eseguite in essi le integrazioni rispetto a tutte le variabili (*V. V. Sudakov*, 1956).

Consideriamo la correzione del primo ordine (in α) all'operatore di vertice rappresentato dal diagramma (114,1), che a noi risulterà comodo rappresentare qui (cambiando le notazioni delle variabili) nella forma



(129,4)

oppure, analiticamente

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{ie^2}{4\pi^3}\int \times$$

$$\times \frac{\gamma^\nu(\hat{p}_2-\hat{f}+m)\gamma^\mu(\hat{p}_1-\hat{f}+m)\gamma_\nu d^4f}{[(p_2-f)^2-m^2+i0][(p_1-f)^2-m^2+i0][f^2+i0]}. \quad (129,5)$$

Supporremo che

$$|q^2| \gg p_1^2,\ p_2^2,\ m^2, \quad (129,6)$$

e che i terminali p_1, p_2 possano essere sia fisici che virtuali. Dalla (129,6) discende che

$$|p_1p_2| \approx \frac{1}{2}|q^2| \gg p_1^2,\ p_2^2,\ m^2, \quad (129,7)$$

cioè i 4-vettori p_1, p_2 hanno componenti grandi e valori dei quadrati piccoli; questa situazione è possibile essendo la metrica quadridimensionale pseudoeuclidea. I termini bilogaritmici compaiono proprio quando sono osservate le condizioni (129,6).

Vedremo poi che nell'integrazione in d^4f sono importanti i valori relativamente piccoli di f. Di conseguenza, possiamo trascurare f al numeratore dell'espressione integranda, dopo di che $\Gamma^{(1)}$ assume la forma

$$\Gamma^{\mu(1)} = -\frac{ie^2}{4\pi^3}\gamma^\nu(\hat{p}_2+m)\gamma^\mu(\hat{p}_1+m)\gamma_\nu I_1, \quad (129,8)$$

dove

$$I_1 = \int \frac{d^4f}{[(p_2-f)^2-m^2+i0][(p_1-f)^2-m^2+i0][f^2+i0]}. \quad (129,9)$$

Il fattore matriciale nella (129,8) può essere semplificato se si tiene conto che Γ entra nei diagrammi moltiplicato per le matrici $(\hat{p}_2+m)$ e $(\hat{p}_1+m)$:

$$(\hat{p}_2+m)\Gamma(\hat{p}_1+m). \quad (129,10)$$

Effettivamente, se le linee p_1 e p_2 sono virtuali, questi fattori provengono da $G(p_1)$ e $G(p_2)$; se, invece, le linee sono relative ad elettroni reali, allora Γ viene moltiplicato per $\bar{u}_2$ e u_1, per i quali, in forza delle equazioni di Dirac, abbiamo

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_2\frac{\hat{p}_2+m}{2m}, \quad u_1 = \frac{\hat{p}_1+m}{2m}u_1.$$

Scambiando l'ordine dei fattori matriciali e trascurando, secondo la (129,7), i quadrati p_1^2, p_2^2, m^2 rispetto a p_1p_2 ogniqualvolta essi compaiono, otteniamo

$$(\hat{p}_2+m)\Gamma^{\mu(1)}(\hat{p}_1+m) \approx -\frac{ie^2}{\pi^3}(p_1p_2)(\hat{p}_2+m)\gamma^\mu(\hat{p}_1+m)I_1.$$

Possiamo perciò rappresentare definitivamente $\Gamma^{(1)}$ nella forma

$$\Gamma^{\mu(1)} = \frac{ie^2}{2\pi^3}\gamma^\mu t I_1, \tag{129,11}$$

dove

$$t = q^2 \approx -2\,(p_1 p_2). \tag{129,12}$$

Notiamo che l'integrale I_1 converge per grandi f e non richiede perciò la regolarizzazione.

Il punto fondamentale dei calcoli che seguono è l'introduzione di nuove e piú comode variabili d'integrazione.

Scomponiamo f nelle componenti tangenziali e normali rispetto al piano p_1, p_2:

$$f = up_1 + vp_2 + f_\perp \equiv f_{\|} + f_\perp, \tag{129,13}$$

$$f_\perp p_1 = f_\perp p_2 = 0. \tag{129,14}$$

In qualità di nuove variabili prendiamo i coefficienti u, v e il quadrato

$$\rho = -f_\perp^2. \tag{129,15}$$

Dalle condizioni (129,7) si vede che la metrica nel piano p_1, p_2 è pseudoeuclidea. Possiamo perciò prendere l'asse tempo in questo piano, in modo che $f_\perp$ risulti un 4-vettore del genere spazio e $\rho > 0$.

Denotiamo temporaneamente con gli indici 0, x le componenti dei 4-vettori nel piano p_1, p_2, e con gli indici y, z le componenti nel piano normale. Per esprimere l'elemento di 4-volume

$$d^4 f = d^2 f_\perp d^2 f_{\|}$$

attraverso le nuove variabili, scriviamo

$$d^2 f_\perp = |f_\perp|\, d|f_\perp|\, d\varphi = \frac{1}{2}\, d\rho\, d\varphi \to \pi\, d\rho$$

(avendo presente che l'espressione integranda nella (129,9) non dipende dall'angolo φ). Continuando la trasformazione

$$d^2 f_{\|} = \left|\frac{\partial(f_0, f_x)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv = |p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x}|\, du\, dv \approx \frac{1}{2}\,|q^2|\, du\, dv.$$

Effettivamente, essendo il quadrato p_2^2 piccolo, abbiamo $p_{2x}^2 \approx p_{20}$, e perciò

$$(p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x})^2 \approx (p_{10}p_{20} - p_{2x}p_{1x})^2 = (p_1 p_2)^2 = \left(\frac{q^2}{2}\right)^2.$$

In tal modo,

$$d^4 f = \frac{1}{2}\,|t|\, du\, dv\, d^2 f_\perp \to \frac{\pi}{2}\,|t|\, du\, dv\, d\rho. \tag{129,16}$$

I successivi calcoli dipendono dal rapporto tra le quantità p_1^2, p_2^2, m^2. Esaminiamo due casi.

Caso di linee elettroniche virtuali

Siano gli impulsi p_1, p_2 relativi ad elettroni virtuali, e si abbia inoltre

$$|p_1^2|,\ |p_2^2| \gg m^2. \tag{129,17}$$

Noi vedremo che in questo caso la regione fondamentale d'integrazione, che porta all'espressione bilogaritmica, è la regione determinata dalle disuguaglianze

$$0 < \rho \ll |tu|,\ |tv|,$$
$$\left|\frac{p_1^2}{t}\right| \ll |v| \ll 1, \quad \left|\frac{p_2^2}{t}\right| \ll |u| \ll 1. \tag{129,18}$$

In relazione a ciò, nel denominatore dell'espressione integranda della (129,9) si può trascurare m^2, p_1^2, p_2^2, f^2 rispetto a $(p_1 f)$ o a $(p_2 f)$, e quindi

$$I_1 = \int \frac{d^4 f}{2(p_2 f)\, 2(p_1 f)\,(f^2 + i0)}. \tag{129,19}$$

Per le quantità $p_1 f$, $p_2 f$, f^2 abbiamo

$$f^2 = (up_1 + vp_2)^2 - \rho \approx -tuv - \rho,$$
$$2(p_1 f) = 2p_1(up_1 + vp_2) \approx -tv,$$
$$2(p_2 f) \approx -tu.$$

Allora,

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|t|} \int \frac{d\rho}{\rho + tuv - i0} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}. \tag{129,20}$$

Secondo le condizioni (129,18) l'integrazione in $d\rho$ si esegue nei limiti da 0 fino al valore minimo tra $|tv|$ e $|tu|$ e dà come risultato

$$\int_0^{\min\{|tu|,\,|tv|\}} \frac{d\rho}{\rho + tuv - i0} = \ln \min\left\{\frac{1}{|u|}, \frac{1}{|v|}\right\} + \begin{cases} i\pi & \text{per } tuv < 0, \\ 0 & \text{per } tuv > 0. \end{cases} \tag{129,21}$$

L'integrazione logaritmica in dv viene eseguita, invece, nei limiti da -1 a $-|p_1^2/t|$ e da $|p_1^2/t|$ a 1 (e analogamente per l'integrazione in du). Sostituendo la (129,21) nella (129,20) l'integrale in $du\,dv$ del primo termine si annulla per la parità della funzione integranda. L'integrazione del secondo termine, invece, viene eseguita su intervalli di valori di u e v dello stesso segno (per $t < 0$) o di segno diverso (per $t > 0$). In ambedue i casi le regioni $v > 0$ e $v < 0$ danno (dopo

l'integrazione in du) un uguale contributo, e come risultato troviamo

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t}\, 2 \int\limits_{\left|\frac{p_1^2}{t}\right|}^{1} \frac{du}{u} \int\limits_{\left|\frac{p_2^2}{t}\right|}^{1} \frac{dv}{v} = \frac{i\pi^2}{t} \ln\left|\frac{t}{p_1^2}\right| \ln\left|\frac{t}{p_2^2}\right| \qquad (129,22)$$

(il segno coincide col segno di t).

Infine, sostituendo nella (129,11), troviamo definitivamente

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{\alpha}{2\pi}\gamma^\mu \ln\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right| \ln\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|, \qquad (129,23)$$

$$|q^2| \gg |p_1^2|, \quad |p_2^2| \gg m^2.$$

Caso di terminali elettronici fisici

Siano ora gli impulsi p_1, p_2 relativi ad elettroni reali, e quindi

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2. \qquad (129,24)$$

In questo caso è importante la regione d'integrazione

$$\begin{aligned} &0 < \rho \ll |tu|, \ |tv|, \\ &0 < |v|, \ |u| \ll 1. \end{aligned} \qquad (129,25)$$

Poiché $p_1^2 - m^2 = p_2^2 - m^2 = 0$, allora, trascurando p_1^2 e p_2^2 rispetto a $p_1 f$ o $p_2 f$, ricondurremo nuovamente l'integrale (129,9) alla forma (129,19). Per la rimozione della divergenza infrarossa che compare in questo caso, è però necessario introdurre ancora nel propagatore fotonico una massa finita del fotone $\lambda \ll m$ (cfr. § 114):

$$I_1 = \int \frac{d^4 f}{2(p_1 f)\, 2(p_2 f)\,(f^2 - \lambda^2 + i0)}. \qquad (129,26)$$

Continuando i calcoli, abbiamo ora

$$\begin{aligned} f^2 &\approx -tuv - \rho, \\ 2p_1 f &\approx -tv + 2m^2 u, \\ 2p_2 f &\approx -tu + 2m^2 v, \end{aligned}$$

e quindi

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|t|} \int \frac{d\rho}{\rho + tuv + \lambda^2 - i0} \frac{du}{u - \tau v} \frac{dv}{v - \tau u}, \qquad (129,27)$$

dove $\tau = 2m^2/t \ll 1$.

Dopo l'integrazione in $d\rho$ (analoga alla (129,21)), troviamo

$$I_1 = -\frac{i\pi^2}{2|t|} \int\int \frac{du}{u - \tau v} \frac{dv}{v - \tau u},$$

dove l'integrazione è eseguita con la condizione $tuv + \lambda^2 < 0$. Le regioni $v > 0$ e $v < 0$ danno nuovamente un uguale contributo,

e dopo l'integrazione in du troviamo

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{t} \int_0^1 dv \int_{\delta/v}^1 \frac{du}{(u-\tau v)(v-\tau u)} = \frac{i\pi^2}{t} \int_0^1 \ln \frac{\tau\delta - v^2}{(\delta - \tau v^2)(\tau - v)} \frac{dv}{v}, \quad (129,28)$$

dove $\delta = \lambda^2/t \ll \tau$ e si è tenuto presente che $\tau \ll 1$.

Nell'integrale (129,28) sono due le regioni di valori di v che portano ad espressioni bilogaritmiche:

$$\text{I)} \qquad \tau \ll v \ll 1,$$

$$\text{II)} \quad \sqrt{\tau\delta} \ll v \ll \sqrt{\delta/\tau}.$$

Effettuando in ciascuna regione le opportune omissioni, otteniamo

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t} \left(\ln^2 \frac{|t|}{m^2} + 4 \ln \frac{|t|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right), \quad (129,29)$$

dove il primo termine è dovuto alla regione I, e il secondo alla regione II.

Infine, sostituendo nella (129,11), troviamo

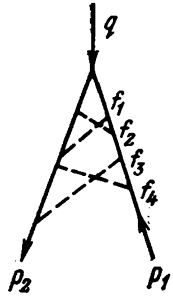
$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \left(\ln^2 \frac{|q^2|}{m^2} + 4 \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right),$$
$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2, \quad (129,30)$$

risultato che coincide con la (114,21).

§ 130. *Asintoto bilogaritmico dell'operatore di vertice*

Quando le correzioni a $\Gamma^{(1)}$, calcolate nel paragrafo precedente, raggiungono l'ordine di grandezza dell'unità, il calcolo dell'operatore di vertice esige che venga eseguita la somma di tutta la successione infinita dei termini bilogaritmici a tutte le potenze di α. La soluzione di questo problema risulta possibile grazie al fatto che tali termini sono dati solo da diagrammi di un determinato tipo, e i contributi dei diagrammi dei vari ordini risultano connessi tra loro da semplici relazioni.

Piú precisamente, i termini bilogaritmici sono originati, come vedremo piú avanti, da tutti i diagrammi del tipo



(130,1)

e simili, nei quali ciascuna delle linee fotoniche unisce la linea elettronica destra con quella sinistra intersecandosi tra loro in qualsiasi maniera.

Numeriamo gli impulsi fotonici f_1, f_2, ... nell'ordine di successione, ad esempio, dei terminali destri delle linee relative. Allora i diversi diagrammi di uno stesso ordine differiranno tra di loro per lo scambio dei terminali sinistri delle linee fotoniche. In ogni integrale di Feynman trascuriamo, nel numeratore e nel denominatore, i termini opportuni analogamente a come abbiamo fatto nell'integrale (129,5); trasformiamo quindi il numeratore esattamente come abbiamo fatto nella deduzione della (129,11). Come risultato la somma di tutti i diagrammi con n linee fotoniche, che costituisce in Γ un termine $\sim\alpha^n$, potrà venire rappresentata nella forma

$$\Gamma^{\mu(n)} = \gamma^\mu \left(\frac{i\alpha}{2\pi^3}\, t\right)^n I_n, \tag{130,2}$$

$$I_n = \sum_{\text{perm } 2} \int \frac{d^4 f_1 \ldots d^4 f_n}{\begin{array}{c} 2\,(p_1 f_1)^2\,(p_1 f_1 + p_1 f_2) \ldots 2\,(p_1 f_1 + \ldots + p_1 f_n)\, 2\,(p_2 f_1) \ldots \\ \ldots 2\,(p_2 f_1 + \ldots + p_2 f_n)\, f_1^2 f_2^2 \ldots f_n^2 \end{array}}, \tag{130,3}$$

dove la somma è estesa a tutte le permutazioni degli indici degli impulsi f_k nei prodotti $p_2 f_k$ (nei denominatori omettiamo, per brevità, i termini $i0$ e λ^2).

È evidente che se nella somma (130,3) permutiamo in qualsiasi modo gli indici dei fattori f_k nei prodotti $p_1 f_k$, questa operazione non porterà ad altro che ad una ridenominazione degli impulsi e non farà quindi variare i valori di I_n. Di conseguenza, la sommatoria nella (130,3) può venire estesa a tutte le permutazioni dei fattori f_k sia nei prodotti $p_2 f_k$ che $p_1 f_k$; il risultato va poi diviso per n!:

$$\sum_{\text{perm } 2} \to \frac{1}{n!} \sum_{\text{perm } 1} \sum_{\text{perm } 2}.$$

Facciamo ora uso di una formula importante

$$\sum_{\text{perm}} \frac{1}{a_1\,(a_1 + a_2) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)} = \frac{1}{a_1}\,\frac{1}{a_2} \ldots \frac{1}{a_n}, \tag{130,4}$$

dove la sommatoria è estesa alle permutazioni degli indici 1, 2, ..., n[1]). L'applicazione ripetuta due volte di questa formula riconduce una somma di integrali ad un prodotto di n integrali uguali del tipo (129,19) (oppure (129,26)), e quindi

$$I_n = \frac{1}{n!}\, I_1^n. \tag{130,5}$$

---

[1]) Per $n = 2$ questa formula è evidente, e la generalizzazione si ottiene facilmente per induzione.

Notiamo che, in sostanza, abbiamo già fatto uso della fattorizzazione secondo questa formula nella deduzione della (95,14) per la probabilità di emissione di fotoni molli.

Sostituendo la (130,5) nella (130,2) e sommando $\Gamma^{(n)}$ su tutti gli $n = 0, 1, 2, \ldots$, otteniamo

$$\Gamma^{\mu}(p_2, p_1; q) = \gamma^{\mu} \exp\left(\frac{ie^2}{2\pi^3} t I_1\right). \tag{130,6}$$

In particolare, usando qui la (129,22), otteniamo l'asintoto bilogaritmico dell'operatore di vertice con terminali elettronici virtuali

$$\Gamma^{\mu}(p_2, p_1; q) = \gamma^{\mu} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\pi} \ln\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right| \ln\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|\right\}, \tag{130,7}$$
$$|q^2| \gg |p_1^2|, |p_2^2| \gg m^2$$

(*V. V. Sudakov*, 1956).

Se poi si sostituisce l'espressione di I_1 ricavata dalla (129,29), troveremo l'asintoto per l'operatore di vertice nel caso di terminali elettronici reali:

$$\Gamma^{\mu}(p_2, p_1; q) = \gamma^{\mu} \exp\left\{-\frac{\alpha}{4\pi}\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right)\right\},$$
$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2. \tag{130,8}$$

Il fattore che differenzia questo Γ^{μ} dal suo valore imperturbato γ^{μ} determina anche la differenza dell'ampiezza di diffusione di un elettrone in un campo esterno dal rispettivo valore di Born. Perciò la sezione d'urto di diffusione è

$$d\sigma = d\sigma_{\mathrm{B}} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\pi}\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right)\right\}. \tag{130,9}$$

Per rimuovere la divergenza infrarossa occorre, però, moltiplicare ancora questa espressione con la somma delle probabilità di emissione di differenti numeri di fotoni molli con energia non superiore ad un certo piccolo valore $\omega_{\max}$, cioè con la quantità (vedi la (119,2))

$$1 + \int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega} + \frac{1}{2!}\int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_1} \int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_2} + \ldots = \exp\left\{\int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega}\right\}. \tag{130,10}$$

Prendiamo l'integrale nell'esponente dalla (117,14) (l'espressione che figura come moltiplicatore davanti a $d\sigma_{\mathrm{el}}$) e come risultato otteniamo la seguente formula asintotica per la sezione d'urto di diffusione di un elettrone di energia ε, per un grande valore dell'impulso trasferito:

$$d\sigma = d\sigma_{\mathrm{B}} \exp\left\{-\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{\varepsilon}{\omega_{\max}}\right\},$$
$$|q^2| \gg m^2, \quad \frac{\alpha}{2\pi}\ln^2\frac{\varepsilon}{m} \sim 1 \tag{130,11}$$

(*A. A. Abrikossov*, 1956). Il primo termine (in α) dello sviluppo di questa espressione coincide, naturalmente, con la formula (119,12).

§ 131. *Asintoto bilogaritmico dell'ampiezza di diffusione elettrone-muone*

I termini bilogaritmici nelle espressioni asintotiche delle ampiezze compaiono non solo per la diffusione di un elettrone in un campo esterno, ma anche per i processi di diffusione a due particelle.

Come esempio esaminiamo la diffusione di un elettrone su un muone negativo limitando il nostro studio al caso della diffusione all'indietro, cioè ad angolo $\theta = \pi$ (*V. G. Gorškov, V. N. Gribov, L. N. Lipatov, G. V. Frolov*, 1967). Questo processo è, nel suo genere, il piú semplice da due punti di vista. In primo luogo, data la non identità delle due particelle, mancano i diagrammi di scambio. In secondo luogo, nella diffusione all'indietro l'emissione di fotoni molli è fortemente attenuata, e di conseguenza non compare la divergenza infrarossa. In effetti, secondo la (95,8) la sezione d'urto di emissione di fotoni molli è

$$d\sigma = \alpha \left[\left(\frac{v'_e}{1-v'_e n} + \frac{v'_\mu}{1-v'_\mu n} - \frac{v_e}{1-v_e n} - \frac{v_\mu}{1-v_\mu n} \right) n \right]^2 \frac{d\omega\, do_n}{4\pi^2\omega}\, d\sigma_{\text{el}}, \tag{131,1}$$

dove v_e, v_μ e v'_e, v'_μ sono le velocità delle particelle prima e dopo l'urto. Nel caso ultrarelativistico, però, l'uguaglianza degli impulsi è equivalente all'uguaglianza delle velocità, e con tale precisione nel sistema del baricentro per la diffusione all'indietro abbiamo

$$v_e = -v_\mu = -v'_e = v'_\mu.$$

In conseguenza di ciò l'espressione (131,1) si annulla.

Se il processo di diffusione considerato corrisponde al canale di reazione s, allora nel canale t esso diventa il processo di trasformazione della coppia elettrone-positrone nella coppia $\mu^+\mu^-$. In questo canale la condizione $\theta = \pi$ significa che le direzioni del moto di e^- e μ^- (e di e^+ e μ^+) coincidono. L'attenuazione della radiazione di frenamento in questo canale ha un'origine particolarmente evidente, poiché la direzione del moto della carica di ciascun segno non cambia affatto.

L'elisione dei principali termini nella sezione d'urto di radiazione ha come conseguenza che nel suo asintoto non compaiono correzioni bilogaritmiche. Corrispondentemente (con la medesima precisione bilogaritmica) non compare alcuna divergenza infrarossa nemmeno nell'integrazione sugli impulsi dei fotoni virtuali nell'ampiezza di diffusione.

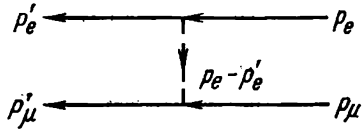
Se descriviamo il processo mediante le variabili invarianti

$$s = (p_e + p_\mu)^2, \quad t = (p_e - p'_e)^2, \quad u = (p_e - p'_\mu)^2,$$

alla diffusione all'indietro nel caso ultrarelativistico corrisponderanno i valori

$$s = -t \gg m_\mu^2, \quad u = 0. \tag{131,2}$$

Nella prima approssimazione (in α) della teoria delle perturbazioni la diffusione di un elettrone su un muone è descritta dal diagramma



(131,3)

L'ampiezza relativa è

$$M_{fi}^{(1)} = \frac{4\pi\alpha}{t} (\bar{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\nu u^{(\mu)}) (\bar{u}^{(e)\prime}\gamma_\nu u^{(e)}). \tag{131,4}$$

Il passaggio in quest'espressione al caso limite (131,2) si esegue mediante la sostituzione del 4-vettore matriciale γ^ν con la sua « proiezione » $\gamma_\perp^\nu$ nel piano normale al piano p_e, p'_e (oppure, ciò che fa lo stesso, al piano p_μ, p'_μ, poiché nella diffusione ultrarelativistica all'indietro $p_e \approx p'_\mu$, $p'_e \approx p_\mu$). In effetti, le componenti parallele al piano p_e, p'_e sono date dalle matrici

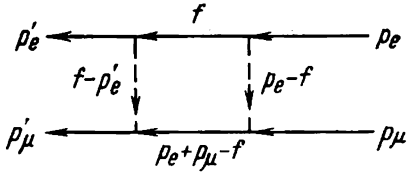
$$\frac{1}{\sqrt{s}}(\hat{p}_e + \hat{p}'_e), \quad \frac{1}{\sqrt{s}}(\hat{p}_e - \hat{p}'_e)$$

(la prima coincide con γ^0, la seconda è uguale a $\boldsymbol{n}_e\boldsymbol{\gamma}$, dove $\boldsymbol{n}_e$ è il versore nella direzione di $\boldsymbol{p}_e$). Usando le equazioni di Dirac per i bispinori $u^{(e)}$ e $u^{(\mu)}$, troviamo che

$$(\bar{u}^{(\mu)\prime}\gamma_{\parallel}^\nu u^{(\mu)}) (\bar{u}^{(e)\prime}\gamma_{\nu\parallel} u^{(e)}) \sim \frac{1}{s},$$

e quindi questi termini possono essere tralasciati.

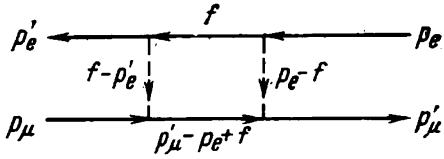
Nell'approssimazione successiva vengono ad aggiungersi il diagramma



(131,5)

ed un altro diagramma con le linee fotoniche « incrociate », che, per comodità, rappresenteremo in una forma che differisce dalla (131,5)

solo per la direzione di una delle linee continue:



(131,6)

Lo studio dei relativi integrali mostra che in ambedue i diagrammi compaiono contributi bilogaritmici provenienti dalle regioni dei fotoni virtuali « molli »:

$$|(f-p_e)^2| \ll m_e^2 \quad \text{oppure} \quad |(f-p'_e)^2| \ll m_e^2.$$

Questi termini sono connessi alle divergenze infrarosse degli integrali e, secondo quanto detto sopra, nel caso considerato essi devono chiaramente elidersi. Nel diagramma (131,6) si ha, tuttavia, un contributo bilogaritmico dovuto alla regione dei grandi impulsi: $|f^2| \gg m_\mu^2$. È proprio questo termine che deve essere calcolato.

Al diagramma (131,6) corrisponde l'integrale

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{i\alpha^2}{\pi^2} \int \frac{(\bar{u}^{(e)\prime}\gamma^\nu(\hat{f}+m_e)\gamma_\lambda u^{(e)})\,(\bar{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\lambda(\hat{f}+m_\mu)\gamma_\nu u^{(\mu)})}{(p'_e-f)^2(f^2-m_e^2)(f^2-m_\mu^2)(p_e-f)^2}\,d^4f \qquad (131,7)$$

(dove si è tenuto presente che $p_e \approx p'_\mu$). Poniamo nuovamente

$$f = up_e + vp'_e + f_\perp \qquad (131,8)$$

(cfr. la (129,13)). Il contributo bilogaritmico è dato dalla regione determinata dalle disuguaglianze

$$\begin{gathered} |su|,\ |sv| \gg \rho \gg m_\mu^2, \\ \frac{m_\mu^2}{s} \ll |u|,\ |v| \ll 1, \end{gathered} \qquad (131,9)$$

dove $\rho = -f_\perp^2$. Il 4-vettore $f_\perp$ è definito in modo tale che $f_\perp p_e = f_\perp p'_e = 0$; nel caso considerato (diffusione all'indietro) da qui discende che nel sistema del baricentro $f_\perp^0 = 0$, e quindi $\rho = f_\perp^2$.

Nel numeratore dell'integrale (131,7) possiamo trascurare m_e, m_μ, ed anche tutti i termini con u o v; i fattori u e v nel numeratore si semplificherebbero con i corrispondenti poli nel denominatore (vedi piú avanti), e in conseguenza di ciò non comparirebbero i quadrati richiesti dei logaritmi. Notando che

$$(p'_e-f)^2 \approx tu \approx -su, \quad (p_e-f)^2 \approx -sv, \quad f^2 \approx suv-\rho,$$

e trasformando l'elemento d'integrazione d^4f secondo la (129,16), riscriviamo l'integrale (131,7) nella forma

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{i\alpha^2}{2\pi^2} \int \frac{(\bar{u}^{(e)\prime}\gamma^\nu\hat{f}_\perp\gamma_\lambda u^{(e)})\,(\bar{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\lambda\hat{f}_\perp\gamma_\nu u^{(\mu)})}{su\cdot sv\,(suv-\rho+i0)^2}\,s\,du\,dv\,d^2f_\perp.$$

Il numeratore dell'espressione integranda si può ulteriormente trasformare eseguendo la media sulle direzioni di $f_\perp$ e sostituendo (per le stesse ragioni che nella (131,4)) γ^ν, γ^λ, con $\gamma^\nu_\perp$, $\gamma^\lambda_\perp$. Dopo semplici trasformazioni otteniamo

$$M_{fi}^{(2)} = M_{fi}^{(1)} J^{(1)}, \tag{131,10}$$

dove

$$J^{(1)} = -i\frac{\alpha}{4\pi^2}\int \frac{\rho\, du\, dv\, d\rho}{uv\,(suv-\rho+i0)^2}$$

Infine, operando nel numeratore la sostituzione identica $\rho = (\rho - suv) + suv$, si può omettere il secondo termine che si semplificherebbe con i poli semplici nel denominatore e non darebbe alcun contributo bilogaritmico. In tal modo

$$J^{(1)} = -\frac{i\alpha}{4\pi^2}\int \frac{du\, dv\, d\rho}{uv\,(\rho-suv-i0)}. \tag{131,11}$$

Questo integrale coincide nella forma con la (129,20), e quindi l'integrazione in $d\rho$ si esegue allo stesso modo. Tuttavia, poiché ora $\rho \gg m_\mu^2$, deve essere soddisfatta la condizione $suv \gg m_\mu^2$ (in luogo di $suv > 0$). Per risultato otteniamo

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi}\int \frac{du\, dv}{uv}, \tag{131,12}$$

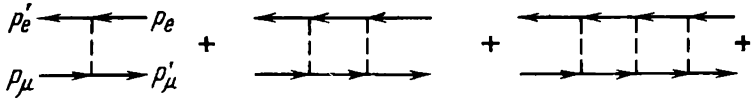
dove la regione d'integrazione è definita dalle disuguaglianze

$$\frac{m_\mu^2}{s} < u,v < 1, \quad suv > m_\mu^2$$

(calcolando con precisione logaritmica, le disuguaglianze forti $\gg$ vengono sostituite con le disuguaglianze semplici $>$). Calcolando direttamente troviamo

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{4\pi}\ln^2\frac{s}{m_\mu^2}. \tag{131,13}$$

Nelle approssimazioni di ordine superiore della teoria delle perturbazioni i termini che a noi interessano, i termini $\sim\alpha^n \ln^{2n} s$, si ottengono da diagrammi analoghi al diagramma (131,6) del tipo « a scala » con un numero maggiore di « pioli ». Perciò l'asintoto bilogaritmico completo dell'ampiezza di diffusione è dato dalla somma infinita[1])

$iM_{fi} =$ 

(131,14)

[1]) La somma di questa serie porta all'equazione di Bethe — Salpeter (§ 122), risolvendo la quale si può trovare M_{fi}. Risulta, tuttavia, piú comodo eseguire i calcoli col procedimento esposto nel seguito, secondo il quale la semplificazione di ciascun termine viene eseguita prima della somma.

Per stabilire la forma generale dei termini di questa somma, esaminiamo ancora un diagramma della terza approssimazione (il terzo termine della serie (131,14)). L'integrale relativo può essere ricondotto alla forma

$$M_{fi}^{(3)} = M_{fi}^{(1)} J^{(2)}, \quad J^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2}{u_1 v_1 (u_1+u_2)(v_1+v_2)}, \tag{131,15}$$

dove la regione d'integrazione è

$$\frac{m_\mu^2}{s} < u_{1,2},\ v_{1,2} < 1, \quad s u_1 v_1,\ s u_2 v_2 > m_\mu^2.$$

La parte bilogaritmica di questo integrale può essere separata imponendo alle variabili d'integrazione le condizioni supplementari[1])

$$v_2 \gg v_1, \quad u_2 \gg u_1. \tag{131,16}$$

Allora

$$J^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2}{u_1 u_2 v_1 v_2} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int d\xi_1\, d\eta_1\, d\xi_2\, d\eta_2,$$

dove

$$\xi_i = \ln \frac{s u_i}{m_\mu^2}, \quad \eta_i = -\ln v_i,$$

e la regione d'integrazione è determinata dalle disuguaglianze

$$\xi_1 > \eta_1, \quad \xi_2 > \eta_2, \quad \sigma > \xi_2, \eta_2 > 0, \quad \sigma = \ln \frac{s}{m_\mu^2}.$$

In modo analogo l'n-esimo termine della serie può essere rappresentato nella forma $M_{fi}^{(n)} = M_{fi}^{(1)} J^{(n)}$, dove

$$J^{(n)}(\sigma) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \int d\xi_1\, d\eta_1 \ldots d\xi_n\, d\eta_n, \tag{131,17}$$

e l'integrazione è eseguita sulla regione

$$\xi_i > \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \sigma > \xi_n, \quad \eta_n > 0. \tag{131,18}$$

L'ampiezza totale di diffusione è uguale a

$$M_{fi} = M_{fi}^{(1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J^{(n)}(\sigma)\right]. \tag{131,19}$$

Per calcolare questa somma introduciamo le funzioni ausiliarie $A^{(n)}(\xi, \eta)$, che sono date sempre dagli integrali (131,17), ma nei quali le regioni d'integrazione sono

$$\xi_i > \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \xi > \xi_n > 0, \quad \eta > \eta_n > 0 \tag{131,20}$$

---

[1]) Questo metodo potrebbe venire applicato anche per il calcolo dell'integrale (130,3).

(limiti d'integrazione differenti per ξ_n e η_n al posto dei limiti uguali della (131,18)). È evidente che $M_{fi} = M_A^{(1)} A(\sigma, \sigma)$, dove

$$A(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(\xi, \eta), \quad A^{(0)} = 1. \tag{131,21}$$

Dalla definizione delle funzioni $A^{(n)}(\xi, \eta)$ è chiaro che esse soddisfano le relazioni di ricorrenza

$$A^{(n)}(\xi, \eta) = \frac{\alpha}{2\pi} \int d\xi_1 \, d\eta_1 A^{(n-1)}(\xi_1, \eta_1),$$

e sommando queste uguaglianze su n (da 1 a ∞), troviamo l'equazione che determina la funzione $A(\xi, \eta)$:

$$\begin{gathered} A(\xi, \eta) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int A(\xi_1, \eta_1) \, d\xi_1 \, d\eta_1, \\ \xi_1 > \eta_1, \quad \xi > \xi_1 > 0, \quad \eta > \eta_1 > 0. \end{gathered} \tag{131,22}$$

In seguito sarà sufficiente considerare la funzione $A(\xi, \eta)$ nella regione $\xi > \eta$. Allora l'equazione (131,22) può essere scritta nella forma

$$A(\xi, \eta) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\eta} \int_{\eta_1}^{\xi} A(\xi_1, \eta_1) \, d\xi_1 \, d\eta_1. \tag{131,23}$$

Derivando questa uguaglianza rispetto a η, abbiamo

$$\frac{\partial A(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\eta}^{\xi} A(\xi_1, \eta) \, d\xi_1, \tag{131,24}$$

e derivando poi ancora anche rispetto a ξ, troviamo per $A(\xi, \eta)$ l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta \, \partial \xi} - \frac{\alpha}{2\pi} A = 0. \tag{131,25}$$

Questa equazione deve essere risolta con le condizioni al contorno

$$A(\xi, 0) = 1, \quad \left.\frac{\partial A}{\partial \eta}\right|_{\xi=\eta} = 0, \tag{131,26}$$

che discendono direttamente dalle (131,23-24).

La soluzione si può ottenere mediante la trasformazione di Laplace rispetto alla variabile ξ:

$$A(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{p\xi} Q(p, \eta) \, dp, \tag{131,27}$$

dove il cammino C nel piano dei p complessi è una curva chiusa che circonda il punto $p = 0$. Portando la (131,27) nell'equazione (131,25)

e uguagliando a zero l'espressione integranda, otteniamo

$$p\frac{\partial Q}{\partial \eta}=\frac{\alpha}{2\pi}Q, \quad Q=\varphi(p)\,e^{\frac{\alpha\eta}{2\pi p}},$$

dove $\varphi(p)$ è una funzione qualsiasi. La prima delle condizioni al contorno (131,26) dà ora

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{p\xi}\varphi(p)\,dp=1,$$

da cui segue che

$$\varphi(p)=\frac{1}{p}+\psi(p),$$

dove $\psi(p)$ è una funzione analitica priva di singolarità all'interno del cammino C. La seconda condizione (131,26) si può soddisfare ponendo $\psi(p)=-2\pi p/\alpha$; effettivamente, in tal caso abbiamo

$$\frac{\partial A}{\partial \eta}\Big|_{\xi=\eta}=-\frac{1}{\xi}\int\limits_C \frac{d}{dp}\,e^{\xi\left(p+\frac{\alpha}{2\pi p}\right)}\,dp=0.$$

Raccogliendo le espressioni ottenute e ponendo $\xi=\eta=\sigma$, troviamo

$$A(\sigma,\sigma)=-\frac{1}{2\pi i}\,\frac{2\pi}{\alpha\sigma}\int\limits_C p\,\frac{d}{dp}\,e^{\sigma\left(p+\frac{\alpha}{2\pi p}\right)}\,dp.$$

Infine, integrando per parti e ricorrendo alla nota formula

$$I_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{\frac{z}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)}\,dp$$

($I_1(z)=-iJ_1(iz)$ è la funzione di Bessel di argomento immaginario), per l'ampiezza di diffusione otteniamo definitivamente

$$M_{fi}=M_{fi}^{(1)}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\sigma^2}}\,I_1\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\,\sigma\right). \qquad (131,28)$$

La sezione d'urto di diffusione (ad angolo $\theta=\pi$) è corrispondentemente uguale a

$$d\sigma=d\sigma^{(1)}\frac{2\pi}{\alpha\ln^2(s/m_\mu^2)}\,I_1^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\ln\frac{s}{m_\mu^2}\right), \qquad (131,29)$$

dove

$$d\sigma^{(1)}=\frac{2\pi\alpha^2}{s^2}\,dt$$

è la sezione d'urto nell'approssimazione di Born nel caso ultrarelativistico (vedi problema 6, § 82)[1].

[1]) Riportiamo qui alcuni rimandi ai lavori originali sul tema degli asintoti bilogaritmici dei processi di diffusione a due particelle: V. G. Goršk ov, V. N. Gribov, G. V. Frolov, ŽETF 51, 1093 (1966) (diffusione all'indietro di un fotone su un elettrone); V. G. Goršk ov, V. N. Gribov, L. N. Lipatov, G. V. Frolov, JaF 6, 361 (1967) (diffusione all'indietro elettrone-positrone); V. G. Goršk ov, JaF 6, 579, (1967) (processi di diffusione ad angoli arbitrari).

Capitolo XIV

ELETTRODINAMICA DEGLI ADRONI

§ 132. *Fattori di forma elettromagnetici degli adroni*

Finora in questo libro si è parlato dell'elettrodinamica quantistica delle particelle, che non possono interagire fortemente: elettroni, positroni e muoni. Esiste anche una grande quantità di particelle che interagiscono fortemente. Queste particelle si chiamano adroni (a tradurre dal greco sarebbe « grande », « massiccio »). Per esempio, adroni sono i protoni e i neutroni che hanno spin 1/2, i π-mesoni a spin 0 e altre particelle. Logicamente adroni sono anche i nuclei atomici poiché sono formati da protoni e neutroni.

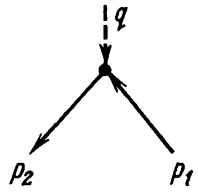
La costruzione di una esauriente elettrodinamica degli adroni nell'ambito della teoria esistente non è possibile. È chiaro che è impossibile comporre delle equazioni che descrivono le interazioni elettromagnetiche senza tenere conto delle interazioni forti che sono notevolmente piú intense. La mancanza di una teoria delle interazioni forti non permette di stabilire la forma esplicita della corrente adronica, mediante la quale devono descriversi le interazioni nell'elettrodinamica quantistica. In questa situazione ci si deve limitare ad introdurre la corrente adronica come quantità fenomenologica, la cui struttura viene stabilita solo sulla base di condizioni cinematiche generali non connesse ad alcuna supposizione sulla dinamica delle interazioni. L'operatore di interazione elettromagnetica avrà, invece, la forma solita

$$-e\,(\mathbf{JA}), \tag{132,1}$$

dove ora la corrente è designata con la lettera maiuscola **J** (a differenza della corrente elettronica **j**). Poiché l'ordine di grandezza di questa interazione è dato sempre dalla carica elementare e, possiamo usare, come precedentemente, i metodi della teoria delle perturbazioni.

Stabiliamo la forma della corrente di transizione tra due stati di un adrone in moto libero (non accompagnato da alcun tipo di trasformazione dell'adrone stesso). Questa corrente entra nel dia-

gramma « a tre code »



(132,2)

che, a sua volta, può entrare come elemento in qualche altro diagramma piú complesso (ad esempio, nel diagramma descrivente la diffusione elastica di un elettrone su un adrone). La linea tratteggiata nel diagramma (132,2) rappresenta un fotone virtuale; essa non può corrispondere ad un fotone reale poiché una particella libera non può assorbire (né irradiare) tale fotone. Quindi

$$q^2 = (p_2 - p_1)^2 < 0.$$

Esaminiamo dapprima un adrone di spin 0. Siano u_1 e u_2 le ampiezze d'onda degli stati iniziale e finale dell'adrone, nei quali la particella ha i 4-impulsi p_1 e p_2; per una particella a spin 0 queste ampiezze sono degli scalari (o degli pseudoscalari)[1]. La corrente adronica di transizione J_{fi} tra questi due stati deve essere bilineare in u_1 e u_2^*. Scriviamola nella forma

$$J_{fi} = u_2^* \Gamma u_1, \tag{132,3}$$

dove il 4-vettore Γ è un operatore di vertice ignoto (rappresentato nel diagramma (132,2) dal cerchietto centrale). Se poniamo $u_1 = u_2 = 1$, avremo semplicemente $J_{fi} = \Gamma$.

Una proprietà universale della corrente in elettrodinamica, connessa all'invarianza di gauge della teoria, è la sua conservazione. Nella rappresentazione degli impulsi questa proprietà è espressa dall'ortogonalità della corrente di transizione al 4-impulso del fotone $q = p_2 - p_1$:

$$qJ_{fi} = 0. \tag{132,4}$$

Nel caso considerato ciò significa che Γ deve avere la forma

$$\Gamma = PF(q^2), \tag{132,5}$$

dove $P = p_1 + p_2$, e $F(q^2)$ è una funzione scalare dell'unica variabile indipendente invariante, il quadrato q^2. Poiché nella transizio-

---

[1]) Ricordiamo che un'onda piana ha la forma $\psi = \frac{u}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ipx}$. Alla normalizzazione ad una particella nell'unità di volume corrisponde (per particelle a spin 0) la normalizzazione dello scalare $u^*u = 1$; si può anche porre semplicemente $u = 1$ (§ 10). Nel seguito noi definiamo la corrente di transizione rispetto alle ampiezze u_1, u_2 in accordo con le notazioni del § 65.

ne la particella rimane dello stesso tipo, abbiamo $p_1^2 = p_2^2 = M^2$ (M è la massa dell'adrone), e quindi $Pq = 0$.

Gli elementi di matrice (132,3) con Γ preso dalla (132,5) (e con essi anche l'operatore J) sono dei veri 4-vettori. Perciò l'operatore d'interazione (132,1) è un vero scalare. In tal modo, l'interazione elettromagnetica degli adroni a spin 0 risulta automaticamente P-invariante. Essa risulta possedere anche l'invarianza T. In effetti, l'inversione del tempo, in primo luogo, scambia di posto i 4-impulsi iniziale e finale; la somma $P = p_1 + p_2$ resta ovviamente invariata. In secondo luogo, l'inversione del tempo cambia il segno delle componenti spaziali dei 4-impulsi lasciando inalterati i segni delle rispettive componenti temporali; ma proprio in questo stesso modo si trasformano anche le componenti del 4-potenziale A, e quindi il prodotto JA non cambia.

La funzione invariante $F(q^2)$ è detta *fattore di forma elettromagnetico* dell'adrone. Nell'ambito di una teoria fenomenologica la sua forma non può, ovviamente, essere stabilita. Si può, tuttavia, affermare che questa funzione è reale (nel campo del valori considerati $q^2 < 0$). Questa affermazione segue da quelle stesse considerazioni che furono applicate nel § 113 ai fattori di forma dell'elettrone: per $q^2 < 0$ mancano, in ogni caso, gli stati intermedi che possono figurare nel membro destro della relazione di unitarietà; perciò la matrice M_{fi}, e con essa anche J_{fi}, sono hermitiane.

Per $q = 0$ lo stato iniziale e quello finale coincidono, e quindi J_{fi} diventa un elemento di matrice diagonale. In particolare, $e(J^0)_{ii}/2\varepsilon_i = eF(0)$ è la densità di carica, che coincide (per la normalizzazione ad una particella nell'unità di volume!) con la carica totale della particella.

Per una particella elettricamente neutra $F(0) = 0$. Sottolineiamo, però, che ciò non significa che la particella sia realmente neutra. Se la particella è realmente neutra e possiede una determinata parità di carica, allora $F(q^2) \equiv 0$ per tutti i q^2: avendo l'operatore di corrente parità di carica dispari (§ 13), i suoi elementi di matrice rispetto a due stati di uno stesso adrone sono nulli[1]).

Passiamo ora ad esaminare gli adroni a spin 1/2. In questo caso le ampiezze d'onda u_1, u_2 sono dei bispinori e la corrente adronica ha la forma

$$J_{fi} = \bar{u}_2 \Gamma u_1. \tag{132,6}$$

Mediante combinazioni bilineari di $\bar{u}_2$ e u_1 e dei 4-vettori p_1, p_2 si possono comporre sia delle quantità realmente quadrivettoriali sia

[1]) Questo, certamente, non significa che tale adrone non interagisca affatto col campo elettromagnetico. Il prodotto di due operatori di corrente, J (x) J (x'), possiede parità di carica pari, e i suoi elementi di matrice non sono nulli per transizioni tra stati aventi la stessa parità di carica. Perciò, un adrone realmente neutro può diffondere un fotone ed anche irradiare simultaneamente due fotoni, cioè partecipare a processi di ordine superiore in α.

delle quantità pseudovettoriali (che soddisfano la condizione (132,4)). Perciò la condizione di invarianza P dell'interazione non viene soddisfatta automaticamente e deve essere imposta supplementarmente[1]). Come abbiamo mostrato nel § 113, con questa condizione supplementare l'operatore di vertice contiene due fattori di forma indipendenti reali (per $q^2 < 0$). Scriviamo ora questo operatore nella forma

$$\Gamma^\mu = 2M(F_e - F_m)\frac{P^\mu}{P^2} + F_m\gamma^\mu =$$

$$= 2M\left(F_e - \frac{q^2}{4M^2}F_m\right)\frac{P^\mu}{P^2} - \frac{F_m}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu =$$

$$= (4M^2F_e - q^2F_m)\frac{\gamma^\mu}{P^2} + \frac{2M}{P^2}(F_e - F_m)\sigma^{\mu\nu}q_\nu, \qquad (132,7)$$

dove $F_e(q^2)$ e $F_m(q^2)$ sono fattori di forma invarianti (M è la massa dell'adrone); dell'equivalenza delle tre espressioni scritte è facile convincersi mediante le uguaglianze $P^2 + q^2 = 4M^2$ e la (113,5)[2]).

I fattori di forma elettromagnetici appartengono alla categoria delle ampiezze invarianti, concetto che fu introdotto nel § 71. Essi possono considerarsi come ampiezze « di reazione » che rappresentano (nel canale di annichilazione) la disintegrazione di un fotone virtuale in adrone e antiadrone. Il fotone virtuale è una « particella » a spin 1. Del fatto che la disintegrazione di un fotone virtuale in due particelle a spin 1/2 debba essere descritta da due ampiezze indipendenti ci si può convincere anche con un calcolo delle rispettive ampiezze nella rappresentazione delle elicità $\langle\lambda_b\lambda_c \mid S^J \mid \lambda_a\rangle$ (vedi § 70). Effettivamente, in forza dell'invarianza P i quattro elementi non nulli della matrice S sono a due a due uguali:

$$\langle 1/2\ 1/2 \mid S^1 \mid 1\rangle = \langle -1/2\ -1/2 \mid S^1 \mid -1\rangle,$$
$$\langle 1/2\ -1/2 \mid S^1 \mid 0\rangle = \langle -1/2\ 1/2 \mid S^1 \mid 0\rangle.$$

---

[1]) I dati sperimentali disponibili non manifestano violazioni della legge di conservazione della parità spaziale nelle interazioni elettromagnetiche degli adroni.

[2]) L'opportunità di definire i fattori di forma secondo la (132,7) (*R. Sachs*, 1962) verrà chiarita piú avanti. Nella letteratura scientifica sono usati anche i fattori di forma F_1, F_2 definiti analogamente a f e g della (113,6), cioè definiti secondo la relazione

$$\Gamma^\mu = F_1\gamma^\mu - \frac{F_2}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu.$$

Essi sono connessi con F_e, F_m mediante relazioni

$$F_e = F_1 + F_2\frac{q^2}{4M^2}, \quad F_m = F_1 + F_2.$$

La richiesta di invarianza T (o di invarianza C nel canale di annichilazione) non aggiunge nuove relazioni tra questi elementi. A questa circostanza è connesso il fatto che l'interazione descritta dall'operatore di vertice (132,7) risulta automaticamente anche T-invariante (tale situazione, tuttavia, non ha già piú luogo per particelle di spin superiore).

Per $q \to 0$ i termini di ordine zero e uno (in q) nella (132,7) sono

$$\Gamma^{\mu} = F_e(0)\,\gamma^{\mu} - \frac{1}{2M}\,[F_m(0) - F_e(0)]\,\sigma^{\mu\nu} q_{\nu}. \qquad (132,8)$$

Da qui si vede (vedi § 113) che F_e (0) è la carica elettrica della particella (in unità e), e F_m (0) — F_e (0) è il suo momento magnetico anomalo (in unità $e/2M$)[1].

Finora abbiamo usato i fattori di forma solo nello spazio degli impulsi. Ciò è, ovviamente, sufficiente per descrivere i fenomeni osservabili. A scopo puramente illustrativo, tuttavia, si può dare ai fattori di forma un'interpretazione un poco piú visuale, considerandoli come le trasformate di Fourier di certe funzioni delle coordinate.

A tale scopo è comodo scegliere il sistema di riferimento in cui $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 0$ (il cosiddetto *sistema di Breit*); questo è sempre possibile essendo $P^2 > 4M^2 > 0$. In tale sistema $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon$, e quindi $P^0 = 2\varepsilon$, mentre le componenti del 4-vettore q sono $q^0 = 0$, $\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{p}_2 = -2\boldsymbol{p}_1$.

Per un adrone a spin 0 la corrente di transizione assume, nel sistema di riferimento di Breit, una forma particolarmente semplice:

$$\frac{J^0_{fi}}{2\varepsilon} = F(-q^2), \quad \boldsymbol{J} = 0.$$

Da qui si vede che $F(-q^2)$ può essere interpretato come la trasformata di Fourier di una distribuzione statica di cariche di densità

$$\rho(\boldsymbol{r}) = e\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int F(-q^2)\,e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}d^3q. \qquad (132,9)$$

In questo senso si parla di una struttura elettromagnetica spaziale della particella: per F = costante = 1 si avrebbe $\rho(\boldsymbol{r}) = e\delta(\boldsymbol{r})$; la dipendenza del fattore di forma da $\boldsymbol{q}$ viene interpretata come uno scostamento della distribuzione della carica dalla distribuzione puntiforme. Sottolineiamo, però, che non si deve dare a questa interpretazione un significato letterale. La funzione $\rho(\boldsymbol{r})$ non è relativa, in generale, ad un qualsiasi sistema di riferimento determinato, poiché ad ogni valore di $\boldsymbol{q}$ corrisponde un suo sistema di riferimento.

Solo nel limite non relativistico dei piccoli $\boldsymbol{q}^2 \ll M^2$, quando è possibile trascurare la variazione dell'energia della particella nella

---

[1]) Cosí, per il protone $F_e(0) = 1$, $F_m(0) - F_e(0) = 1{,}793$. Per il neutrone $F_e(0) = 0$, $F_m(0) = -1{,}913$ (momento magnetico interamente « anomalo »).

diffusione, il sistema di riferimento di Breit coincide col sistema di quiete della particella e non dipende da q. In questa approssimazione gli stati iniziale e finale della particella sono uguali, e quindi la corrente di transizione diventa un elemento diagonale di matrice e la funzione $\rho(\boldsymbol{r})$ assume il reale significato di distribuzione spaziale delle cariche. Per le particelle elementari, tuttavia, i valori caratteristici di $|\boldsymbol{q}|$, sui quali i fattori di forma variano sensibilmente, sono solo di poco inferiori a M. Perciò nel limite non relativistico $F(-q^2)$ può venire sostituito con $F(0)$, considerando cosí la particella come puntiforme. Una situazione differente si ha per i nuclei. La massa del nucleo M è proporzionale al numero dei nucleoni A in esso contenuti, e il valore caratteristico $|\boldsymbol{q}| \sim 1/R$, è cioè proporzionale a $A^{-1/3}$ (R è il raggio del nucleo). Di conseguenza, per nuclei sufficientemente pesanti sono caratteristici i valori $q^2 \ll M^2$, e, in tal modo, l'analisi non relativistica è ammissibile su tutto l'intervallo importante dei valori; con ciò il concetto di struttura elettromagnetica del nucleo viene ad assumere un senso ben determinato.

Per una particella a spin 1/2, dalla (132,7) nel sistema di Breit otteniamo

$$J^0_{fi} = (F_e - F_m)\frac{M}{\varepsilon}(\bar{u}_2 u_1) + F_m(\bar{u}_2\gamma^0 u_1) = F_e(\bar{u}_2\gamma^0 u_1), \qquad (132,10)$$

$$\boldsymbol{J}_{fi} = \frac{1}{2M} F_m[i\boldsymbol{q}\cdot(\bar{u}_2\boldsymbol{\Sigma}u_1)], \qquad (132,11)$$

dove $\boldsymbol{\Sigma}$ è l'operatore tridimensionale di spin (una matrice) (21,21), e nella (132,10) è stata usata l'uguaglianza

$$\varepsilon(\bar{u}_2\gamma^0 u_1) = M(\bar{u}_2 u_1),$$

che è facilmente verificabile mediante le equazioni di Dirac per u_1 e $\bar{u}_2$ per $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$.

La componente temporale della corrente di transizione (132,10) differisce dall'espressione per una « particella puntiforme » (elettrone) per il fattore $F_e(-q^2)$. Si può perciò dire che il fattore di forma F_e (chiamato *fattore di forma di carica*) descrive la « distribuzione spaziale della carica » secondo la (132,9).

Analogamente, al vettore tridimensionale (132,11) si può mettere in corrispondenza una « distribuzione spaziale » della densità delle correnti $e\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{r})$, dove

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{r}) = \frac{e}{2M}\boldsymbol{\Sigma}\int F_m(-q^2)\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} d^3q$$

rappresenta la « densità di momento magnetico ». In tal modo, il fattore di forma F_m (detto *fattore di forma magnetico*) può essere interpretato come la densità di distribuzione spaziale del momento magnetico; ciò, ovviamente, con tutte le riserve fatte precedentemente a proposito della distribuzione della carica. Qui F_m include

in sé sia il momento magnetico « normale » di Dirac che il momento « anomalo » peculiare dell'adrone; alla « densità » del momento « anomalo » corrisponde la differenza $F_m - F_e$.

È naturale ritenere che i punti singolari dei fattori di forma adronici, come anche di quelli elettronici, siano disposti per valori reali positivi dell'argomento $t = q^2 = -\mathbf{q}^2$. Questo permette di trarre determinate conclusioni sul comportamento asintotico della distribuzione $\rho(r)$ (e di $\mu(r)$) per $r \to \infty$. Precisamente, una trasformazione dell'integrale (132,9), analoga a quella eseguita nel § 111 per passare dalla (111,3) alla (111,4), conduce al risultato che ai grandi r avremo

$$\rho(r) \backsim e^{-\varkappa_0 r},$$

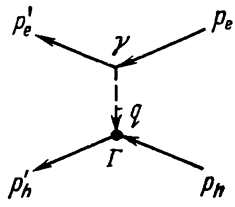
dove $\varkappa_0^2$ è l'ascissa del primo punto singolare del fattore di forma $F(q^2)$ (cfr. anche la nota a pag. 564). Se, come accade di solito, la singolarità piú vicina è costituita dalla soglia di creazione da parte del fotone virtuale di una coppia di adroni (ognuno di massa M_0), allora $\varkappa_0 = 2M_0$.

§ 133. *Diffusione di elettroni da parte di adroni*

Applichiamo le formule ottenute nel paragrafo precedente alla diffusione elastica di un elettrone su un adrone. Designiamo il 4-impulso iniziale e finale dell'adrone rispettivamente con p_h e p_h' e i 4-impulsi dell'elettrone rispettivamente con p_e e p_e'; per essi vale la relazione

$$p_e + p_h = p_e' + p_h'. \tag{133,1}$$

Il processo considerato è rappresentato dal diagramma



(133,2)

All'emissione di un fotone virtuale da parte di un elettrone corrisponde l'operatore di vertice ordinario γ; all'assorbimento dello stesso da parte di un adrone corrisponde l'operatore Γ.

Esaminiamo il caso, che presenta il maggior interesse, di un adrone a spin 1/2 (ad esempio, la diffusione di un elettrone da parte di un protone o di un neutrone).

Al diagramma (133,2) corrisponde l'ampiezza di diffusione

$$M_{fi} = 4\pi e^2 \frac{1}{q^2} (\bar{u}_e' \gamma^\mu u_e)(\bar{u}_h' \Gamma_\mu u_h). \tag{133,3}$$

Il calcolo della sezione d'urto da quest'ampiezza non presenta differenze di principio dai calcoli effettuati nel § 82; qui è comodo scrivere l'operatore Γ nella forma della prima delle espressioni (132,7).

Per la diffusione di particelle non polarizzate si ottiene il seguente risultato:

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2\, dt}{[s-(M+m)^2]\,[s-(M-m)^2]\, t^2 \left(1-\frac{t}{4M^2}\right)} \times$$
$$\times \left\{ F_e^2\,[(s-u)^2+(4M^2-t)\,t] - \right.$$
$$\left. -\frac{t}{4M^2} F_m^2\,[(s-u)^2-(4M^2-t)\,(4m^2+t)] \right\}. \qquad (133,4)$$

Qui M è la massa dell'adrone, m la massa dell'elettrone,

$$s=(p_e+p_h)^2, \quad t=q^2=(p_e-p_e')^2, \quad u=(p_e-p_h')^2,$$
$$s+t+u=2m^2+2M^2.$$

Esaminiamo alcuni casi limite.

Per la diffusione di elettroni su un nucleo pesante presenta interesse il caso in cui l'impulso $|\,\boldsymbol{q}\,|$ trasferito dall'elettrone al nucleo è piccolo rispetto alla massa del nucleo, ma non rispetto a $1/R$ (R è il raggio del nucleo), e quindi non si può considerare il nucleo come puntiforme. In tal caso il sistema del baricentro coincide approssimativamente col sistema di quiete del nucleo, l'energia di rinculo del nucleo può essere trascurata e l'energia dell'elettrone non cambia. In questo caso

$$-t=\boldsymbol{q}^2 \ll M^2, \quad \pi\,|\,dt\,| = \boldsymbol{p}_e^2\, do_e',$$
$$s-M^2 \approx M^2-u \approx 2M\varepsilon_e$$

e la formula (133,4) prende la forma

$$d\sigma = \frac{\alpha^2\, do_e'}{\boldsymbol{q}^4}\,(4\varepsilon_e^2-q^2)\, F_e^2\,(-\boldsymbol{q}^2). \qquad (133,5)$$

In questa approssimazione nella sezione d'urto rimane solo il termine con il fattore di forma elettrico e la (133,5) corrisponde alla formula (81,5), valida per la diffusione di un elettrone su una distribuzione statica di cariche.

Per la diffusione di un elettrone su un neutrone fisso nello stesso caso limite $\varepsilon_e \ll M$ (M è la massa del neutrone) i fattori di forma possono essere sostituiti con i loro valori per $\boldsymbol{q}=0$, poiché, come abbiamo già notato, per un nucleone singolo il « raggio » caratteristico della distribuzione delle cariche è confrontabile con $1/M$[1]).

---

[1]) Il valore empirico del « raggio » quadratico medio di un nucleone è $\approx 3{,}5/M \approx 1/2m_\pi$ (m_π è la massa di un pione).

Essendo il neutrone elettricamente neutro $F_e(0) = 0$, e la sezione d'urto assume la forma

$$d\sigma = \alpha\mu^2\left[\frac{4(\varepsilon_e^2 - m^2)}{q^2} + 1\right] do'_e = \alpha\mu^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}} + 1\right) do'_e, \quad (133,6)$$

dove $\mu = \frac{e}{2M} F_m(0)$ è il momento magnetico del neutrone, ϑ è l'angolo di diffusione. Questa formula corrisponde al caso della diffusione di un elettrone su un momento magnetico puntiforme fisso.

Infine, scriviamo la formula per la sezione d'urto di diffusione di un elettrone ultrarelativistico su un nucleone per $|q| \gg m$. Per q^2 noi intendiamo, come al solito, il quadrato dell'impulso trasferito nel sistema del baricentro, e quindi l'invariante $t = -q^2$. Nel sistema di quiete del nucleone iniziale (sistema del laboratorio) abbiamo, invece,

$$-t \approx 2(p_e p'_e) = 2\varepsilon_e \varepsilon'_e (1 - \cos\vartheta),$$

dove ε_e, ε'_e sono l'energia iniziale e finale dell'elettrone, ϑ è l'angolo di diffusione in questo sistema. Nel caso ultrarelativistico ε'_e è legato a ϑ mediante la stessa formula che nel caso della diffusione di un fotone (cfr. la (86,8)):

$$\frac{1}{\varepsilon'_e} - \frac{1}{\varepsilon_e} = \frac{1}{M}(1 - \cos\vartheta).$$

Abbiamo perciò

$$-t = \frac{4\varepsilon_e^2 \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}}{1 + \frac{2\varepsilon_e}{M}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}, \quad (133,7)$$

$$\pi d|t| = \frac{\varepsilon_e^2\, do'_e}{\left(1 + \frac{2\varepsilon_e}{M}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2} = \varepsilon_e^2\left(1 - \frac{q^2}{2\varepsilon_e M}\right)^2 do'_e, \quad (133,8)$$

dove $do'_e = 2\pi \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta$. Nella formula (133,4) si può ovunque tralasciare la massa dell'elettrone m; esprimendo tutte le quantità attraverso t e $s - M^2 = 2M\varepsilon_e$, otteniamo

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2 d|t|}{\varepsilon_e^2 t^2}\left\{F_e^2(t)\left[\frac{(4M\varepsilon_e + t)^2}{4M^2 - t} + t\right] - \frac{t}{4M^2}F_m^2(t)\left[\frac{(4M\varepsilon_e + t)^2}{4M^2 - t} - t\right]\right\}, \quad (133,9)$$

oppure, usando le (133,7-8),

$$d\sigma = do'_e \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_e^2}\frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen}^4\frac{\vartheta}{2}}\frac{1}{1 + \frac{2\varepsilon_e}{M}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}} \times$$

$$\times\left\{\frac{F_e^2 - \frac{t}{4M^2}F_m^2}{1 - \frac{t}{4M^2}} - \frac{t}{2M^2}F_m^2 \operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}\right\} \quad (133,10)$$

(*M. Rosenbluth*, 1950).

Notiamo che i fattori di forma F_e e F_m danno contributi indipendenti alla sezione d'urto, e i termini di interferenza tra di essi mancano. Questo conferma che la scelta fatta dei fattori di forma è ragionevole.

PROBLEMA

Trovare la sezione d'urto di diffusione di un elettrone su un adrone a spin 0.

Soluzione. Usando la (132,5), in luogo della (133,3), abbiamo

$$M_{fi} = \frac{4\pi e^2}{q^2} (\bar{u}'_e \hat{P}_h u_e) F(q^2).$$

Per la sezione d'urto si ottiene

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2 \, dt \, [(s-u)^2 + (4M^2 - t)\, t]}{[s-(M+m)^2]\,[s-(M-m)^2]\, t^2} F^2(t)$$

(le notazioni sono le stesse della (133,4)). Per $|t| \gg m^2$

$$d\sigma = do'_e \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_e^2} \frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen}^4\frac{\vartheta}{2}} \frac{F^2(t)}{1 + \frac{2\varepsilon_e}{M}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}}$$

(le notazioni sono le stesse della (133,10)).

§ 134. *Teorema delle basse energie per la radiazione di frenamento*

Nel § 95 abbiamo studiato il processo di emissione di un fotone nell'urto di particelle nel limite in cui la frequenza del fotone tende a zero. In quella sede risultò che l'ampiezza del processo è inversamente proporzionale a ω e si esprime in maniera semplice attraverso l'ampiezza dello stesso processo di collisione senza emissione di fotoni molli (di questa ampiezza parleremo convenzionalmente nel seguito come di ampiezza di diffusione « elastica » e la designeremo con $M_{fi}^{(el)}$ [1])). Nell'approssimazione successiva (in ω) abbiamo

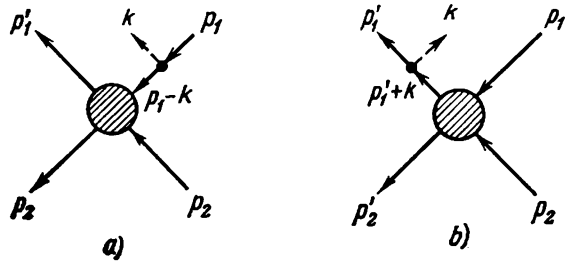
$$M_{fi} = M_{fi}^{(-1)} + M_{fi}^{(0)}, \tag{134,1}$$

dove al termine principale ($\sim\omega^{-1}$) va ad aggiungersi un termine correttivo ($\sim\omega^0$) indipendente da ω. Vedremo in seguito che anche questo termine correttivo (come già quello principale) può venire espresso attraverso $M_{fi}^{(el)}$, e per di piú, in modo indipendente dai particolari (a noi sconosciuti) della struttura elettromagnetica dell'adrone. Questa affermazione è nota come il *teorema delle basse energie* per la radiazione di frenamento (*F. E. Low*, 1958).

Abbiamo visto nel § 95 che il contributo fondamentale nell'ampiezza di emissione di un fotone molle (corrispondente al primo ter-

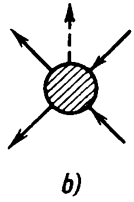
[1]) Nel § 95 era designata come $M_{fi}^{(0)}$.

mine nella (134,1)) è dato dai diagrammi nei quali il fotone viene emesso direttamente dalla particella iniziale o da quella finale. Si tratta dei diagrammi della forma



(134,2)

in un certo senso contrapposti ai diagrammi della forma



(134,3)

nei quali la linea fotonica esce dalle parti interne del diagramma. Caratteristica dei diagrammi (134,2) è che essi possono essere divisi in due parti mediante un taglio di una linea dell'adrone virtuale (iniziale o finale). In altre parole, essi illustrano una proprietà importante sotto questo aspetto: la presenza di uno stato intermedio ad una particella con un adrone. Abbiamo visto nel § 80 che, in forza delle richieste di unitarietà, questa proprietà conduce già di per se stessa alla comparsa di un polo nell'ampiezza.

Adroni a spin 0

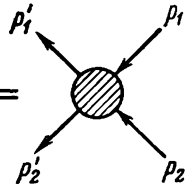
Supponiamo, per semplificare, che dei due adroni collidenti sia elettricamente carico (e possa, di conseguenza, irradiare) solo uno (il primo) e che ambedue gli adroni siano privi di spin. Le ampiezze d'onda u di tali adroni sono degli scalari che noi poniamo uguali a 1.

Allora il contributo nell'ampiezza dovuto alla parte singolare del diagramma (134,2,a) ha la forma

$$iM_{fi}^{(a)} = \sqrt{4\pi}\, e_\mu^* (2p_1^\mu - k^\mu) Z_1 eF \frac{1}{(p_1-k)^2 - M^2}\, i\Gamma. \qquad (134,4)$$

Il primo fattore è relativo al fotone k (e_μ è il suo 4-vettore polarizzazione). Il secondo fattore è relativo al vertice elettromagnetico adronico (il punto in grassetto nel diagramma); esso è scritto nella forma (132,5), dove $Z_1 e$ è la carica dell'adrone e F il suo fattore di

forma. Il terzo fattore è il propagatore dell'adrone virtuale $p_1 - k$ (M è la sua massa). Infine, il fattore $i\Gamma$ designa qui tutta la parte restante del diagramma. Quest'ultimo fattore differisce dall'ampiezza di diffusione « elastica »

$iM_{fi}^{(el)} =$ 

(134,5)

per la sostituzione dell'adrone reale p_1 con l'adrone virtuale $p_1 - k$.

Tra i primi termini dello sviluppo dell'espressione (134,4) in potenze di ω figureranno: 1) i termini inversamente proporzionali a ω, 2) i termini indipendenti da ω ma dipendenti dalla direzione di $\boldsymbol{k}$, 3) i termini indipendenti sia da ω che da $\boldsymbol{k}$. I termini del terzo gruppo (e solo questi) possono provenire anche da diagrammi « non singolari », i diagrammi della forma (134,3), che non contengono singolarità, e dalle parti non singolari dei diagrammi (134,2). Come vedremo, tutti i termini di questo tipo sono univocamente determinabili dai termini dei primi due tipi mediante la condizione di invarianza di gauge e non richiedono, perciò, calcoli speciali.

L'ampiezza del processo « elastico » (134,5) dipende unicamente da due variabili indipendenti:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_1' + p_2')^2, \\ t &= (p_2' - p_2)^2. \end{aligned} \tag{134,6}$$

La sostituzione di p_1 con $p_1 - k$ non solo trasforma s in $(p_1 - k + p_2)^2$, ma introduce anche la dipendenza dalla nuova variabile

$$(p_1 - k)^2 - M^2 = -2p_1k,$$

che caratterizza la « non fisicità » dell'impulso $p_1 - k$. Ma già il primo termine dello sviluppo secondo questa nuova (piccola) variabile elimina la singolarità nell'ampiezza (134,4) e quindi può dare in essa solo termini indipendenti da k, che a noi, secondo quanto detto sopra, per ora non interessano. In tal modo, arriviamo all'importante conclusione che al posto della quantità Γ nella (134,4) si può porre l'ampiezza fisica $M_{fi}^{(el)}(s, t)$, sostituendovi solamente

$$s \to (p_1 + p_2 - k)^2 = s - 2k(p_1 + p_2). \tag{134,7}$$

I primi termini dello sviluppo sono

$$\Gamma \to M_{fi}^{(el)}(s, t) - 2(kp_1 + kp_2)\left(\frac{\partial M_{fi}^{(el)}}{\partial s}\right)_t .$$

Per la stessa ragione, non è importante il fatto che il fattore di forma elettromagnetico F è qui relativo ad un vertice in cui dei due terminali adronici (p_1 e $p_1 - k$) solo uno è fisico. Possiamo quindi sostituire F col fattore di forma esaminato nel § 132 relativo ad un vertice con due terminali fisici, e poiché il fotone k nel caso considerato è reale, abbiamo $F(k^2) = F(0) = 1$.

In tal modo, dalla (134,4) troviamo

$$M_{fi}^{(0)} = Z_1 e \sqrt{4\pi} \frac{2(e^* p_1)}{-2(kp_1)} - \\ - Z_1 e \sqrt{4\pi}\, 2(e^* p_1) \frac{1}{-2(kp_1)} 2(p_2 k) \frac{\partial M_{fi}^{(el)}}{\partial s} + \ldots, \qquad (134,8)$$

dove i punti di sospensione significano i termini del tutto indipendenti da k (mentre il secondo termine della (134,8) dipende dalla direzione di $\boldsymbol{k}$). In modo analogo troveremo che il contributo in M_{fi} dovuto al diagramma (134,2,b) differisce dal (134,8) per la sostituzione di p_1, p_2, k con p_1', p_2', $-k$. Per il termine principale dello sviluppo otteniamo cosí l'espressione a noi già nota

$$M_{fi}^{(-1)} = Z_1 e \sqrt{4\pi} \left(\frac{p_1' e^*}{p_1' k} - \frac{p_1 e^*}{p_1 k} \right) M_{fi}^{(el)} \qquad (134,9)$$

(cfr. la (95,5)).

I termini indipendenti da k possono essere determinati usando la richiesta che l'ampiezza sia globalmente gauge-invariante. Precisamente, essa non deve cambiare per la sostituzione $e^* \to e^* + \text{costante} \cdot k$, deve cioè avere la forma $M_{fi} = e_\mu^* J^\mu$, ricordando inoltre che $k_\mu J^\mu = 0$. È facile vedere che a tal fine occorre aggiungere alla (134,8) il termine indipendente da k

$$-2Z_1 e \sqrt{4\pi}\, (p_2 e^*),$$

e analogamente per il diagramma (134,2,b). Come risultato otteniamo

$$M_{fi}^{(0)} = 2Z_1 e \sqrt{4\pi}\, e_\mu^* \left[p_1^\mu \frac{(p_2 k)}{(p_1 k)} - p_2^\mu + p_1'^\mu \frac{(p_2' k)}{(p_1' k)} - p_2'^\mu \right] \frac{\partial M_{fi}^{(el)}}{\partial s}. \qquad (134,10)$$

Questa formula dà la soluzione del problema posto. La si può rappresentare in forma piú compatta operando la sostituzione identica

$$2p_{2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial p_1^\nu} \right)_{p_1', p_2, p_2'}$$

(e analogamente per $\partial/\partial p_1'$) ed introducendo gli operatori differenziali

$$\mathrm{d}_{1\mu} = \frac{p_{1\mu}}{(p_1 k)} k^\nu \frac{\partial}{\partial p_1^\nu} - \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \qquad (134,11)$$

(e analogamente per $\mathrm{d}_{1\mu}'$). Allora[1])

$$M_{fi}^{(0)} = Z_1 e \sqrt{4\pi}\, e_\mu^* (\mathrm{d}_1^\mu + \mathrm{d}_1'^\mu) M_{fi}^{(el)}. \qquad (134,12)$$

[1]) La generalizzazione di questa formula al caso di urti con la partecipazione di un numero qualsiasi di particelle cariche viene realizzata mediante la sostituzione di $Z_1 (\mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_1')$ con un'analoga somma sulle particelle iniziali e finali.

La sezione d'urto è determinata dal quadrato $|M_{fi}|^2$; con la precisione richiesta

$$|M_{fi}|^2 = |M_{fi}^{(-1)}|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(M_{fi}^{(-1)} M_{fi}^{(0)*}). \qquad (134,13)$$

Il secondo termine dà la correzione voluta alla sezione d'urto di radiazione. Sommando sulle polarizzazioni del fotone, otteniamo per questa correzione la seguente espressione:

$$-4\pi (Z_1 e)^2 \left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)}\right)^{\mu} (\mathrm{d}_1' + \mathrm{d}_1)_{\mu} |M_{fi}^{(\mathrm{el})}|^2. \qquad (134,14)$$

In tal modo, la correzione alla sezione d'urto di radiazione è espressa attraverso la sezione d'urto del processo « elastico » e la sua derivata rispetto a s.

Adroni a spin 1/2

Si abbia ora un adrone a spin 1/2. Il principio dei calcoli rimane lo stesso. Cambia solo la forma concreta dei vertici e dei propagatori.

In qualità di operatore di vertice elettromagnetico occorre prendere l'espressione (132,7), la quale per $k^2 \to 0$ e per una linea fotonica uscente diventa

$$Z_1 e \gamma^{\mu} + \mu_{\mathrm{an}} \sigma^{\mu\nu} k_{\nu}, \qquad (134,15)$$

dove μ_{an} è la parte anomala del momento magnetico dell'adrone (cfr. la (132,8)). L'operatore di vertice Γ, invece, connesso all'ampiezza del processo « elastico », è determinato dalla relazione

$$iM_{fi}^{(\mathrm{el})} = \bar{u}_1' i \Gamma u_1, \qquad (134,16)$$

dove $u_1 = u(p_1)$, $u_1' = u(p_1')$ sono le ampiezze bispinoriali dell'adrone iniziale e finale. La dipendenza di questo operatore dai 4-impulsi delle particelle può essere rappresentata nella forma

$$\Gamma = f_1(s, t) + (\hat{p}_2 + \hat{p}_2') f_2(s, t), \qquad (134,17)$$

dove f_1, f_2 sono ampiezze invarianti (cfr. la (71,3)).

Allora un contributo dovuto, ad esempio, al diagramma (134,2,a) nell'ampiezza del processo sarà

$$M_{fi}^{(a)} = \bar{u}_1' \Gamma \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + M}{-2(p_1 k)} \sqrt{4\pi} (Z_1 e \hat{e}^* + \mu_{\mathrm{an}} \sigma^{\mu\nu} e_{\mu}^* k_{\nu}) u_1,$$

dove in Γ l'argomento s deve essere sostituito secondo la (134,7).

Tralasciando i semplici calcoli intermedi, riportiamo il risultato finale:

$$M_{fi}^{(0)} = \sqrt{4\pi} Z_1 e \bar{u}_1' \left[(\mathrm{d}_1' + \mathrm{d}_1) \Gamma + \frac{\hat{e}^* \hat{k}}{2(p_1' k)} \Gamma + \Gamma \frac{\hat{k} \hat{e}^*}{2(p_1 k)} \right] u_1 -$$
$$- \sqrt{4\pi} \mu_{\mathrm{an}} \bar{u}_1' \left[\frac{\sigma^{\mu\nu} e_{\mu}^* k_{\nu} M - \hat{k}(p_1' e^*) + \hat{e}^*(p_1' k)}{(p_1' k)} \Gamma - \right.$$
$$\left. - \Gamma \frac{\sigma^{\mu\nu} e_{\mu}^* k_{\nu} M + \hat{k}(p_1 e^*) - \hat{e}^*(p_1 k)}{(p_1 k)} \right] u_1. \qquad (134,18)$$

Nella correzione alla sezione d'urto $M_{fi}^{(0)}$ figura, secondo la (134,13), linearmente. È evidente che il momento magnetico μ_{an} può comparire nel risultato solo nella forma $\mu_{an}\,\zeta_1$ oppure $\mu_{an}\,\zeta_1'$, dove ζ è il vettore polarizzazione degli adroni. Di conseguenza, nell'eseguire la media sulle polarizzazioni degli adroni tutta questa parte viene a cadere. Se eseguiamo la media anche sulle polarizzazioni del fotone, dopo semplici trasformazioni, risulta che rimane valida la formula (134,14), che esprime la correzione alla sezione d'urto di radiazione attraverso la sezione d'urto di diffusione « elastica » (*T. N. Burnett*, *N. M. Kroll*, 1968).

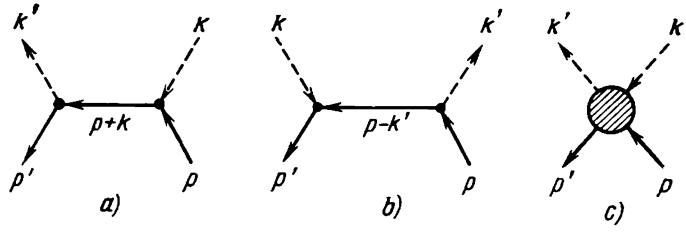
§ 135. *Teorema delle basse energie per la diffusione di un fotone su un adrone*

Nel limite delle piccole frequenze la sezione d'urto di diffusione di un fotone su una qualsiasi particella carica in quiete tende al suo valore classico dato dalla formula di Thomson. A questo limite corrisponde un'ampiezza indipendente dalla frequenza del fotone ω, che designeremo qui con $M_{fi}^{(0)}$. Tuttavia, anche per la diffusione di un fotone (come già per la radiazione di frenamento esaminata nel paragrafo precedente) risulta che non solo questo primo termine, ma anche il termine successivo dello sviluppo dell'ampiezza in potenze di ω non dipende dai particolari della struttura elettromagnetica dell'adrone:

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} + M_{fi}^{(1)}, \tag{135,1}$$

dove $M^{(1)} \sim \omega$ (*F. E. Low*, 1954; *M. Gell-Mann*, *M. L. Goldberger*, 1954).

Il processo considerato è rappresentato da diagrammi di tre tipi:



(135,2)

dei quali, i primi due sono nuovamente caratterizzati dalla presenza di uno stato intermedio ad una particella ed hanno, quindi, una singolarità di tipo polo.

In linea di principio, tutte le argomentazioni e il formalismo dei calcoli rimangono gli stessi del § 134. Di fatto è sufficiente calcolare solo un contributo delle parti singolari dei diagrammi (135,2,*a*-*b*), nei quali i vertici elettromagnetici sono espressi attraverso i fattori

di forma statici (carica Ze e momento magnetico anomalo μ_{an}) secondo la (134,15).

Tuttavia, a differenza del caso della radiazione di frenamento, le correzioni alla sezione d'urto dell'effetto Compton, che ora ci interessano, esistono solo per particelle dotate di spin. La ragione di ciò sta nel fatto che per la radiazione di frenamento, oltre alle correzioni connesse allo spin, ci sono anche correzioni connesse alla dipendenza energetica dell'ampiezza del processo « elastico ». Nel caso che stiamo esaminando, però, il ruolo di quest'ultima grandezza è svolto dai fattori di forma, che per « terminali fisici » si riducono a delle costanti e non dipendono dall'energia. Perciò, per la diffusione di un fotone le correzioni sono dovute soltanto al momento magnetico, assente nelle particelle prive di spin. Nel seguito noi esamineremo la diffusione di un fotone su un adrone a spin 1/2.

Intendendo per M_{fi} il contributo nell'ampiezza di diffusione dovuto ai diagrammi singolari, abbiamo (cfr. le (86,3-4))

$$M_{fi} = -4\pi (Zc)^2 e'^*_\mu e_\nu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u), \tag{135,3}$$

dove

$$Q^{\mu\nu} = (\gamma^\mu + S'^\mu) \frac{\hat{p}+\hat{k}+M}{s-M^2} (\gamma^\nu - S^\nu) + (\gamma^\nu - S^\nu) \frac{\hat{p}-\hat{k}'+M}{u-M^2} (\gamma^\mu + S'^\mu), \tag{135,4}$$

$$s = (p+k)^2 = (p'+k')^2, \quad u = (p-k')^2 = (p'-k)^2$$

e, per brevità, sono state introdotte le notazioni

$$\mu_{an}\sigma^{\mu\lambda}k_\lambda = ZeS^\mu, \quad \mu_{an}\sigma^{\mu\lambda}k'_\lambda = ZeS'^\mu. \tag{135,5}$$

Permutando gli operatori $\hat{p} + M$ e usando le equazioni $\bar{u}'(\hat{p}' - M) = (\hat{p} - M)u = 0$, si può trasformare questa espressione nella forma

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu} = &\left[(\gamma^\mu + S'^\mu)\frac{\hat{k}\gamma^\nu + 2p^\nu}{2pk} + \frac{\gamma^\nu \hat{k} - 2p'^\nu}{2p'k}(\gamma^\mu + S'^\mu)\right] - \\ &- \left[\frac{\gamma^\mu \hat{k}' + 2p'^\mu}{2p'k'} S^\nu + S^\nu \frac{\gamma^\mu \hat{k}' - 2p^\mu}{2pk'}\right] - \\ &- \left[S'^\mu \frac{\hat{p}+\hat{k}+M}{2pk} S^\nu - S^\nu \frac{\hat{p}-\hat{k}'+M}{2pk'} S'^\mu\right]. \end{aligned} \tag{135,6}$$

Questa forma (e la forma analoga con k e k' scambiati di posto) rende evidente l'invarianza di gauge dell'espressione (135,3), che si esprime nelle uguaglianze

$$k'_\mu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u) = (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u) k_\nu = 0 \tag{135,7}$$

(verificando occorre ricordare che $\hat{k}\hat{k} = 0$, $kS = k'S' = 0$).

Poiché la parte singolare dell'ampiezza di diffusione risulta, in tal modo, gauge-invariante già di per se stessa, deve allora essere

gauge-invariante di per se stessa anche la parte regolare dell'ampiezza (che include in sé anche il contributo del diagramma (135,2,*c*). Da qui segue, a sua volta, che lo sviluppo di questa parte in potenze di k e k' deve iniziarsi a partire dai termini quadratici (cfr. analoga osservazione a proposito della condizione (124,5)). In altre parole, la parte regolare dell'ampiezza contiene solo termini a cominciare da quelli proporzionali a $\omega\omega' \sim \omega^2$, non dà cioè alcun contributo nei termini che ci interessano, e che sono proporzionali a ω^0 e ω^1. Tutti questi ultimi sono, quindi, contenuti nell'espressione (135,3).

Per eseguire praticamente i calcoli scegliamo il sistema di riferimento del laboratorio, in cui si trova in quiete l'elettrone iniziale. Per i fotoni scegliamo il gauge trasversale tridimensionale, nel quale $e_0 = e'_0 = 0$. Allora $pe = 0$, $p'e'^* \sim |\boldsymbol{p}'| \sim \omega$, e dalla (135,6) si vede immediatamente che i primi termini dello sviluppo di M_{fi} saranno proporzionali a ω^0, mentre i termini contenenti μ_{an} daranno un contributo solo nei termini proporzionali a ω^1.

Le ampiezze d'onda dell'elettrone iniziale e finale nel sistema di riferimento del laboratorio hanno, con la necessaria precisione, la forma

$$u = \sqrt{2M}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}' = \sqrt{2M}\left(w'^*, -\frac{w'^*}{2M}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{\sigma}\right),$$

dove w, w' sono spinori tridimensionali.

Un calcolo diretto porta al seguente risultato:

$$M_{fi}^{(0)} = -8\pi (Ze)^2 (e'^*e)(w'^*w), \tag{135,8}$$

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(1)} = &-16\pi i M \mu_{an}^2 \omega (w'^*\boldsymbol{\sigma} w)[[\boldsymbol{n}'e'^*][\boldsymbol{n}e]] - \\ &- 4\pi i Ze\mu_{an}\omega (w'^*\boldsymbol{\sigma} w)\{\boldsymbol{n}([\boldsymbol{n}e]e'^*) + [\boldsymbol{n}e](\boldsymbol{n}e'^*) - \\ &- \boldsymbol{n}'([\boldsymbol{n}'e'^*]e) - [\boldsymbol{n}'e'^*](\boldsymbol{n}e) - 2[e'^*e]\} \end{aligned} \tag{135,9}$$

(dove $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$, $\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{k}'/\omega'$).

La sezione d'urto di diffusione è

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}|M_{fi}|^2 \frac{\omega'^2}{M^2\omega^2}\, do' \tag{135,10}$$

(vedi la (65,19)). Per la diffusione su una particella carica è differente da zero sia $M_{fi}^{(1)}$ che $M_{fi}^{(0)}$. La precisione adottata permette di conservare nel quadrato $|M_{fi}|^2$ i termini $|M_{fi}^{(0)}|^2$ e Re $(M_{fi}^{(0)} M_{fi}^{(1)*})$. Il primo dà la sezione d'urto di Thomson. Il secondo, invece, si annulla nella media sulle polarizzazioni dei fotoni e degli elettroni. Perciò nella diffusione su un adrone carico le correzioni considerate sono dovute solo agli effetti della polarizzazione.

Per la diffusione su un adrone elettricamente neutro $M_{fi}^{(0)} = 0$ e la sezione d'urto è determinata dal quadrato $|M_{fi}^{(1)}|^2$. Eseguita la media sulle polarizzazioni delle particelle finali e calcolata la somma sulle polarizzazioni delle particelle iniziali, questa sezione d'urto

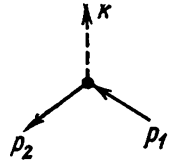
risulta (in unità ordinarie) uguale a

$$d\sigma = \frac{2\mu^4\omega^2}{\hbar^2 c^4}(2 + \operatorname{sen}^2\vartheta)\, do', \tag{135,11}$$

dove ϑ è l'angolo di diffusione del fotone, e il momento magnetico anomalo coincide col momento totale μ. Notiamo che per la sua dipendenza angolare questa sezione d'urto corrisponde al caso di una diffusione antisimmetrica (vedi problema 2, § 61).

§ 136. *Momenti di multipolo degli adroni*

Esaminiamo ora la corrente di transizione corrispondente ad un diagramma simile al diagramma (132,2)



(136,1)

nel quale, però, le linee p_1 e p_2 sono relative a particelle differenti (di massa M_1 e M_2); qui risulta piú comodo rappresentare la linea fotonica $k = p_1 - p_2$ come uscente dal vertice. In questo caso il fotone può essere sia virtuale che reale: deve solo essere $k^2 < (M_1 - M_2)^2$, cosí che è possibile il valore $k^2 = 0$. In tal modo, le applicazioni di questo diagramma comprendono, in particolare, anche i processi di emissione di un fotone accompagnata da trasformazioni delle particelle, tra le quali possono esserci anche dei nuclei (in quest'ultimo caso le particelle iniziale e finale sono il nucleo in stati differenti).

In relazione al problema posto il caso piú interessante si ha quando la lunghezza d'onda del fotone è grande rispetto alle « dimensioni » caratteristiche della particella (cioè le dimensioni che compaiono nel relativo fattore di forma; per i nuclei esse coincidono, naturalmente, con il loro « raggio »). Allora la corrente di transizione può essere sviluppata in potenze di k[1]).

Notiamo innanzitutto che deve essere

$$J_{fi} = 0 \quad \text{per} \quad k = 0. \tag{136,2}$$

In effetti, al limite $k \to 0$ corrisponde un potenziale costante nello spazio e nel tempo. Ma tale potenziale non ha alcun senso fisico e non può essere la causa di nessun processo reale. A questa conclusione si può arrivare anche da un punto di vista piú formale: le

[1]) Nel seguito noi seguiremo una metodologia elaborata da *V. B. Berestetskij* (1948).

correnti considerate nel § 132 erano differenti da zero per $k = 0$ grazie alla presenza di termini proporzionali al 4-vettore $P = p_1 + p_2$; ma per $M_1 \neq M_2$ il prodotto $Pk \neq 0$, e quindi tali termini sono vietati dalla condizione di trasversalità della corrente.

Scriviamo la condizione di trasversalità della corrente $J_{fi} = (\rho_{fi}, \boldsymbol{J}_{fi})$ in forma tridimensionale:

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{J}_{fi} = \omega\rho_{fi}. \tag{136,3}$$

A questa condizione si può soddisfare in due modi:

$$\boldsymbol{J}_{fi} = \omega\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}, \omega), \quad \rho_{fi} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}, \omega) \tag{136,4}$$

oppure

$$\boldsymbol{J}_{fi} = [\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}, \omega)], \quad \rho_{fi} = 0. \tag{136,5}$$

Qui $\boldsymbol{v}$ è un certo vettore polare e $\boldsymbol{a}$ un vettore assiale. Nel primo caso si parla di corrente di tipo elettrico e nel secondo di corrente di tipo magnetico. Secondo la (136,2) $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{a}$ per $\boldsymbol{k}$, $\omega \to 0$ o rimangono finiti o si annullano.

Sia l'energia del fotone $\omega \ll M_1$. Allora possiamo trascurare l'effetto del rinculo e considerare in quiete anche la particella finale M_2 (nel sistema a riposo della particella M_1); in tal caso ω diventa una quantità data: $\omega = M_1 - M_2$. Gli stati delle particelle in quiete M_1 e M_2 sono caratterizzati dagli spinori tridimensionali w_1 e w_2 rispettivamente di rango $2s_1$ e $2s_2$, dove s_1 e s_2 sono gli spin delle particelle. La corrente di transizione deve essere una combinazione bilineare di w_1 e w_2^*. Con i prodotti delle componenti di questi spinori si possono comporre tensori irriducibili di rango $l = s_1 + s_2, \ldots, |s_1 - s_2|$ (per un dato l si avrà un vero tensore o uno pseudotensore a seconda della parità intrinseca delle particelle M_1 e M_2). Oltre a questi tensori abbiamo a nostra disposizione solo il vettore $\boldsymbol{k}$. Tenendo presente che vogliamo costruire il primo termine dello sviluppo della corrente in potenze di $\boldsymbol{k}$, occorre comporre, con queste quantità, un vettore della potenza piú bassa possibile di $\boldsymbol{k}$. Raggiungeremo lo scopo prefisso prendendo il tensore di rango piú basso che abbiamo e moltiplicandolo $(l - 1)$ volte per il vettore $\boldsymbol{k}$. Questo sarà proprio il vettore polare $\boldsymbol{v}$ o il vettore assiale $\boldsymbol{a}$.

Siano Q_{lm} le componenti sferiche di un tensore composto dalle ampiezze d'onda delle particelle. Le componenti sferiche di un tensore di rango $l - 1$, composto dalle componenti di $\boldsymbol{k}$, saranno uguali a $|\boldsymbol{k}|^{l-1} Y_{l-1,m}(\boldsymbol{n})$ (dove $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$). Secondo la regola generale della composizione dei tensori sferici (vedi III (107,3)) le componenti sferiche del vettore $\boldsymbol{v}$ possono scriversi nella forma

$$v_\lambda = (-1)^{\lambda+1} i^l \frac{\sqrt{4\pi}}{(2l-1)!!} \sqrt{\frac{2l+1}{l}} |\boldsymbol{k}|^{l-1} \times \\ \times \sum_m \begin{pmatrix} l-1 & 1 & l \\ \lambda+m & -\lambda & -m \end{pmatrix} Q_{l,-m} Y_{l-1,\lambda+m}(\boldsymbol{n}),$$

dove λ assume i valori 0, ± 1 (per quanto riguarda la scelta del fattore generale vedi piú avanti). Usando la formula (7,16), si può esprimere $\boldsymbol{v}$ attraverso i vettori sferici:

$$\boldsymbol{v} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}\,|\boldsymbol{k}|^{l-1}}{(2l-1)!!\sqrt{l(2l+1)}} \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l,-m} \times$$
$$\times [\sqrt{l+1}\,\boldsymbol{Y}^{(e)}_{lm}(\boldsymbol{n}) + \sqrt{l}\,\boldsymbol{Y}^{(l)}_{lm}(\boldsymbol{n})]. \qquad (136,6)$$

Sostituendo questa espressione nella (136,4), troviamo la corrente di transizione El:

$$\boldsymbol{J}_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}\,\omega\,|\boldsymbol{k}|^{l-1}}{(2l-1)!!\sqrt{l(2l+1)}} \sum_m (-1)^{lm} \times$$
$$\times Q^{(e)}_{l,-m} [\sqrt{l+1}\,\boldsymbol{Y}^{(e)}_{lm}(\boldsymbol{n}) + \sqrt{l}\,\boldsymbol{Y}^{(l)}_{lm}(\boldsymbol{n})], \qquad (136,7)$$

$$\rho_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}\,|\boldsymbol{k}|^l}{(2l-1)!!\sqrt{2l+1}} \sum_m (-1)^{l-m} Q^{(e)}_{l,-m} Y_{lm}(\boldsymbol{n}) \qquad (136,8)$$

(noi distinguiamo ovunque $|\boldsymbol{k}|$ da ω, avendo presente le possibili applicazioni di queste formule sia a fotoni reali che a quelli virtuali, per i quali queste quantità non coincidono).

Nelle (136,7-8) è sottinteso che il tensore sferico Q_{lm} (designato qui come $Q^{(e)}_{lm}$) è un vero tensore. Se invece si ha uno pseudotensore (nel qual caso viene designato come $Q^{(m)}_{lm}$), allora la formula (136,6) determina lo pseudovettore $\boldsymbol{a}$. La sostituzione nella (136,5) conduce allora alla corrente di transizione Ml:

$$\boldsymbol{J}_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}}{(2l-1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{l(2l+1)}}\,|\boldsymbol{k}|^l \sum_m (-1)^{l-m} Q^{(m)}_{l,-m} \boldsymbol{Y}^{(m)}_{lm}(\boldsymbol{n}), \qquad (136,9)$$
$$\rho_{fi} = 0.$$

Le quantità $Q^{(e)}_{lm}$ e $Q^{(m)}_{lm}$ rappresentano i momenti adronici di transizione di multipolo elettrico e magnetico. Il loro ruolo nell'elettrodinamica degli adroni è in tutto analogo al ruolo delle corrispondenti quantità nell'elettrodinamica degli elettroni. Tuttavia, mentre per i sistemi di elettroni questi momenti possono, in linea di principio, essere calcolati rispetto alle funzioni d'onda (come elementi di matrice degli operatori relativi), nell'elettrodinamica degli adroni essi sono delle quantità fenomenologiche, i cui valori si ricavano dall'esperienza.

La normalizzazione di queste quantità nelle (136,7-9) è scelta in modo da corrispondere alla loro definizione data nel § 46. Di ciò è facile convincersi considerando le correnti (136,7-9) come le tra-

sformate di Fourier della corrente di transizione nella rappresentazione delle coordinate. Cosí, sviluppando il fattore e^{-ikr} nell'integrale

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{k}) = \int \rho_{fi}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d^3x \tag{136,10}$$

mediante le formule (46,3) otteniamo

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{k}) = 4\pi i^l \sum_{l,\,m} Y^*_{lm}(\boldsymbol{n}) \int \rho_{fi}(\boldsymbol{r})\, Y^*_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) g_l(|\boldsymbol{k}|r)\, d^3x.$$

Lasciando in quest'espressione il termine col valore piú piccolo di l per il quale l'integrale non è nullo, e sostituendo $g_l(|\boldsymbol{k}|r)$ per $|\boldsymbol{k}|r \ll 1$ con il primo termine dello sviluppo relativo (46,5), si ritorna alla formula (136,9), dove

$$Q^{(e)}_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r^l \rho_{fi}(\boldsymbol{r})\, Y_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) d^3x \tag{136,11}$$

in accordo con la definizione (46,7).

Mostriamo che anche nel caso di emissione di un fotone reale le formule ottenute conducono a risultati a noi già noti.

L'ampiezza di transizione con emissione di un fotone di impulso $\boldsymbol{k} = \omega\boldsymbol{n}$ e polarizzazione $e = (0, \boldsymbol{e})$ è

$$M_{fi} = -e\sqrt{4\pi}\, \boldsymbol{e}^* \boldsymbol{J}_{fi}. \tag{136,12}$$

Se nello stato iniziale e in quello finale il nucleo possiede un valore determinato della proiezione del momento (M_i e M_f), nella somma su m nelle (136,7-9) rimane un solo termine in ciascuna delle formule: $m = M_i - M_f$. Poiché, secondo la (16,23), i prodotti $Y^{(e)}_{lm}\boldsymbol{e}^{(\lambda)*}$ o $Y^{(m)}_{lm}\, \boldsymbol{e}^{(\lambda)*}$ (dove $\lambda = \pm 1$ è la elicità del fotone, $\boldsymbol{e}^{(\lambda)} \perp \boldsymbol{n}$) sono proporzionali a $D^l_{\lambda m}$, si ritorna allora alle formule esaminate nel § 48.

La probabilità differenziale di radiazione è[1])

$$dw = 2\pi\delta\,[\omega - (E_i - E_f)]\, |M_{fi}|^2 \frac{d^3k}{2\omega\,(2\pi)^3} \tag{136,13}$$

(E_i, E_f sono l'energia iniziale e finale del nucleo). La probabilità totale si ottiene sommando sulle polarizzazioni e integrando in d^3k.

---

[1]) La presenza del fattore $2\pi\delta$ in questa formula al posto di $(2\pi)^4\,\delta^{(4)}$ nella (65,11) è connessa al fatto che trascurando il rinculo del nucleo, l'impulso non si conserva e rimane quindi solo la conservazione dell'energia.

Sostituendo la (136,7) o la (136,9) nella (136,12) e quindi nella (136,13) ed eseguendo le operazioni indicate, noi ritorniamo alla formula (46,9) (o (47,2)).

Le formule (136,7-9) comprendono tutti i casi che possono avere luogo, in cui si ha l'emissione di un fotone reale. Per i fotoni virtuali, invece, è possibile anche un altro caso, non contemplato da queste formule (*R. H. Fowler*, 1930).

Se gli spin e le parità degli stati iniziale e finale del nucleo sono uguali, allora mediante le rispettive ampiezze d'onda si può comporre lo scalare Q_0, e mediante quest'ultimo possiamo costruire una corrente di transizione della forma

$$\rho_{fi} = Q_0 \boldsymbol{k}^2, \quad \boldsymbol{J}_{fi} = Q_0 \omega \boldsymbol{k}. \tag{136,14}$$

La quantità Q_0 è chiamata momento di transizione di *monopolo* ($E0$). Per l'emissione di un fotone reale la corrispondente ampiezza di transizione si annulla (poiché $\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{k} = 0$). La corrente di monopolo, tuttavia, può essere sorgente di transizioni connesse all'emissione di fotoni virtuali. E c'è di piú: essa è l'unica sorgente di tali processi per $s_1 = s_2 = 0$, quando tutti i momenti di multipolo sono nulli.

Per la sua dipendenza da ω e $\boldsymbol{k}$ la corrente di monopolo (136,14) è analoga alla corrente di quadrupolo elettrico. Di conseguenza il momento Q_0 rappresenta una quantità dello stesso ordine del momento di quadrupolo. A questa conclusione si può giungere anche usando la (136,14) e considerando queste espressioni come le trasformate di Fourier della corrente nella rappresentazione delle coordinate. Sviluppando nella (136,10).

$$e^{-i\boldsymbol{kr}} = 1 - i\boldsymbol{kr} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{kr})^2 + \ldots$$

e supponendo che gli integrali dei due primi termini si annullino, otteniamo

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{2}\int \rho_{fi}(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{kr})^2 d^3x$$

oppure, considerando che la funzione $\rho(\boldsymbol{r})$ goda di simmetria sferica

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{6}k^2 \int \rho_{fi}(r) r^2 d^3x.$$

Da un confronto con la (136,14) troviamo

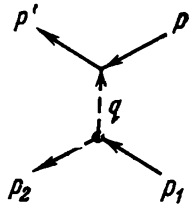
$$Q_0 = -\frac{1}{6}\int \rho_{fi}(r) r^2 d^3x. \tag{136,15}$$

L'analogia di questa grandezza col momento di quadrupolo è evidente.

PROBLEMI

1. Trovare la probabilità di ionizzazione dell'atomo dallo strato K a spese dell'energia di eccitazione ω del nucleo (la cosiddetta conversione interna dei raggi γ) in una transizione nucleare Ml in cui si trascura l'energia di legame dell'elettrone nell'atomo e l'influenza del campo del nucleo sulle sue funzioni d'onda[1]).

Soluzione. Il processo è descritto dal diagramma



(1)

dove p_1 e p_2 sono relativi al nucleo fisso nei suoi differenti stati, mentre $p = (m, 0)$ e $p' = (m + \omega, \boldsymbol{p}')$ sono i 4-impulsi dell'elettrone iniziale e finale. A questo diagramma corrisponde l'ampiezza

$$M_{fi} = e^2 \frac{4\pi}{q^2} \bar{u}(p') \hat{J}_{fi} u(p),$$

dove J_{fi} è la corrente di transizione del nucleo. Sommando sulle polarizzazioni finali dell'elettrone e mediando su quelle iniziali otteniamo

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = e^4 \frac{16\pi^2}{(q^2)^2} \{q^2 (J_{fi} J_{fi}^*) + 4 (J_{fi} p)(J_{fi}^* p)\}$$

(si è tenuto presente che $J_{fi} q = 0$ e quindi $J_{fi} p = J_{fi} p'$). La probabilità di conversione si calcola come segue:

$$dw_{\text{conv}} = 2 |\psi_i(0)|^2 \left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m} d\sigma \right)_{\boldsymbol{p} \to 0},$$

dove $d\sigma$ è la sezione d'urto di diffusione rappresentata dal diagramma (1) con $p = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$, e ψ_i è la funzione d'onda dell'elettrone atomico (per un elettrone K $|\psi_i(0)|^2 = (Z\alpha m)^3/\pi$). Il fattore 2 tiene conto di due elettroni nello strato atomico K. La sezione d'urto è

$$d\sigma = 2\pi\delta(\varepsilon + \omega - \varepsilon') |M_{fi}|^2 \frac{d^3 p'}{2|\boldsymbol{p}| 2\varepsilon' (2\pi)^3}$$

(cfr. nota, pag. 696).

Per le transizioni Ml la corrente J_{fi} è data dalla (136,9). L'integrazione di dw_{conv} in $d\varepsilon'$ elimina la funzione δ, mentre l'integrazione in do' trasforma il quadrato $|Y_{lm}^{(m)}|^2$ in 1. In tal modo, la probabilità di conversione risulta espressa attraverso il quadrato $|Q_{l,-m}^{(m)}|^2$. D'altro canto, però, secondo la (46,9) attraverso questa quantità si esprime anche la probabilità w_γ di emissione spontanea di un fotone nella stessa transizione nucleare. Si ottiene

$$\frac{w_{\text{conv}}}{w_\gamma} = 2\alpha (Z\alpha)^3 \frac{m}{\omega} \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{l+1/2}$$

(questo rapporto è chiamato coefficiente di conversione).

[1]) Questa approssimazione esige che la carica del nucleo sia piccola e che le energie di eccitazione ω siano sufficientemente grandi (allo stesso tempo $1/\omega$ è supposto grande rispetto alle dimensioni del nucleo). Di fatto, questa approssimazione è poco soddisfacente, e un calcolo piú esatto richiede che si tenga conto anche del campo coulombiano del nucleo.

2. Lo stesso per una transizione nucleare *El*.

Soluzione. Procedendo analogamente con la corrente di transizione (136,7-8) si ottiene

$$\frac{w_{\text{conv}}}{w_\gamma} = 2\alpha\,(Z\alpha)^3 \left(1 + \frac{l}{l+1}\,\frac{m^2}{\omega^2}\right)\left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{l-1/2}.$$

3. Lo stesso per una transizione di monopolo del nucleo.

Soluzione. Usando la corrente di transizione (136,14) si ottiene

$$w_{\text{conv}} = 16\alpha^2\,(Z\alpha)^3\, m^3\omega^2 \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{3/2} |\,Q_0\,|^2.$$

Poiché la radiazione di monopolo è impossibile, non si può eliminare $|\,Q_0|^2$ da quest'espressione.

Indice analitico[1]

Alternanza delle intensità, 236
Annichilazione di una coppia in tre fotoni, 434
Annullamento della carica, 660
Approssimazione logaritmica, 452, 454, 490
Asintoto infrarosso del propagatore elettronico, 587

Bethe — Salpeter, equazione di, 617, 672
Bispinore, 93
Breit, sistema di riferimento di, 680

Canali di reazione, 308, 367
Carica efficace del protone, 241
Carica intrinseca (o nuda), 545, 658
Catastrofe infrarossa, 484
Cattura radiativa di un protone da parte di un neutrone, 255
Coefficienti di Einstein, 195
Condizione di completezza delle matrici di Dirac, 130
  delle matrici di Pauli, 131
Coniugazione di carica, 66, 120
Contrazione di operatori, 342
Corrente di transizione, 191
Correzione relativistica alla funzione d'onda, 177
Costante della struttura fina, 13, 187
Creazione di coppie da parte di un campo elettrico, 643, 648

Densità di corrente di elettroni, 99, 147
  di particelle scalari, 56
Densità spettrale, 520
  doppia, 623
Diagrammi a scala, 616, 672
  scheletro, 528
  singolari, 370, 544, 686, 690
Diffusione antisimmetrica, 277
  coerente, 273, 296
  della luce da parte di un deutone, 281
  di un muone su un elettrone, 386, 387
  forzata, 275
  Raman (o combinata), 268
  di Rayleigh, 268
  scalare, 277
  simmetrica, 277
Divergenza infrarossa, 576, 582, 587, 600, 668

Effetti di polarizzazione nella diffusione elettrone-elettrone, 383, 385
  elettrone-muone, 387
  fotone-elettrone, 419
  nella radiazione di frenamento, 452
Effetto Compton, 414
  doppio, 434
  Stark sui livelli della struttura fina, 229
Elicità, 42, 77
  conservazione nel caso ultrarelativistico, 172, 378
Emissione di due quanti da parte di un atomo, 274
  di quanti molli nella radiazione di frenamento, 485
  forzata (o indotta) di fotoni, 194

[1]) Questo indice completa, senza ripeterlo, l'indice generale del libro. Nell'indice analitico sono stati inclusi termini e concetti non direttamente indicati in quello generale.

Equazione del secondo ordine per un elettrone in un campo esterno, 148
di Klein — Fok, 54
di Pauli, 152

Fattore di forma di carica, 681
magnetico, 681
Fotone elettrico, 35
magnetico, 35
Funzione aggiunta di Dirac, 101
di propagazione, 342, 450
di Spence, 578, 652

Gauge di Landau, 359, 516, 654, 657
trasversale tridimensionale, 29, 359
quadridimensionale, 29, 359
Gruppo di gauge, 64
Gruppo di Lorentz, proprio, ampliato, 65

Indici puntati, 85
Intensità delle righe di transizione, 216
Integrale coulombiano del moto, 157
Interazione di annichilazione, 402
Interazione spin-orbita, 154, 400
spin-spin, 400
Inversione, 33, 90
combinata, 68
del tempo, 45, 68, 121
quadridimensionale, 59
spaziale, 65

Lagrangiano del campo scalare, 55
del campo spinoriale, 119
d'interazione elettromagnetica, 191
Linea esterna efficace, 515, 546
Linee dei diagrammi, esterne, 345, 351
interne, 351
Livelli energetici di un elettrone nel campo coulombiano, 156, 165
in un campo magnetico, 150

Matrice densità di polarizzazione del fotone, 43
dell'elettrone, 133
del neutrino, 141
Matrici di Dirac in rappresentazione spinoriale, 99
in rappresentazione standard, 102
Metodo di Weizsacker — Williams, 487
Momenti di polarizzazione dei nuclei, 211
Momento di monopolo, 697, 698
di transizione, elettrico, 200
magnetico, 204
magnetico anomalo, 182

Operatore di massa, 521, 539
di polarizzazione, 514

Parametri di Stokes, 44
Parametrizzazione degli integrali, 597, 649
Parità degli stati sferici di un elettrone, 113
del fotone, 35
di carica, 67
del fotone, 71
del positrone, 126
di un sistema particella-antiparticella, 71
intrinseca, 65, 125
relativa, 125
di particella e antiparticella, 125
Parte autoenergetica compatta, 514, 521, 530, 539
elettronica, 521
fotonica, 514
di vertice, 527
irriducibile, 528
Particelle scalari, 52
vettoriali, 71
Piano di Mandelstam, 311
Polarizzazione del vuoto, 538, 561
del vuoto di mesoni, 565, 580, 611
Positronio, orto-, para-, 403
effetto Zeeman, 404
Precessione dello spin in un campo magnetico, 182, 187, 188
Principio di corrispondenza di Bohr, 198
di Frank — Condon, 237
Prodotto normale, 26, 361
Propagatore del campo scalare, 356
del campo vettoriale, 359

Radiazione di frenamento di dipolo, 443
di quadrupolo, 444
effetti di polarizzazione, 452
effetto di schermaggio, 454
nell'emissione di una particella

da parte di un nucleo, 444
nella riflessione da una barriera, 445
perdita di energia, 455
ruolo del rinculo, 476
Rappresentazione di Foldy — Wouthuysen, 112
di Furry, 536
di Heisenberg, 258, 338
d'interazione, 338
di Maiorana, 104, 124
di Mandelstam, 623
Regola di sommatoria nella radiazione, 229
Regolarizzazione degli integrali, 555, 582, 631
Regole di commutazione per gli operatori ψ, 353
di Feynman per l'aggiramento dei poli, 354, 358
Regole di selezione in un campo esterno, 225
negli atomi, 215
per la diffusione, 278, 286, 287
per la diffusione nelle molecole, 232, 233, 236, 238
nella radiazione di multipolo, 202, 205
relative allo spin isotopico, 240
Relazione di dispersione, 550, 573, 626
con sottrazione, 552, 626
senza sottrazione, 573
Residuo nel polo dell'ampiezza di diffusione, 161, 169
Ricombinazione radiativa, 246, 247
Righe principali del multipletto, 218
satelliti, 218
Rinormalizzabilità, 556, 658
Risonanza paramagnetica, 225
Sezione d'urto per la perdita di energia, 445, 456
Spinori sferici, 113
Spostamento di fase (sfasamento), 160, 170
nel campo coulombiano, 168
nel caso ultrarelativistico, 174
nel processo di fotogenerazione di pioni, 336
di Lamb, 603
nel positronio, 620
Stati sferici di elicità, 78
Superficie delle masse, 569
Sviluppo di Källen — Lehmann, 551

Tensore di diffusione, 270
di polarizzabilità, 274
Tensori irriducibili, 95
Teorema di Furry, 373
di Wick, 360
ottico, 294, 334
Testa di banda, 236
Thomas, fattore di, 155, 187
Trasformazione di forme bilineari secondo Pauli — Fierz, 130, 131
di gauge della matrice densità del fotone, 45
del propagatore fotonico, 356
di Lorentz per un bispinore, 103
di Lorentz per uno spinore, 88
di due fotoni in una coppia elettrone-positrone, 432
di una coppia muone-antimuone in una coppia elettrone-positrone, 387

Vertici dei diagrammi, 345
Vettori sferici, 36

Finito di stampare nel mese di luglio 1991
per conto degli Editori Riuniti
dalla tipografia ITER, Roma